1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871-1922

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A57

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an
höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Neunter Theil.

Mit zehn lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1847.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des neunten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus Von dem Herrn Professor Doctor O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	I.	5
XI.	Sur les dérivées d'une fonction de fonction. Par Monsieur Ubbo H. Meyer de Groningue.	I.	96
XII.	Sur le développement de la fonction $\left\{\frac{(1+u)^{\mu}-1}{\mu u}\right\}^{x}$. Par le même.	I.	101
XIV.	Ueber Decimalbrüche. Von Herrn Simon Spitzer zu Wien. (Von Herrn Director von Littrow zur Aufnahme in das Archiv mitgetheilt.)	I.	117
XVIII.	Ueber die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	II.	215
XIX.	Ueber einige Reihen, deren Glieder die auf einander folgenden Binomialcoefficienten als Factoren in sich schliessen. Von Herrn Oskar Werner, Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.	II.	219
XXII.	Theorematis in T. VII. pag. 266. propositi demonstratio. Auct. Dr. E. G. Björling, ad Acad. Upsal. Docens Mathes.	III.	233

409424

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXIX.	Zur Theorie des Integrallogarithmus. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	III.	307
XXX.	Ueber die höheren Differenzialquotienten der Potenzen des Cosinus. Von Demselben. . .	III.	313
XXXIV.	Ueber die Summirung der nach den Potenzen einer Hauptgrösse fortschreitenden Reihen, deren Coefficienten eine arithmetische Reihe einer beliebigen Ordnung bilden. Von dem Herausgeber.	III.	322
XXXV.	Relationen zwischen den Fakultätenkoeffizienten. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	III.	333
XLII.	Ueber eine in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende analytische Aufgabe. Von Demselben.	IV.	372
XLIII.	Allgemeine Reductionsformel für gewisse bestimmte Integrale. Von Demselben. . . .	IV.	379
XLIV.	Quid in Analysi Mathematica valeant signa illa x^y, Log $_b(x)$, Sin$x$, Cos$x$, Arcsin$x$, Arccos$x$, disquisitio. Auct. Dr. E. G. Björling, ad Acad. Upsal. Docens Math., ad Gymn. Aros. Lector Math. design.	IV.	383
XLVIII.	Ueber die Aufgabe: Zwei Grössen zu finden, deren Differenz, Quotient und Quadratsumme einander gleich sind. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	IV.	456

Geometrie.

IV.	Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven auf Schattenconstructionen. Von Herrn C. T. Meyer, Bergwerkscandidaten zu Freiberg.	I.	45
V.	Ueber die verschiedenen Ausdrücke des Krümmungshalbmessers einer Curve. Von dem Herrn Dr. J. Ph. Wolfers. astronomischen Rechner an der Königl. Sternwarte zu Berlin.	I.	60
VI.	Bemerkungen über die Kurve der Krümmungsmittelpunkte. Von dem Herrn Dr. F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund. . . .	I.	68

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
VII.	Beweis eines Theorems von den Kegelschnitten. Von Demselben.	I.	72
VIII.	Elementare Darstellung einer höchst einfachen Berechnung des Kreisverhältnisses. Von dem Herrn Professor Dr. Matzka zu Tarnow in Galizien.	I.	74
IX.	Ueber den Satz von dem Inhalte der Obelisken. Von dem Herausgeber.	I.	82
X.	Ueber die Entstehung der Obelisken und eine geometrische Aufgabe. Von Demselben. . .	I.	87
XVI.	Ueber quadrirbare Figuren auf cylindrischen Flächen. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	II.	149
XVII.	Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde. Von Herrn Oberlehrer Fr. Seydewitz am Gymnasium zu Heiligenstadt.	II.	158
XXI.	Ueber einen geometrischen Satz. Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg . . .	II.	231
XXIII.	Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, betrachtet. Von dem Herrn Dr. E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Cassel.	III.	250
XXIV.	Ueber einen Satz des Herrn Prof. J. Steiner. Von dem Herrn Observator Doctor Thomas Clausen zu Dorpat.	III.	259
XXV.	Ueber eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten zweier Dreiecke, von denen das eine dem andern und zugleich dem, diesem zugehörigen äusseren Kreise umschrieben ist. — Verallgemeinerung dieser Beziehung. Von dem Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Berlin. . .	III.	262
XXVII.	In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersteren einen gegebenen Winkel φ bilden. Von dem Herrn Doctor H. Hoffmann, Lehrer am Gymnasium zu Danzig.	III.	280

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXVIII.	Ueber die Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte. Von dem Herausgeber.	III.	293
XXXI.	Einfache Construction des Krümmungshalbmessers der Kegelschnitte. Von dem Herrn Fabriken-Kommissionsrathe A. Brix zu Berlin.	III.	316
XXXII.	Bemerkung zu Aufgabe 23. in: „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Von C. Adams. Winterthur. 1846.“ Von dem Herrn Dr. H. Hoffmann, Lehrer am Gymnasium zu Danzig.	III.	317
XXXIII.	Ein Paar Tetraedersätze. Von dem Herrn Schulrath J. H. T. Müller, Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.	III.	319
XXXVI.	Untersuchungen über die Kurve, welche der Ort der Fusspunkte der Senkrechten ist, die man in einer Ellipse vom Mittelpunkte auf ihre Tangenten fällt. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	III.	335
XL.	Ueber die Identität der Pyramidal- und prismatischen Schnitte mit den Verwandtschaften der Collineation und Affinität. Von Herrn Simon Spitzer zu Wien.	IV.	345
XLV.	Ueber die Rektifikation und Quadratur der Toroide. Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg	IV.	438
XLVI.	Eine geometrische Anwendung der Lehre vom Grössten und Kleinsten. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	IV.	448

Trigonometrie.

I.	Ein Paar goniometrische Sätze. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	I.	1
III.	Ueber sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft	Seite.
	welcher sie liegen, sehr klein sind. Von dem Herausgeber.	I.	8

Mechanik.

XXI.	Bemerkung über die allgemeinen Bedingungen des Gleichgewichts eines Systems von Kräften. Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	II.	232
XXVI.	Ueber die Bewegung in den Krümmungen der Eisenbahnen. Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.	III.	265
XXXVII.	Ueber das Graham'sche Compensationspendel. Von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	III.	338
XXXVIII.	Ueber die Bewegung einer Kugel im Laufe einer Windbüchse. Von Demselben.	III.	341
XLI.	Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Statik und über einige geometrische und statische Sätze von der Pyramide und den eckigen Körpern überhaupt. Von dem Herausgeber.	IV.	353

Physik.

XV.	Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit. Von Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger an der Universität zu Halle.	II.	121

Geschichte der Mathematik und Physik.

XIV.	Ueber das Problem von der Verdoppelung des Würfels. Von dem Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger an der Universität zu Halle.	I.	115

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

XIII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höhe-		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	ren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	I.	113
XX.	Aufgaben von Demselben.	II.	229
XXIX.	Aufgaben von Herrn Oskar Werner, Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.	III.	344
XLVII.	Aufgaben von Demselben.	IV.	453
XLVII.	Aufgaben von dem Herrn Dr. J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	IV.	454

Literarische Berichte*).

XXXIII.	. . . .	I.	485
XXXIV.	. . . .	II.	493
XXXV.	. . . .	III.	509
XXXVI.	. . . .	IV.	525

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Ein paar goniometrische Sätze.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Es scheint bisher noch nicht bemerkt worden zu sein, dass es Reihen von der Form

$$A_0 \cos^n x \cos nx + A_1 \cos^{n-1} x \cos(n-1)x + A_2 \cos^{n-2} x \cos(n-2)x + ..$$
$$.. + A_{n-1} \cos x \cos x,$$

$$B_0 \cos^n x \sin nx + B_1 \cos^{n-1} x \sin(n-1)x + B_2 \cos^{n-2} x \sin(n-2)x + ..$$
$$.. + B_{n-1} \cos x \sin x$$

giebt, deren Summen sehr einfach durch eine Potenz des Cosinus ausgedrückt werden können, und daher möge hier ein kleiner Beitrag zu einer Untersuchung darüber folgen.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich die Binomialkoeffizienten des Exponenten m mit $m_0, m_1, m_2, .. m_m$, so ist nach dieser Bezeichnung

$$\frac{n}{1} = n_1, \quad \frac{n(n+1)}{1.2} = (n+1)_2, \quad \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} = (n+2)_3, \ldots.$$

Es sei nun die folgende Reihe zu summiren:

$$(2\cos x)^n \cos nx + n_1 (2\cos x)^{n-1} \cos(n-1)x$$
$$+ (n+1)_2 (2\cos x)^{n-2} \cos(n-2)x + \ldots + (2n-2)_{n-1} (2\cos x) \cos x.$$

Der erste Schritt zur Lösung dieser Aufgabe besteht darin, dass wir die Reihe selbst in eine andere transformiren, welche keine Cosinuspotenzen mehr enthält. Diess geschieht leicht mittelst des bekannten Satzes

$$\left(2\cos\frac{z}{2}\right)^m \cos\frac{m}{2}z = m_0 + m_1 \cos z + m_2 \cos 2z + .. + m_m \cos mz,$$

Digitized by Google

aus welchem für $z=2x$ bei umgekehrter Anordnung der Reihenglieder und unter der Bemerkung, dass $m_m=m_0$, $m_{m-1}=m_1$, $m_{m-2}=m_2$ etc., leicht der folgende entspringt:

$$(2\cos x)^m \cos mx =$$
$$m_0 \cos 2mx + m_1 \cos(2m-2)x + m_2 \cos(2m-4)x + \ldots + m_{m-1}\cos 2x + m_m.$$

Wenden wir diese Formel in jedem Gliede unserer zu summirenden Reihe für $m=n$, $n-1$, $n-2$, ... 1 an, und bezeichnen zur Abkürzung

$$\cos 2nx,\ \cos(2n-2)x,\ \cos(2n-4)x,\ \ldots \cos 2x$$

mit

$$y_0 \quad , \quad y_1 \quad , \quad y_2 \quad , \ldots y_{n-1};$$

so geht die fragliche Reihe in die folgende über:

$$\begin{aligned}
&n_0 y_0 + n_1 y_1 + n_2 y_2 + \ldots + n_{n-1} y_{n-1} + n_n \\
&+ n_1 \{(n-1)_0 y_1 + (n-1)_1 y_2 + \ldots + (n-1)_{n-2} y_{n-1} + (n-1)_{n-1}\} \\
&+ (n+1)_2 \{(n-2)_0 y_2 + \ldots + (n-2)_{n-3} y_{n-1} + (n-2)_{n-2}\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + (2n-2)_{n-1}\{1_1 y_{n-1} + 1_0\},
\end{aligned}$$

die im Allgemeinen von folgender Form ist:

$$\left.\begin{aligned}
y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} \\
+ 1 + n_1 + (n+1)_2 + (n+2)_3 + \ldots + (2n-2)_{n-1}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

wenn wir nämlich

$$\begin{aligned}
C_1 &= n_1 + n_1 (n-1)_0, \\
C_2 &= n_2 + n_1 (n-1)_1 + (n+1)_2 (n-1)_0, \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und überhaupt für ein ganzes positives k

$$\left.\begin{aligned}
C_k = n_k + n_1 (n-1)_{k-1} + (n+1)_2 (n-2)_{k-2} + \ldots \\
\ldots + (n+k-2)_{k-1} (n-k+1)_1 + (n+k-1)_k (n-k)_0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

setzen. Die vorstehende $(k+1)$gliedrige Reihe lässt sich aber sehr leicht summiren, wenn man sich an die ganz allgemeine Formel

$$(\alpha+\beta)_k = \alpha_k + \alpha_{k-1}\beta_1 + \alpha_{k-2}\beta_2 + \ldots + \alpha_1 \beta_{k-1} + \beta_k$$

erinnert. Nimmt man nämlich α und β negativ und berücksichtigt die Regel

$$(-\gamma)_n = (-1)^n \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2.3\ldots n} = (-1)^n (\gamma+n-1)_n,$$

so ergiebt sich sehr leicht

Digitized by Google

$$(\alpha+\beta+k-1)_k=$$
$$(\alpha+k-1)_k+(\alpha+k-2)_{k-1}\beta_1+(\alpha+k-3)_{k-2}(\beta+1)_2+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_1(\beta+k-2)_{k-1}+(\beta+k-1)_k.$$

Setzt man hier $\alpha+k-1=n$, $\beta=n$, so erscheint auf der rechten Seite die in No. (3) vorkommende Reihe, woraus jetzt

$$C_k=(2n)_k \qquad (4)$$

folgt. Wir haben nun noch die zweite in No. (2) stehende Reihe zu summiren. Nehmen wir aber in (3) und (4) $k=n$, so wird

$$1+n_1+(n+1)_2+\ldots+(2n-2)_{n-1}+(2n-1)_n=(2n)_n,$$

folglich die zu summirende Reihe

$$1+n_1+(n+1)_2+(n+2)_3+\ldots+(2n-2)_{n-1}=(2n)_n-(2n-1)_n;$$

d. i. vermöge der Werthe von beiden Koeffizienten

$$=\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)(n+1)}{1.2\ldots n}-\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)n}{1.2\ldots n}$$
$$=\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}\{2n-n\}$$
$$=\tfrac{1}{2}.\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}=\tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

Substituiren wir dieses Resultat nebst Dem, was aus No. (4) für $k=1, 2, \ldots (n-1)$ folgt, in No. (2) und restituiren die Werthe von $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$, so ergiebt sich, dass die zu summirende Reihe gleich der folgenden ist:

$$\cos 2nx+(2n)_1\cos(2n-2)x+(2n)_2\cos(2n-4)x+\ldots$$
$$\ldots+(2n)_{n-1}\cos 2x+\tfrac{1}{2}(2n)_n.$$

Als Summe dieser letzteren ist aber $2^{2n-1}\cos^{2n}x$ bekannt, und daher gelangen wir zu der bemerkenswerthen Relation:

$$\left.\begin{array}{l}2^{2n-1}\cos^{2n}x=(2\cos x)^n\cos nx+n_1(2\cos x)^{n-1}\cos(n-1)x\\ +(n+1)_2(2\cos x)^{n-2}\cos(n-2)x+\ldots+(2n-2)_{n-1}(2\cos x)\cos x\end{array}\right\}\quad(5)$$

oder auch nach Division mit $(2\cos x)^n$:

$$\left.\begin{array}{l}2^{n-1}\cos^n x=\cos nx+n_1\dfrac{\cos(n-1)x}{2\cos x}+(n+1)_2\dfrac{\cos(n-2)x}{(2\cos x)^2}+\ldots\\ \qquad\ldots+(2n-2)_{n-1}\dfrac{\cos x}{(2\cos x)^{n-1}}.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Durch einen völlig analogen Calcül könnte man noch ein zweites Theorem ableiten, worin die Sinus der Vielfachen von x den Cosinus in (5) und (6) entsprechen; man gelangt aber schneller dazu,

Digitized by Google

wenn man die Gleichung (5) differenziirt. Auf der rechten Seite hat man dann lauter Grössen von der Form

$$(2\cos x)^p \cos px$$

zu differenziiren, für welche man erhält:

$$\frac{\partial(2\cos x)^p \cos px}{\partial x} = 2^p \left\{ \cos^p x \frac{\partial \cos px}{\partial x} + \cos px \frac{\partial \cos^p x}{\partial x} \right\}$$
$$= -2^p \{ \cos^p x \,.\, p \sin px + \cos px \,.\, p \cos^{p-1} x \sin x \}$$
$$= -p 2^p \cos^{p-1} x \{ \cos x \sin px + \cos px \sin x \}$$
$$= -2p\,(2\cos x)^{p-1} \sin(p+1)x.$$

Unter Anwendung dieser Formel ergiebt sich jetzt aus (5) für $p = n,\ n-1,\ \ldots 1$:

$$2^{2n-1} 2n \cos^{2n-1} x \sin x =$$
$$2n(2\cos x)^{n-1} \sin(n+1)x + (2n-2)n_1 (2\cos x)^{n-2} \sin nx + \ldots$$
$$\ldots + 2(2n-2)_{n-1} \sin 2x,$$

oder durch Multiplikation mit $(2\cos x)^n$ und nachherige Vertauschung von n mit $n-1$:

$$\left.\begin{array}{c} (n-1)(2\cos x)^{2n-1} \sin x = \\ (n-1)(2\cos x)^n \sin nx + (n-2)(n-1)_1 (2\cos x)^{n-1} \sin(n-1)x \\ +(n-3)n_2 (2\cos x)^{n-2} \sin(n-2)x + \ldots + 1\,.\,(2n-4)_{n-2} \sin 2x \end{array}\right\} \quad (7)$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} (n-1)(2\cos x)^{n-1} \sin x \\ =(n-1)\sin nx + (n-1)_1 \dfrac{(n-2)\sin(n-1)x}{2\cos x} + n_2 \dfrac{(n-3)\sin(n-2)x}{(2\cos x)^2} + \ldots \\ \ldots + (2n-4)_{n-2} \dfrac{1\,.\sin 2x}{(2\cos x)^n} \end{array}\right\} \quad (8)$$

und diess sind ein paar Formeln, welche der in (5) und (6) entwickelten entsprechen.

Digitized by Google

II.

Bemerkung zur Theorie des Integrallogarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Bezeichnen wir die numerische Constante 0,5772156.. zur Abkürzung mit C, so ist bekanntlich für alle u von $u=0$ bis $u=\infty$

$$li(e^{-u}) = C + lu - \frac{1}{1}\,\frac{u}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\,\frac{u^3}{1.2.3} + \frac{1}{4}\,\frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

Multipliziren wir diese Gleichung mit $e^{-u}\partial u$ und integriren darauf zwischen den Gränzen $u=0$, $u=\infty$, so wird

$$\int_0^\infty e^{-u}\, li(e^{-u})\,\partial u = C\int_0^\infty e^{-u}\,\partial u + \int_0^\infty lu\, e^{-u}\,\partial u$$
$$- \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1}\,\frac{u}{1} - \frac{1}{2}\,\frac{u^2}{1.2} + \frac{1}{3}\,\frac{u^3}{1.2.3} - \ldots \right\} e^{-u}\partial u.$$

Wenden wir hier, so weit es geht, die bekannten Formeln

$$\int_0^\infty e^{-u}\,\partial u = 1, \quad \int_0^\infty u^n e^{-u}\partial u = 1.2.3..n$$

an, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty e^{-u}\, li(e^{-u})\partial u = C + \int_0^\infty lu e^{-u}\,\partial u - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots,$$

d. i. wegen der Summe der Reihe rechts nach einer kleinen Transposition:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty lue^{-u}\partial u = -C + l2 + \int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u. \quad (1)$$

Um den Werth des Integrales rechts zu finden, benutzen wir die Formel *)

$$li(e^{-u}) = -e^{-u}\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x} e^{-ux},$$

mit Hülfe deren wir erhalten:

$$\int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u = -\int_0^\infty e^{-2u}\,\partial u \int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x} e^{-ux}. \quad (2)$$

Durch Umkehrung der Integrationsfolge wird das Doppelintegral rechts

$$= -\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x}\int_0^\infty e^{-(2+x)u}\partial u = -\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x}\cdot\frac{1}{2+x}.$$

Nun ist aber bei unbestimmter Integration

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)(2+x)} = l(1+x) - l(2+x) + \text{Const}$$

$$= l\left(\frac{1+x}{2+x}\right) + \text{Const},$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{\partial x}{(1+x)(2+x)} = l(1) - l(\tfrac{1}{2}) = l2,$$

folglich nach Nr. (2)

$$\int_0^\infty e^{-u} li(e^{-u})\,\partial u = -l2.$$

Die Gleichung (1) nimmt jetzt, wenn man x für u schreibt, die einfache Gestalt an:

$$\int_0^\infty lx\,e^{-x}\,\partial x = -C. \quad (3)$$

Auf das vorstehende Integral lässt sich auch noch das folgende

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}$$

reduziren. Bei unbestimmter Integration ist nämlich

---

*) Archiv. Theil V. S. 206. Formel (9).

Digitized by Google

$$\int\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=\int\frac{\partial x}{x(1+x)}-\int\frac{\partial x}{x}e^{-x}$$
$$=lx-l(1+x)-\{e^{-x}\int\frac{\partial x}{x}+\int e^{-x}\partial x\int\frac{\partial x}{x}\}$$
$$=lx-l(1+x)-e^{-x}lx-\int e^{-x}\partial x\,lx,$$

was sich auch in folgenden beiden Formen darstellen lässt:

$$\int\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=l\left(\frac{x}{1+x}\right)-lx\,e^{-x}-\int lx\,e^{-x}\,\partial x$$
$$=(1-e^{-x})\,lx-l\,(1+x)-\int lx e^{-x}\partial x.$$

Der ersteren bedienen wir uns für unbegränzt wachsende, der zweiten für unbegränzt abnehmende x. Für den ersten Fall haben wir

$$\operatorname{Lim} l\left(\frac{x}{1+x}\right)=l(1)=0,$$
$$\operatorname{Lim}\,(lxe^{-x})=\operatorname{Lim}\frac{lx}{1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots}=0,$$

weil schon $\operatorname{Lim}\frac{lx}{x}=0$ und hier der Nenner $>x$ ist; ferner noch

$$\operatorname{Lim}\int lx\,e^{-x}\,\partial x=\int_0^\infty lx\,e^{-x}\,\partial x.$$

Für bis zur Null abnehmende x ist dagegen vermöge der zweiten Form

$$\operatorname{Lim}[\,(1-e^{-x})\,lx]-\operatorname{Lim}[(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{1.2}+\ldots)\,lx]=0,$$

weil bekanntlich für jedes positive $\mu>0$ $\operatorname{Lim}x^\mu lx=0$ ist; ferner

$$\operatorname{Lim} l(1+x)=l(1)=0,$$
$$\operatorname{Lim}\int lx\,e^{-x}\partial x=\int_0^\infty lxe^{-x}\partial x.$$

Wir haben demnach vermöge der Gleichung (4)

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{\partial x}{x}=-\int_0^\infty lxe^{-x}\,\partial x=C.$$

Diese Gleichung kann unmittelbar dienen, um die Formel *)

---

*) Archiv. Theil II. Seite 313. Formel (7).

Digitized by Google

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=\int_0^x \left\{e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x}$$

$$=-\int_0^x \left\{\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right\}\frac{\partial x}{x}+\int_0^x \left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x}$$

in die folgende überzuführen:

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=-C+\int_0^x \left\{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^a}\right\}\frac{\partial x}{x},$$

die sich für $\frac{1}{1+x}=y$ wieder in

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=-C+\int_0^1 \frac{1-y^{a-1}}{1-y}\partial y$$

verwandelt.

III.

Ueber sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Das berühmte Theorem von Legendre über sphärische Dreiecke, deren Seiten im Verhältniss zu dem Halbmesser der Kugel, auf welcher sie liegen, sehr klein sind, ist allgemein bekannt, und man hat für dasselbe verschiedene Beweise gegeben, unter denen sich der im ersten Theile des Archivs. S. 436. mitgetheilte Beweis von Gauss durch seine Eleganz vorzüglich auszeichnet, und wegen seiner elementaren Form zur Aufnahme in die Elemente der Trigonometrie ganz besonders geeignet ist. Da aber dieses Theorem, welches eigentlich nur die beiden ersten Glieder der unendlichen Reihen, in die sich die Winkel des sphärischen Dreiecks nach den Potenzen des Excesses entwickeln las-

Digitized by Google

sen, berücksichtigt, für die Geodäsie von so grosser Wichtigkeit ist, so scheint mir eine weitere Entwickelung desselben, d. h. die Entwickelung noch einiger Glieder der betreffenden unendlichen Reihen, wünschenswerth zu sein. Einen Versuch dieser Art hat schon Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger. Sechster Band. Tübingen. 1818. S. 264. gemacht. Sein Aufsatz scheint aber nicht so bekannt geworden zu sein, wie er es verdient, da ich auch in den grösseren Werken über Geodäsie denselben nie berücksichtigt gefunden habe. Weil nun ausserdem die von ihm angewandte ganz elementare Methode, wie es mir scheint, Manches zu wünschen übrig, namentlich gar nicht erkennen lässt, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn man die Entwickelung der Reihen noch weiter treiben wollte, so scheint mir eine neue Bearbeitung dieses wichtigen und interessanten Gegenstandes Bedürfniss zu sein, welche ich in der vorliegenden Abhandlung zu geben versuchen werde. Die von mir in derselben entwickelten Formeln sind freilich nur recurrirende, gestatten aber, wie man hoffentlich finden wird, einen leichten Fortschritt von einem Gliede zu dem nächst folgenden, wodurch es mir auch möglich geworden ist, die Entwickelung ohne grosse Schwierigkeit noch weiter zu treiben als Buzengeiger. Die Kenntniss der hier obwaltenden independenten Gesetze würde natürlich in theoretischer Rücksicht von grossem Interesse sein, ist jedoch für die praktische Anwendung von geringer Bedeutung, weil die für dieselbe so wichtige und unerlässliche Einfachheit in den höheren Gliedern sehr bald gänzlich verloren geht. Vielleicht lasse ich aber späterhin der vorliegenden, vorzugsweise die praktische Anwendung des Satzes im Auge habenden Abhandlung eine zweite von mehr rein theoretischer Natur folgen, oder gebe durch den vorliegenden Aufsatz einem der geehrten Leser des Archivs zu eignen Forschungen über diesen der Beachtung jedenfalls sehr werthen Gegenstand Veranlassung.

§. 2.

Die Seiten und Winkel des sphärischen Dreiecks wollen wir wie gewöhnlich durch a, b, c und A, B, C, den reciproken Werth des Halbmessers der Kugel, auf welcher dasselbe liegt, aber durch x bezeichnen. Dann werden durch ax, bx, cx die Verhältnisse der Seiten des sphärischen Dreiecks zu dem Halbmesser der Kugel, oder eigentlich die Factoren dargestellt, mit denen man den Halbmesser der Kugel multipliciren müsste, um aus demselben die Seiten des Dreiecks zu erhalten; und nach den Principien der sphärischen Trigonometrie haben wir also die Gleichung

$$1)\quad \cos A = \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx},$$

wobei man immer festzuhalten hat, dass, wie es die Natur des vorliegenden Gegenstandes erfordert, die Seiten a, b, c in einem bestimmten Längenmaasse ausgedrückt angenommen werden. Weil aber bekanntlich

$$2\cos bx\cos cx=\cos(b-c)x+\cos(b+c)x,$$
$$2\sin bx\sin cx=\cos(b-c)x-\cos(b+c)x$$

ist, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auch unter der For[m]

$$2)\quad \cos A=\frac{2\cos ax-\cos(b-c)x-\cos(b+c)x}{\cos(b-c)x-\cos(b+c)x}$$

oder unter der Form

$$3)\quad \{\cos(b-c)x-\cos(b+c)x\}\cos A$$
$$=2\cos ax-\cos(b-c)x-\cos(b+c)x$$

darstellen.

Setzen wir der Kürze wegen allgemein

$$4)\quad \begin{cases} \overset{n}{K}_x=(b-c)^n\cos(b-c)x-(b+c)^n\cos(b+c)x, \\ \overset{n}{S}_x=(b-c)^n\sin(b-c)x-(b+c)^n\sin(b+c)x \end{cases}$$

und

$$5)\quad \begin{cases} \overset{n}{\mathfrak{K}}_x=2a^n\cos ax-(b-c)^n\cos(b-c)x-(b+c)^n\cos(b+c)x, \\ \overset{n}{\mathfrak{S}}_x=2a^n\sin ax-(b-c)^n\sin(b-c)x-(b+c)^n\sin(b+c)x; \end{cases}$$

so ist, wie man leicht durch Differentiation nach der Veränderlichen x findet:

$$\frac{\partial\overset{n}{K}_x}{\partial x}=-(b-c)^{n+1}\sin(b-c)x+(b+c)^{n+1}\sin(b+c)x,$$

$$\frac{\partial\overset{n}{S}_x}{\partial x}=\quad(b-c)^{n+1}\cos(b-c)x-(b+c)^{n+1}\cos(b+c)x$$

und

$$\frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x}=-2a^{n+1}\sin ax+(b-c)^{n+1}\sin(b-c)x+(b+c)^{n+1}\sin(b+c)x,$$

$$\frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x}=\quad 2a^{n+1}\cos ax-(b-c)^{n+1}\cos(b-c)x-(b+c)^{n+1}\cos(b+c)x;$$

also nach 4) und 5):

$$6)\quad \frac{\partial\overset{n}{K}_x}{\partial x}=-\overset{n+1}{S}_x,\ \frac{\partial\overset{n}{S}_x}{\partial x}=\overset{n+1}{K}_x$$

und

$$7)\quad \frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x}=-\overset{n+1}{\mathfrak{S}}_x,\ \frac{\partial\overset{n}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x}=\overset{n+1}{\mathfrak{K}}_x.$$

Digitized by Google

Weil nun nach 3), 4), 5)

$$8)\quad \overset{0}{K}_x \cos A = \overset{0}{\mathfrak{K}}_x$$

ist, so ist unter Anwendung der bekannten Bezeichnung der Binomialcoefficienten nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$9)\quad \left.\begin{array}{l} \overset{0}{K}_x \dfrac{\partial^n \cos A}{\partial x^n} \\ + n_1 \dfrac{\partial \overset{0}{K}_x}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial^{n-1} \cos A}{\partial x^{n-1}} \\ + n_2 \dfrac{\partial^2 \overset{0}{K}_x}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^{n-2} \cos A}{\partial x^{n-2}} \\ \quad \text{u. s. w.} \\ + n_{n-1} \dfrac{\partial^{n-1} \overset{0}{K}_x}{\partial x^{n-1}} \cdot \dfrac{\partial \cos A}{\partial x} \\ + n_n \dfrac{\partial^n \overset{0}{K}_x}{\partial x^n} \cos A \end{array}\right\} = \frac{\partial^n \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^n}.$$

Nach 6) und 7) ist aber

$$\frac{\partial \overset{0}{K}_x}{\partial x} = -\overset{1}{S}_x,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{0}{K}_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial \overset{1}{S}_x}{\partial x} = -\overset{2}{K}_x,$$

$$\frac{\partial^3 \overset{0}{K}_x}{\partial x^3} = -\frac{\partial \overset{2}{K}_x}{\partial x} = \overset{3}{S}_x,$$

$$\frac{\partial^4 \overset{0}{K}_x}{\partial x^4} = \frac{\partial \overset{3}{S}_x}{\partial x} = \overset{4}{K}_x,$$

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{K}_x}{\partial x^5} = \frac{\partial \overset{4}{K}_x}{\partial x} = -\overset{5}{S}_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{K}_x}{\partial x^6} = -\frac{\partial \overset{5}{S}_x}{\partial x} = -\overset{6}{K}_x$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = -\overset{1}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial \overset{1}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = -\overset{2}{\mathfrak{K}}_x,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^3 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^3} = -\frac{\partial \overset{2}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = \overset{3}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\frac{\partial^4 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^4} = \frac{\partial \overset{3}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = \overset{4}{\mathfrak{K}}_x.$$

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^5} = \frac{\partial \overset{4}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x} = -\overset{5}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{\mathfrak{K}}_x}{\partial x^6} = -\frac{\partial \overset{5}{\mathfrak{S}}_x}{\partial x} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}_x,$$

u. s. w.

und wir haben daher nach 9) zur Bestimmung der Grössen

$$\cos A,\ \frac{\partial \cos A}{\partial x},\ \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3},\ \ldots.$$

die folgenden recurrirenden Gleichungen:

10)

$$\overset{0}{K}_x \cos A = \overset{0}{\mathfrak{K}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} - 1_1 . \overset{1}{S}_x \cos A = -\overset{1}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} - 2_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} - 2_2 . \overset{2}{K}_x \cos A = -\overset{2}{\mathfrak{K}}_x,$$

$$\overset{0}{K}_x \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} - 3_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} - 3_2 . \overset{2}{K}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} + 3_3 . \overset{3}{S}_x \cos A = \overset{3}{\mathfrak{S}}_x,$$

$$\left.\begin{array}{r} \overset{0}{K}_x \frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4} - 4_1 . \overset{1}{S}_x \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} - 4_2 . \overset{2}{K}_x \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} + 4_3 . \overset{3}{S}_x \frac{\partial \cos A}{\partial x} \\ + 4_4 . \overset{4}{K}_x \cos A \end{array}\right\} = \overset{4}{\mathfrak{K}}_x,$$

u. s. w.

Eine independente Bestimmung von $\frac{\partial^n \cos A}{\partial x^n}$ scheint mir wünschenswerth, gehört aber jetzt nicht zu meinem Zwecke, und dürfte vielleicht auf einem von dem vorhergehenden verschiedenen Wege noch besser zu erlangen sein. Weitere Untersuchungen hierüber einer späteren Abhandlung vorbehaltend, will ich für jetzt nur in der Kürze beiläufig bemerken, dass man, wenn man die Gleichung

$$\cos A = \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin bx \sin cx}$$

unmittelbar, ohne die Transformation 2) auf dieselbe anzuwenden, nach x differentiirt, Folgendes erhält. Zuerst ergiebt sich leicht

Digitized by Google

$$\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

$$= - \sin bx \sin cx\,(a \sin ax - b \sin bx \cos cx - c \cos bx \sin cx)$$
$$- (\cos ax - \cos bx \cos cx)\,(b \cos bx \sin cx + c \sin bx \cos cx),$$

und folglich nach einigen ganz leichten Transformationen:

$$\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x} = - a \sin ax \sin bx \sin cx$$
$$+ b \sin cx\,(\cos cx - \cos ax \cos bx)$$
$$+ c \sin bx\,(\cos bx - \cos ax \cos cx).$$

Weil nun aber bekanntlich

$$\sin ax \sin cx \cos B = \cos bx - \cos ax \cos cx,$$
$$\sin ax \sin bx \cos C = \cos cx - \cos ax \cos bx$$

ist, so ist

$$\sin bx^2 \sin cx^2 \frac{\partial \cos A}{\partial x} = - a \sin ax \sin bx \sin cx$$
$$+ b \sin ax \sin bx \sin cx \cos C$$
$$+ c \sin ax \sin bx \sin cx \cos B,$$

also

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x} = - \frac{\sin ax\,(a - b \cos C - c \cos B)}{\sin bx \sin cx},$$

welches eine nicht unelegante Formel ist, und es frägt sich daher, ob sich nicht vielleicht auf diesem Wege, wenn man nämlich die Winkel des Dreiecks mit in die Betrachtung hineinzieht, ein einfacheres independentes Gesetz finden liesse, als dies auf dem oben von mir eingeschlagenen Wege möglich zu sein scheint, worüber aber weitere Untersuchungen hier nicht zu meinem Zwecke gehören, weshalb ich nach dieser Abschweifung, die ich jedoch absichtlich nicht unterdrücken wollte, um vielleicht einen oder den anderen zu weiteren Nachforschungen zu veranlassen, jetzt sogleich wieder zu meinem eigentlichen Gegenstande zurückkehre.

Setzt man nämlich in den Gleichungen 10) die Veränderliche $x=0$, so erhält man, weil offenbar $\overset{0}{K}_0=0$, $\overset{0}{\mathfrak{K}}_0=0$ und allgemein $\overset{n}{S}_0=0$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}_0=0$ ist, die folgenden Gleichungen:

$$1_2 . \overset{2}{K}_0(\cos A) = \overset{2}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$3_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right) = 0,$$

$$4_2 . \overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) - 4_4 . \overset{4}{K}_0(\cos A) = - \overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$5_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^3\cos A}{\partial x^3}\right)-5_4.\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial\cos A}{\partial x}\right)=0,$$

$$6_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4\cos A}{\partial x^4}\right)-6_4.\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)+6_6.\overset{6}{K}_0(\cos A)=\overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$7_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^5\cos A}{\partial x^5}\right)-7_4.\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^3\cos A}{\partial x^3}\right)+7_6.\overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial\cos A}{\partial x}\right)=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}8_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^6\cos A}{\partial x^6}\right)-8_4.\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^4\cos A}{\partial x^4}\right)+8_6\,.\overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)\\ -8_8\,.\,\overset{8}{K}(\cos A)\end{array}\right\}=-\overset{8}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$\left.\begin{array}{r}9_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^7\cos A}{\partial x^7}\right)-9_4.\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^5\cos A}{\partial x^5}\right)+9_6.\overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial^3\cos A}{\partial x^3}\right)\\ -9_8.\overset{8}{K}_0\left(\frac{\partial\cos A}{\partial x}\right)\end{array}\right\}=0,$$

u. s. w.

in denen die Werthe, welche die Grössen

$$\cos A,\ \frac{\partial\cos A}{\partial x},\ \frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3\cos A}{\partial x^3},\ \ldots$$

für $x=0$ erhalten, auf gewöhnliche Weise durch Einschliessung in Parenthesen bezeichnet worden sind.

Weil nach dem Obigen

$$\overset{2}{K}_0=(b-c)^2-(b+c)^2=-4\,bc$$

ist, und also nicht verschwindet, so ergiebt sich aus den vorhergehenden Gleichungen auf der Stelle, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial\cos A}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial^3\cos A}{\partial x^3}\right),\left(\frac{\partial^5\cos A}{\partial x^5}\right),\left(\frac{\partial^7\cos A}{\partial x^7}\right),\ldots$$

sämmtlich verschwinden, und zur Bestimmung der Grössen

$$(\cos A),\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right),\left(\frac{\partial^4\cos A}{\partial x^4}\right),\left(\frac{\partial^6\cos A}{\partial x^6}\right),\ldots$$

hat man die folgenden Gleichungen, deren Fortschreitungsgesetz ganz unzweideutig vor Augen liegt:

11)

$$2_2\,.\,\overset{2}{K}_0(\cos A)=\overset{2}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$4_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)-4_4\,.\,\overset{4}{K}_0(\cos A)=-\overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$$

$$6_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4\cos A}{\partial x^4}\right)-6_4\,.\,\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)+6_6\,.\,\overset{6}{K}_0(\cos A)=\overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r} 8_2 . \overset{2}{K}_0 \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) - 8_4 . \overset{4}{K}_0 \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) + 8_6 . \overset{6}{K}_0 \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) \\ - 8_8 . \overset{8}{K}_0 (\cos A) \end{array}\right\} = - \overset{8}{\mathfrak{S}}_0,$$

u. s. w.

oder

12)

$$(\cos A) = \frac{\overset{2}{\mathfrak{S}}_0}{2_2 . \overset{2}{K}_0},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = - \frac{\overset{4}{\mathfrak{S}}_0}{4_2 . \overset{2}{K}_0} + \frac{4_4 . \overset{4}{K}_0}{4_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = \frac{\overset{6}{\mathfrak{S}}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} - \frac{6_6 . \overset{6}{K}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A) + \frac{6_4 . \overset{4}{K}_0}{6_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = & - \frac{\overset{8}{\mathfrak{S}}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} + \frac{8_8 . \overset{8}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} (\cos A) - \frac{8_6 . \overset{6}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) \\ & + \frac{8_4 . \overset{4}{K}_0}{8_2 . \overset{2}{K}_0} \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right), \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Gleichungen wollen wir nun im folgenden Paragraphen zur Bestimmung der Grössen

$$(\cos A), \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right), \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right), \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right), \ldots$$

anwenden.

§. 3.

Bevor wir jedoch dazu übergehen können, ist es nöthig, die folgenden allgemeinen Betrachtungen vorauszuschicken.

Zuerst bemerken wir, dass die Grösse

$$a^{2n+4}(x^2 - y^2) - a^2(x^{2n+4} - y^{2n+4}) - x^2 y^{2n+4} + y^2 x^{2n+4}$$

immer durch die Grösse

$$a^4 - a^2(x^2 + y^2) + x^2 y^2$$

ohne Rest theilbar ist, was auf folgende Art leicht bewiesen werden kann.

Es ist

$$a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}$$
$$= a^{2n+4}x^2-a^2x^{2n+4}-a^{2n+2}x^2y^2+y^2x^{2n+4}$$
$$-a^{2n+4}y^2+a^2y^{2n+4}+a^{2n+2}x^2y^2-x^2y^{2n+4}$$
$$= x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})a^2-x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})y^2$$
$$-y^2(a^{2n+2}-y^{2n+2})a^2+y^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})x^2$$
$$= x^2(a^{2n+2}-x^{2n+2})(a^2-y^2)-y^2(a^{2n+2}-y^{2n+2})(a^2-x^2)$$

und

$$a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2=(a^2-x^2)(a^2-y^2),$$

also

$$\frac{a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}}{a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}$$
$$=x^2\frac{a^{2n+2}-x^{2n+2}}{a^2-x^2}-y^2\frac{a^{2n+2}-y^{2n+2}}{a^2-y^2},$$

also nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$\frac{a^{2n+4}(x^2-y^2)-a^2(x^{2n+4}-y^{2n+4})-x^2y^{2n+4}+y^2x^{2n+4}}{a^4-a^2(x^2+y^2)+x^2y^2}$$
$$= x^2(a^{2n}+a^{2n-2}x^2+a^{2n-4}x^4+\ldots+a^2x^{2n-2}+x^{2n})$$
$$-y^2(a^{2n}+a^{2n-2}y^2+a^{2n-4}y^4+\ldots+a^2y^{2n-2}+y^{2n})$$
$$= a^{2n}(x^2-y^2)+a^{2n-2}(x^4-y^4)+a^{2n-4}(x^6-y^6)+\ldots.$$
$$\ldots.+a^2(x^{2n}-y^{2n})+x^{2n+2}-y^{2n+2},$$

wodurch der Satz bewiesen und zugleich der Quotient gefunden ist.

Weil nun

$$(\cos A)=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0}$$

ist, so ist allgemein

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0\overset{2n}{K}_0-\overset{2}{K}_0\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0}.$$

und folglich nach dem Obigen, wenn man für

$$\overset{2}{K}_0,\ \overset{2n}{K}_0;\ \overset{2}{\mathfrak{K}}_0,\ \overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$

ihre Werthe aus 4) und 5) einführt:

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\{2a^2-(b-c)^2-(b+c)^2\}\{(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\\ -\{(b-c)^2-(b+c)^2\}\{2a^{2n}-(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\end{array}\right\}}{(b-c)^2-(b+c)^2},$$

Digitized by Google

also, wie man nach leichter Entwickelung des Zählers findet:

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=-2\,\frac{\left\{\begin{array}{l}a^{2n}\{(b-c)^2-(b+c)^2\}-a^2\{(b-c)^{2n}-(b+c)^{2n}\}\\ -(b-c)^2(b+c)^{2n}+(b+c)^2(b-c)^{2n}\end{array}\right\}}{(b-c)^2-(b+c)^2},$$

und folglich, wenn man jetzt, indem man vorher

$$x=b-c,\ y=b+c$$

setzt, den obigen Satz anwendet:

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=-\frac{2\{a^4-a^2((b-c)^2+(b+c)^2)+(b-c)^2(b+c)^2}{(b-c)^2-(b+c)^2}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^{2n-4}\\ +((b-c)^4-(b+c)^4)a^{2n-6}\\ +((b-c)^6-(b+c)^6)a^{2n-8}\\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ +((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})a^2\\ +(b-c)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}\end{array}\right\}$$

oder

$$\overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^{2n-4}\\ +((b-c)^4-(b+c)^4)a^{2n-6}\\ +((b-c)^6-(b+c)^6)a^{2n-8}\\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ +((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})a^2\\ +(b-c)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}\end{array}\right\},$$

also, wenn der Kürze wegen

Digitized by Google

$$13)\quad \Sigma_n = ((b-c)^2-(b+c)^2)\,a^{2n-4}$$
$$+((b-c)^4-(b+c)^4)\,a^{2n-6}$$
$$+((b-c)^6-(b+c)^6)\,a^{2n-8}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+((b-c)^{2n-4}-(b+c)^{2n-4})\,a^2$$
$$+(b-c)^{2n-2}-(b+c)^{2n-2}$$

gesetzt wird:

$$14)\quad \overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0$$
$$=\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc}\,\Sigma_n.$$

Bezeichnen wir nun aber die Winkel des ebenen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; so ist nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie:

$$\sin \mathfrak{A}^2 = -\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{4b^2c^2},$$

also

$$\frac{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{2bc} = -2bc\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$15)\quad \overset{2n}{K}_0(\cos A)-\overset{2n}{\mathfrak{K}}_0 = -2bc\,\Sigma_n\sin\mathfrak{A}^2.$$

Nach 12) ist jetzt

$$(\cos A)=\frac{\overset{2}{\mathfrak{K}}_0}{\overset{2}{K}_0}=\frac{2a^2-(b-c)^2-(b+c)^2}{(b-c)^2-(b+c)^2}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d. i. nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie:

$$16)\quad (\cos A)=\cos\mathfrak{A},$$

ein Resultat, dessen Richtigkeit auch ohne die vorhergehende Rechnung sogleich von selbst in die Augen fällt.

Ferner ist nach 11):

$$4_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)=\overset{4}{K}_0(\cos A)-\overset{4}{\mathfrak{K}}_0,$$

d. i. nach 15):

$$6\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^2\cos A}{\partial x^2}\right)=-2bc\,\Sigma_2\sin\mathfrak{A}^2.$$

Es ist aber nach 4) und 13):

Digitized by Google

$$\overset{2}{K}_0=(b-c)^2-(b+c)^2=-4bc,$$
$$\Sigma_2=(b-c)^2-(b+c)^2=-4bc;$$

also

$$17)\quad \left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)=-\tfrac{1}{3}\,bc\sin\mathfrak{A}^2.$$

Auf ähnliche Art ist nach 11):

$$6_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)=15\,\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)-\overset{6}{K}_0(\cos A)+\overset{6}{\mathfrak{K}}_0,$$

also nach 15) und 17):

$$15\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)=-bc(5\overset{4}{K}_0-2\Sigma_3)\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich, weil $\overset{2}{K}_0=-4bc$ ist:

$$60\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)=(5\overset{4}{K}_0-2\,\Sigma_3)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Nun ist aber

$$5\,\overset{4}{K}_0-2\Sigma_3$$
$$=5\{(b-c)^4-(b+c)^4\}-2\{(b-c)^2-(b+c)^2\}a^2-2\{(b-c)^4-(b+c)^4\}$$
$$=3\{(b-c)^4-(b+c)^4\}-2\{(b-c)^2-(b+c)^2\}a^2$$
$$=3\{(b-c)^4-(b+c)^4\}+8a^2bc$$
$$=-24bc(b^2+c^2)+8a^2bc=8bc(a^2-3b^2-3c^2),$$

folglich

$$18)\quad \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)=\tfrac{2}{15}\,bc(a^2-3b^2-3c^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$=-\tfrac{2}{15}\,bc(3b^2+3c^2-a^2)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Eben so ist nach 11):

$$8_2\,.\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$=70\,\overset{4}{K}_0\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)-28\,\overset{6}{K}_0\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)+\overset{8}{K}_0(\cos A)-\overset{8}{\mathfrak{K}}_0,$$

und folglich nach 15), 17) und 18):

$$28\,\overset{2}{K}_0\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$=bc\{\tfrac{28}{3}\overset{4}{K}_0(a^2-3b^2-3c^2)+{}^{26}\overset{6}{K}_0-2\Sigma_4\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

also

Digitized by Google

$$4\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-\{\tfrac{1}{3}\overset{4}{K}_0(a^2-3b^2-3c^2)+\tfrac{1}{5}\overset{6}{K}_0-\tfrac{1}{14}\Sigma_4\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\overset{4}{K}_0(a^2-3b^2-3c^2)+\tfrac{1}{5}\overset{6}{K}_0-\tfrac{1}{14}\Sigma_4\\
=\;&\tfrac{1}{3}(a^2-3b^2-3c^2)\{(b-c)^4-(b+c)^4\}\\
&+\tfrac{1}{5}\{(b-c)^6-(b+c)^6\}\\
&-\tfrac{1}{14}\left\{\begin{array}{l}((b-c)^2-(b+c)^2)a^4\\+((b-c)^4-(b+c)^4)a^2\\+((b-c)^6-(b+c)^6)\end{array}\right\}\\
=\;&\tfrac{11}{42}\{(b-c)^6-(b+c)^6\}-(b^2+c^2)\{(b-c)^4-(b+c)^4\}\\
&+\tfrac{11}{42}\{(b-c)^4-(b+c)^4\}a^2-\tfrac{1}{14}\{(b-c)^2-(b+c)^2\}a^4\\
=\;&bc(\tfrac{34}{7}b^4+\tfrac{116}{21}b^2c^2+\tfrac{34}{7}c^4)-b\tfrac{44}{21}c(b^2+c^2)a^2+\tfrac{2}{7}bca^4,
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen

$$19)\quad \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{14}b^4+\tfrac{29}{21}b^2c^2+\tfrac{17}{14}c^4\\-\tfrac{11}{21}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{14}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

oder

$$20)\quad \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$

$$=-\tfrac{1}{7}bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\-\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Diese Rechnung noch weiter fortzuführen, liegt jetzt nicht in unserer Absicht, da die folgenden Ausdrücke immer weitläufiger werden, und wir haben daher jetzt, nur erst mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung, für $\cos A$ den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
21)\quad \cos A=\;&\cos\mathfrak{A}-\tfrac{1}{6}bc\sin\mathfrak{A}^2x^2\\
&-\tfrac{1}{180}bc(3b^2+3c^2-a^2)\sin\mathfrak{A}^2x^4\\
&-\tfrac{1}{5040}bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{29}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\-\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2x^6,
\end{aligned}$$

wo, wenn r den Halbmesser der Kugel bezeichnet, auf welcher das sphärische Dreieck liegt, nach dem Obigen bekanntlich

$$22)\quad x=\frac{1}{r}$$

ist.

Digitized by Google

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks, dessen Seiten und Winkel a, b, c und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind, durch $\mathfrak{D}$; so ist bekanntlich

$$\mathfrak{D}=\tfrac{1}{2}bc\sin\mathfrak{A},$$

also

$$\mathfrak{D}^2=\tfrac{1}{4}b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich

$$bc\sin\mathfrak{A}^2=\frac{4}{bc}\mathfrak{D}^2.$$

Daher ist auch:

$$23)\quad \begin{aligned}\cos A=\cos\mathfrak{A}&-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^2\\ &-\tfrac{1}{45}(3b^2+3c^2-a^2)\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^4\\ &-\tfrac{1}{1260}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{20}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\frac{\mathfrak{D}^2}{bc}x^6,\end{aligned}$$

mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher.

Auch ist

$$bc\sin\mathfrak{A}^2=2\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A},$$

und folglich nach 21):

$$24)\quad \begin{aligned}\cos A=\cos\mathfrak{A}&-\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2\\ &-\tfrac{1}{90}(3b^2+3c^2-a^2)\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4\\ &-\tfrac{1}{2520}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{20}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\ -\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\mathfrak{D}\sin\mathfrak{A}\,.\,x^6.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$a_1=ax,\ b_1=bx,\ c_1=cx$$

und

$$\mathfrak{D}_1=\tfrac{1}{2}b_1c_1\sin\mathfrak{A};$$

so lässt sich die vorhergehende Gleichung, wie sogleich erhellen wird, auch auf folgende Art ausdrücken:

$$25)\quad \begin{aligned}\cos A=\cos\mathfrak{A}&-\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A}\\ &-\tfrac{1}{90}(3b_1{}^2+3c_1{}^2-a_1{}^2)\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A}\\ &-\tfrac{1}{2520}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b_1{}^4+\tfrac{20}{3}b_1{}^2c_1{}^2+\tfrac{17}{2}c_1{}^4\\ -\tfrac{11}{3}(b_1{}^2+c_1{}^2)a_1{}^2+\tfrac{1}{2}a_1{}^4\end{array}\right\}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A}\end{aligned}$$

oder

Digitized by Google

$$26)\ \cos\mathfrak{A}-\cos A$$
$$=\tfrac{1}{3}\left\{\begin{array}{l}1+\tfrac{1}{30}(3b_1{}^2+3c_1{}^2-a_1{}^2)\\ +\tfrac{1}{840}\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b_1{}^4+\tfrac{20}{3}b_1{}^2c_1{}^2+\tfrac{17}{2}c_1{}^4\\ -\tfrac{11}{3}(b_1{}^2+c_1{}^2)a_1{}^2+\tfrac{1}{2}a_1{}^4\end{array}\right\}\end{array}\right\}\mathfrak{D}_1\sin\mathfrak{A},$$

bei welcher Formel wie früher nur erst Glieder der achten Ordnung vernachlässigt worden sind.

§. 4.

Bezeichnen wir jetzt den halben Excess des gegebenen sphärischen Dreiecks durch E, so ist bekanntlich

$$27)\ \cos E=\frac{1+\cos ax+\cos bx+\cos cx}{4\cos\tfrac{1}{2}ax\cos\tfrac{1}{2}bx\cos\tfrac{1}{2}cx}.$$

Nach einer bekannten goniometrischen Formel ist aber

$$2\cos\tfrac{1}{2}ax\cos\tfrac{1}{2}bx=\cos\tfrac{1}{2}(a+b)x+\cos\tfrac{1}{2}(a-b)x,$$

also

$$4\cos\tfrac{1}{2}ax\cos\tfrac{1}{2}bx\cos\tfrac{1}{2}cx$$
$$=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)x\cos\tfrac{1}{2}cx+2\cos\tfrac{1}{2}(a-b)x\cos\tfrac{1}{2}cx$$
$$=\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x+\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x$$

und folglich

$$28)\ \cos E=$$
$$\frac{1+\cos ax+\cos bx+\cos cx}{\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x+\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x+\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen überhaupt

$$29)\left\{\begin{array}{rl}\overset{n}{K'}_x= & (a+b+c)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\ & +(b+c-a)^n\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\ & +(a+c-b)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\ & +(a+b-c)^n\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x,\\ \overset{n}{S'}_x= & (a+b+c)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\ & +(b+c-a)^n\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\ & +(a+c-b)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\ & +(a+b-c)^n\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)x\end{array}\right.$$

und

$$30)\left\{\begin{array}{l}\overset{n}{\mathfrak{K}'}_x=a^n\cos ax+b^n\cos bx+c^n\cos cx.\\ \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x=a^n\sin ax+b^n\sin bx+c^n\sin cx;\end{array}\right.$$

Digitized by Google

so ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overset{n}{K'}_x}{\partial x}=&-\tfrac{1}{2}(a+b+c)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\&-\tfrac{1}{2}(b+c-a)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\&-\tfrac{1}{2}(a+c-b)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\&-\tfrac{1}{2}(a+b-c)^{n+1}\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overset{n}{S'}_x}{\partial x}=&\ \ \tfrac{1}{2}(a+b+c)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+b+c)x\\&+\tfrac{1}{2}(b+c-a)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(b+c-a)x\\&+\tfrac{1}{2}(a+c-b)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+c-b)x\\&+\tfrac{1}{2}(a+b-c)^{n+1}\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c)x\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{K}'}_x}{\partial x}=-a^{n+1}\sin ax-b^{n+1}\sin bx-c^{n+1}\sin cx,$$

$$\frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x}{\partial x}=\quad a^{n+1}\cos ax+b^{n+1}\cos bx+c^{n+1}\cos cx;$$

also nach 29) und 30):

$$31)\quad \frac{\partial \overset{n}{K'}_x}{\partial x}=-\tfrac{1}{2}\overset{n+1}{S'}_x,\quad \frac{\partial \overset{n}{S'}_x}{\partial x}=\tfrac{1}{2}\overset{n+1}{K'}_x$$

und

$$32)\quad \frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{K}'}_x}{\partial x}=-\overset{n+1}{\mathfrak{S}'}_x,\quad \frac{\partial \overset{n}{\mathfrak{S}'}_x}{\partial x}=\overset{n+1}{\mathfrak{K}'}_x.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$33)\quad \cos E=\frac{1+\overset{0}{\mathfrak{K}'}_x}{\overset{0}{K'}_x}$$

oder

$$34)\quad \overset{0}{K'}_x\cos E=1+\overset{0}{\mathfrak{K}'}_x$$

ist, so ist nach dem schon oben angewandten bekannten Satze der Differentialrechnung:

Digitized by Google

$$35)\quad \left.\begin{aligned} &\overset{0}{K'}_x \frac{\partial^n \cos E}{\partial x^n} \\ &+ n_1 \frac{\partial \overset{0}{K'}_x}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{n-1}\cos E}{\partial x^{n-1}} \\ &+ n_2 \frac{\partial^2 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^{n-2}\cos E}{\partial x^{n-2}} \\ &\quad\text{u. s. w.} \\ &+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \overset{0}{K'}_x}{\partial x^{n-1}}\cdot\frac{\partial \cos E}{\partial x} \\ &+ n_n \frac{\partial^n \overset{0}{K'}_x}{\partial x^n} \cos E \end{aligned}\right\} = \frac{\partial^n \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^n}.$$

Nach 31) und 32) ist aber

$$\frac{\partial \overset{0}{K}_x}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}\overset{1}{S}_x,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^2} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial \overset{1}{S}_x}{\partial x} = -(\tfrac{1}{2})^2.\overset{2}{K'}_x,$$

$$\frac{\partial^3 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^3} = -(\tfrac{1}{2})^2.\frac{\partial \overset{2}{K'}_x}{\partial x} = (\tfrac{1}{2})^3.\overset{3}{S'}_x,$$

$$\frac{\partial^4 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^4} = (\tfrac{1}{2})^3.\frac{\partial \overset{3}{S'}_x}{\partial x} = (\tfrac{1}{2})^4.\overset{4}{K'}_x,$$

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^5} = (\tfrac{1}{2})^4.\frac{\partial \overset{4}{K'}_x}{\partial x} = -(\tfrac{1}{2})^5.\overset{5}{S'}_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{K'}_x}{\partial x^6} = -(\tfrac{1}{2})^5.\frac{\partial \overset{5}{S'}_x}{\partial x} = -(\tfrac{1}{2})^6.\overset{6}{K'}_x$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} = -\overset{1}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\frac{\partial^2 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial \overset{1}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} = -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_x,$$

$$\frac{\partial^3 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^3} = -\frac{\partial \overset{2}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} = \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\frac{\partial^4 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^4} = \frac{\partial \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x,$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^5 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^5} = \quad \frac{\partial \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x} = -\overset{5}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\frac{\partial^6 \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x}{\partial x^6} = -\frac{\partial \overset{5}{\mathfrak{S}}'_x}{\partial x} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}'_x,$$

u. s. w.

und man erhält daher nach 34) und 35) die folgenden Gleichungen:

36)

$$\overset{0}{K}'_x \cos E = 1 + \overset{0}{\mathfrak{K}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} - 1_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \cos E = -\overset{1}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} - 2_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} - 2_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \cos E = -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_x,$$

$$\overset{0}{K}'_x \frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3} - 3_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} - 3_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} + 3_3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \overset{3}{S}'_x \cos E = \overset{3}{\mathfrak{S}}'_x,$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{0}{K}'_x \frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4} - 4_1 \cdot \tfrac{1}{2} \overset{1}{S}'_x \frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3} - 4_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_x \frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2} + 4_3 \cdot (\tfrac{1}{2})^3 \overset{3}{S}'_x \frac{\partial \cos E}{\partial x} \\ \qquad + 4_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_x \cos E \end{array}\right\} = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_x,$$

u. s. w.

Weil nun nach dem Obigen allgemein $\overset{n}{S}'_0 = 0$, $\overset{n}{\mathfrak{S}}'_0 = 0$ ist und offenbar auch E für $x = 0$ verschwindet, so erhalten wir aus dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

$$\overset{0}{K}'_0 = 1 + \overset{0}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) - 2_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 = -\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) - 3_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) - 4_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) + 4_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 = \overset{4}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^5 \cos E}{\partial x^5}\right) - 5_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) + 5_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^6 \cos E}{\partial x^6}\right) - 6_2 \cdot (\tfrac{1}{2})^2 \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right) + 6_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\frac{\partial^2 \cos E}{\partial x^2}\right) \\ \qquad - 6_6 \cdot (\tfrac{1}{2})^6 \overset{6}{K}'_0 \end{array}\right\} = -\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{0}{K}'_0 \left(\frac{\partial^7 \cos E}{\partial x^7}\right) - 7_2 \cdot (\tfrac{1}{2}) \overset{2}{K}'_0 \left(\frac{\partial^5 \cos E}{\partial x^5}\right) + 7_4 \cdot (\tfrac{1}{2})^4 \overset{4}{K}'_0 \left(\frac{\partial^3 \cos E}{\partial x^3}\right) \\ \qquad - 7_6 \cdot (\tfrac{1}{2})^6 \overset{6}{K}'_0 \left(\frac{\partial \cos E}{\partial x}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

u. s. w.

Digitized by Google

aus denen, weil nach dem Obigen $\overset{0}{K}'_0=4$ ist und folglich nicht verschwindet, auf der Stelle erhellet, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial\cos E}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial^3\cos E}{\partial x^3}\right),\left(\frac{\partial^5\cos E}{\partial x^5}\right),\left(\frac{\partial^7\cos E}{\partial x^7}\right),\ldots$$

sämmtlich verschwinden, und zur Bestimmung der Grössen

$$\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right),\ \left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right),\ldots$$

hat man die folgenden Gleichungen:

37)

$$\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)-2_2\,.\,(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0=-\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)-4_2\,.\,(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)+4_4\,.\,(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0=\overset{4}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\left.\begin{matrix}\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)-6_2.(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)+6_4.(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)\\ -6_6\,.\,(\tfrac{1}{2})^6\overset{6}{K}'_0\end{matrix}\right\}=-\overset{6}{\mathfrak{K}}'_0,$$

$$\left.\begin{matrix}\overset{0}{K}'_0\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)-8_2.(\tfrac{1}{2})^2\overset{2}{K}'_0\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)+8_4.(\tfrac{1}{2})^4\overset{4}{K}'_0\left(\frac{\partial^4\cos E}{\partial x^4}\right)\\ -8_6\,.\,(\tfrac{1}{2})^6\overset{6}{K}'_0\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)+8_8\,.\,(\tfrac{1}{2})^8\overset{8}{K}_0\end{matrix}\right\}=\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0,$$

u. s. w.

deren Gesetz ganz deutlich vor Augen liegt.

Die erste dieser Gleichungen giebt:

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=\tfrac{1}{4}\overset{2}{K}'_0-\overset{2}{\mathfrak{K}}'_0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)$$

$$=\tfrac{1}{4}\{(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2\}-(a^2+b^2+c^2),$$

also, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$4\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=(a^2+b^2+c^2)-(a^2+b^2+c^2),$$

d. i.

$$38)\quad\left(\frac{\partial^2\cos E}{\partial x^2}\right)=0.$$

Die zweite der obigen Gleichungen giebt also:

Digitized by Google

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)=\overset{4}{\mathfrak{K}}{}'_0-\tfrac{1}{16}\overset{4}{K}{}'_0,$$

d. i. nach dem Obigen

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)$$

$$=(a^4+b^4+c^4)-\tfrac{1}{16}\{(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(a+c-b)^4+(a+b-c)^4\}.$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$4\left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)$$

$$=(a^4+b^4+c^4)-\tfrac{1}{4}\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$

$$=\tfrac{3}{4}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},$$

also

$$39)\quad \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)=\tfrac{3}{16}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=-4b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2,$$

woraus sich

$$40)\quad \left(\frac{\partial^4 \cos E}{\partial x^4}\right)=-\tfrac{3}{4}b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2$$

ergiebt.

Daher ist nach den obigen Gleichungen:

$$4\left(\frac{\partial^6 \cos E}{\partial x^6}\right)=-\tfrac{15}{16}b^2c^2\overset{2}{K}{}'_0\sin\mathfrak{A}^2+\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}{}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}{}'_0.$$

Aber

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}{}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}{}'_0$$

$$=\tfrac{1}{64}\{(a+b+c)^6+(b+c-a)^6+(a+c-b)^6+(a+b-c)^6\}-(a^6+b^6+c^6).$$

und, wie man leicht findet,

$$\begin{aligned}&(a+b+c)^6+(b+c-a)^6+(a+c-b)^6+(a+b-c)^6\\&\quad=4a^6+60a^4b^2+60a^2b^4+4b^6\\&\qquad+(60a^4+360a^2b^2+60b^4)c^2\\&\qquad\quad+(60a^2+60b^2)c^4\\&\qquad\qquad+4c^6,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{64}\{(a+b+c)^6+(b+c-a)^6+(a+c-b)^6+(a+b-c)^6\}\\&=\tfrac{1}{16}(a^6+15a^4b^2+15a^2b^4+b^6)\\&\quad+\tfrac{1}{16}(15a^4+90a^2b^2+15b^4)c^2\\&\qquad+\tfrac{1}{16}(15a^2+15b^2)c^4\\&\qquad\quad+\tfrac{1}{16}c^6.\end{aligned}$$

Digitized by Google

folglich

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}{}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}{}'_0=-\tfrac{15}{16}(a^6-a^4b^2-a^2b^4+b^6)$$
$$+\tfrac{15}{16}(a^4+6a^2b^2+b^4)c^2$$
$$+\tfrac{15}{16}(a^2+b^2)c^4$$
$$-\tfrac{15}{16}c^6.$$

Dividirt man nun mit

$$a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$
$$=c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4-2a^2b^2+b^4$$

in

$$c^6-(a^2+b^2)c^4$$
$$-(a^4+6a^2b^2+b^4)c^2$$
$$+(a^6-a^4b^2-a^2b^4+b^6)$$

hinein, so erhält man als Quotienten die Grösse

$$a^2+b^2+c^2,$$

und es ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}{}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}{}'_0=-\tfrac{15}{16}(a^2+b^2+c^2)\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\tfrac{1}{64}\overset{6}{K}{}'_0-\overset{6}{\mathfrak{K}}{}'_0=\tfrac{15}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Weil nun

$$\overset{2}{K}{}'_0=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2)$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden

$$4\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)=-\tfrac{45}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2+\tfrac{15}{4}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$=-\tfrac{15}{2}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2,$$

also

$$41)\quad\left(\frac{\partial^6\cos E}{\partial x^6}\right)=-\tfrac{15}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.$$

Also ist nach den obigen Gleichungen:

$$4\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=-\tfrac{105}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\overset{2}{K}{}'_0\sin\mathfrak{A}^2$$
$$+\tfrac{105}{32}b^2c^2\overset{4}{K}{}'_0\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}{}'_0+\overset{8}{\mathfrak{K}}{}'_0.$$

Aber

$$\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}{}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}{}'_0$$
$$=\tfrac{1}{256}\{(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8\}-(a^8+b^8+c^8).$$

Digitized by Google

und, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8\\ =4a^8+112a^6b^2+280a^4b^4+112a^2b^6+4b^8\\ +(112a^6+1680a^4b^2+1680a^2b^4+112b^6)c^2\\ +(280a^4+1680a^2b^2+280b^4)c^4\\ +(112a^2+112b^2)c^6\\ +4c^8,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\{(a+b+c)^8+(b+c-a)^8+(a+c-b)^8+(a+b-c)^8\}\\ =\tfrac{1}{64}(a^8+28a^6b^2+70a^4b^4+28a^2b^6+b^8)\\ +\tfrac{1}{64}(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2\\ +\tfrac{1}{64}(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4\\ +\tfrac{1}{64}(28a^2+28b^2)c^6\\ +\tfrac{1}{64}c^8,\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0\\ =-\tfrac{1}{64}(63a^8-28a^6b^2-70a^4b^4-28a^2b^6+63b^8)\\ +\tfrac{1}{64}(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2\\ +\tfrac{1}{64}(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4\\ +\tfrac{1}{64}(28a^2+28b^2)c^6\\ -\tfrac{63}{64}c^8.\end{aligned}$$

Dividirt man nun mit

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\ =c^4-2(a^2+b^2)c^2+a^4-2a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}63c^8-(28a^2+28b^2)c^6\\ -(70a^4+420a^2b^2+70b^4)c^4\\ -(28a^6+420a^4b^2+420a^2b^4+28b^6)c^2\\ +(63a^8-28a^6b^2-70a^4b^4-28a^2b^6+63b^8)\end{aligned}$$

hinein, so erhält man als Quotienten die Grösse

$$\begin{aligned}63c^4+98(a^2+b^2)c^2+63a^4+98a^2b^2+63b^4\\ =63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),\end{aligned}$$

und es ist folglich

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{256}\overset{8}{K}'_0-\overset{8}{\mathfrak{K}}'_0\\ =-\tfrac{1}{64}\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\\ \times\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\},\end{aligned}$$

Digitized by Google

d. i. nach dem Obigen

$$\tfrac{1}{256}\overset{8}{K'}_0-\overset{8}{\mathfrak{K}'}_0$$
$$=\tfrac{1}{16}b^2c^2\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Weil nun

$$\overset{2}{K'}_0=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2+(a+b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2).$$
$$\overset{4}{K'}_0=(a+b+c)^4+(b+c-a)^4+(a+c-b)^4+(a+b-c)^4$$
$$=4\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=-\tfrac{105}{8}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^2\sin\mathfrak{A}^2$$
$$+\tfrac{105}{32}b^2c^2\{a^4+b^4+c^4+6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{64}b^2c^2\{63(a^4+b^4+c^4)+98(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

also

$$42)\quad\left(\frac{\partial^8\cos E}{\partial x^8}\right)=-\tfrac{7}{64}b^2c^2\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.$$

Daher ist

$$43)\quad\cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{32}b^2c^2\sin\mathfrak{A}^2.x^4$$
$$-\tfrac{1}{384}b^2c^2(a^2+b^2+c^2)\sin\mathfrak{A}^2.x^6$$
$$-\tfrac{1}{368640}b^2c^2\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\sin\mathfrak{A}^2.x^8,$$

wobei nur erst Glieder der zehnten Ordnung vernachlässigt sind.

Führt man die aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannte Grösse $\mathfrak{D}$ ein, so wird

$$44)\quad\cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$-\tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$-\tfrac{1}{92160}\{99(a^4+b^4+c^4)+74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\mathfrak{D}^2x^8$$

Führt man die Grössen $a_1=ax$, $b_1=bx$, $c_1=cx$ ein, so wird

$$45)\quad\cos E=$$
$$1-\tfrac{1}{32}b_1{}^2c_1{}^2\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{384}b_1{}^2c_1{}^2(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{368640}b_1{}^2c_1{}^2\{99(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4)+74(a_1{}^2b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2)\}\sin\mathfrak{A}^2$$

und, wenn man wieder

$$\mathfrak{D}_1=\tfrac{1}{2}b_1c_1\sin\mathfrak{A}$$

setzt:

Digitized by Google

$$46)\quad \cos E =$$

$$1 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}_1^2$$
$$- \tfrac{1}{96}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)\mathfrak{D}_1^2$$
$$- \tfrac{1}{92160}\{99(a_1^4 + b_1^4 + c_1^4) + 74(a_1^2 b_1^2 + b_1^2 c_1^2 + c_1^2 a_1^2)\}\mathfrak{D}_1^2.$$

§. 5.

Weil

$$47)\quad \frac{\partial . \cos A^2}{\partial x} = 2\cos A \frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

oder

$$48)\quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial . \cos A^2}{\partial x} = \cos A \frac{\partial \cos A}{\partial x}$$

ist, so ist nach dem schon in dem vorhergehenden Paragraphen angewandten bekannten Satze aus der Differentialrechnung allgemein:

$$49)\quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial^{n+1} . \cos A^2}{\partial x^{n+1}} = \cos A \frac{\partial^{n+1} \cos A}{\partial x^{n+1}}$$
$$+ n_1 \frac{\partial \cos A}{\partial x} . \frac{\partial^n \cos A}{\partial x^n}$$
$$+ n_2 \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} \cos A}{\partial x^{n-1}}$$
$$\text{u. s. w.}$$
$$+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \cos A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}$$
$$+ n_n \frac{\partial^n \cos A}{\partial x^n} . \frac{\partial \cos A}{\partial x}.$$

Setzt man nun hierin für n eine gerade Zahl, so erhellet auf der Stelle, dass, so wie nach §. 2. die Grössen

$$\left(\frac{\partial \cos A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \cos A}{\partial x^7}\right), \ldots.$$

sämmtlich verschwinden, auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \cos A^2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 . \cos A^2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 . \cos A^2}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 . \cos A^2}{\partial x^7}\right), \ldots.$$

sämmtlich verschwinden. Weil aber

$$\cos A^2 + \sin A^2 = 1,$$

und folglich

$$\frac{\partial^n . \cos A^2}{\partial x^n} + \frac{\partial^n . \sin A^2}{\partial x^n} = 0$$

Digitized by Google

ist, so verschwinden offenbar auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \sin A^2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 . \sin A^2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 . \sin A^2}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 . \sin A^2}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich, und da nun ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$50) \quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial \sin A^2}{\partial x} = \sin A \frac{\partial \sin A}{\partial x},$$

also allgemein

$$51) \quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial^{n+1} . \sin A^2}{\partial x^{n+1}} = \sin A \frac{\partial^{n+1} \sin A}{\partial x^{n+1}}$$
$$+ n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n}$$
$$+ n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}$$
$$+ n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial \sin A}{\partial x}$$

ist, so erhellet, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial \sin A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \sin A}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich verschwinden.

Weil endlich

$$52) \quad \frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\sin A \frac{\partial A}{\partial x},$$

und folglich allgemein

$$53) \quad \frac{\partial^{n+1} \cos A}{\partial x^{n+1}} = -\sin A \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}$$
$$- n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n A}{\partial x^n}$$
$$- n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$- n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$
$$- n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial A}{\partial x}$$

Digitized by Google

ist, so erhellet auch, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n=0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right),\ \left(\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\right),\ \left(\frac{\partial^7 A}{\partial x^7}\right),\ \ldots$$

sämmtlich verschwinden.

Weil nun

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x}=-\sin A\frac{\partial A}{\partial x},\quad \frac{\partial \sin A}{\partial x}=\cos A\frac{\partial A}{\partial x}$$

ist, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}=-\sin A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}=-\sin A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&-3\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&-3\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&-\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}=-\sin A\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}&-5\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\\&-10\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\\&-10\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&-5\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&-\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}=\cos A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}=\cos A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&+3\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\&+3\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\&+\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

Digitized by Google

ist, so verschwinden offenbar auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \sin A^2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 . \sin A^2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 . \sin A^2}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 . \sin A^2}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich, und da nun ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$50) \quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial \sin A^2}{\partial x} = \sin A \frac{\partial \sin A}{\partial x},$$

also allgemein

$$51) \quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial^{n+1} . \sin A^2}{\partial x^{n+1}} = \sin A \frac{\partial^{n+1} \sin A}{\partial x^{n+1}}$$
$$+ n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n}$$
$$+ n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}$$
$$+ n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial \sin A}{\partial x}$$

ist, so erhellet, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial \sin A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \sin A}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich verschwinden.

Weil endlich

$$52) \quad \frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\sin A \frac{\partial A}{\partial x},$$

und folglich allgemein

$$53) \quad \frac{\partial^{n+1} \cos A}{\partial x^{n+1}} = -\sin A \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}$$
$$- n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n A}{\partial x^n}$$
$$- n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$- n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$
$$- n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial A}{\partial x}$$

Digitized by Google

ist, so erhellet auch, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n=0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right),\ \left(\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\right),\ \left(\frac{\partial^7 A}{\partial x^7}\right),\ \ldots.$$

sämmtlich verschwinden.

Weil nun

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\sin A \frac{\partial A}{\partial x},\quad \frac{\partial \sin A}{\partial x} = \cos A \frac{\partial A}{\partial x}$$

ist, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} = -\sin A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \frac{\partial \sin A}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4} = -\sin A \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} &- 3\frac{\partial \sin A}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &- 3\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &- \frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6} = -\sin A \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} &- 5\frac{\partial \sin A}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\\ &- 10\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\\ &- 10\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &- 5\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &- \frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} = \cos A \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial \cos A}{\partial x} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4} = \cos A \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} &+ 3\frac{\partial \cos A}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &+ 3\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &+ \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

Digitized by Google

ist, so verschwinden offenbar auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial . \sin A^2}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 . \sin A^2}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 . \sin A^2}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 . \sin A^2}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich, und da nun ganz auf ähnliche Art wie vorher

$$50)\quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial \sin A^2}{\partial x} = \sin A \frac{\partial \sin A}{\partial x},$$

also allgemein

$$51)\quad \tfrac{1}{2} . \frac{\partial^{n+1} . \sin A^2}{\partial x^{n+1}} = \sin A \frac{\partial^{n+1} \sin A}{\partial x^{n+1}}$$
$$+ n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n}$$
$$+ n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$+ n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}$$
$$+ n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial \sin A}{\partial x}$$

ist, so erhellet, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n = 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ setzt, sehr leicht, dass auch die Grössen

$$\left(\frac{\partial \sin A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 \sin A}{\partial x^7}\right), \ldots$$

sämmtlich verschwinden.

Weil endlich

$$52)\quad \frac{\partial \cos A}{\partial x} = -\sin A \frac{\partial A}{\partial x},$$

und folglich allgemein

$$53)\quad \frac{\partial^{n+1} \cos A}{\partial x^{n+1}} = -\sin A \frac{\partial^{n+1} A}{\partial x^{n+1}}$$
$$- n_1 \frac{\partial \sin A}{\partial x} . \frac{\partial^n A}{\partial x^n}$$
$$- n_2 \frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2} . \frac{\partial^{n-1} A}{\partial x^{n-1}}$$
u. s. w.
$$- n_{n-1} \frac{\partial^{n-1} \sin A}{\partial x^{n-1}} . \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$
$$- n_n \frac{\partial^n \sin A}{\partial x^n} . \frac{\partial A}{\partial x}$$

Digitized by Google

ist, so erhellet auch, wenn man in dieser Gleichung nach und nach $n=0, 2, 4, 6, 8, \ldots.$ setzt, sehr leicht, dass die Grössen

$$\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\right), \left(\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\right), \left(\frac{\partial^7 A}{\partial x^7}\right), \ldots.$$

sämmtlich verschwinden.

Weil nun

$$\frac{\partial \cos A}{\partial x}=-\sin A\frac{\partial A}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sin A}{\partial x}=\cos A\frac{\partial A}{\partial x}$$

ist, so hat man die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}=-\sin A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}-\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}=-\sin A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&-3\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &-3\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &-\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}=-\sin A\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}&-5\frac{\partial \sin A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^5 A}{\partial x^5}\\ &-10\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\\ &-10\frac{\partial^3 \sin A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &-5\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &-\frac{\partial^5 \sin A}{\partial x^5}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

u. s. w.

und

$$\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}=\cos A\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}+\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}=\cos A\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}&+3\frac{\partial \cos A}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 A}{\partial x^3}\\ &+3\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\\ &+\frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial A}{\partial x},\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6} = \cos A \frac{\partial^6 A}{\partial x^6} + 5 \frac{\partial \cos A}{\partial x} \cdot \frac{\partial^5 A}{\partial x^5}$$

$$+ 10 \frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^4 A}{\partial x^4}$$

$$+ 10 \frac{\partial^3 \cos A}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^3 A}{\partial x^3}$$

$$+ 5 \frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4} \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

$$+ \frac{\partial^5 \cos A}{\partial x^5} \cdot \frac{\partial A}{\partial x},$$

u. s. w.

also nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) - 10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)$$

u. s. w.

und

$$\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) + 10\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$

$$+ 5\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right).$$

u. s. w.

Ordnet man nun diese Gleichungen auf folgende Art:

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) + 3\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right) = -(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) - 10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) - 5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial^6 \sin A}{\partial x^6}\right) = (\cos A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right) + 10\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$
$$+ 5\left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),$$

u. s. w.,

so sieht man, dass sich mit Hülfe derselben mittelst der aus §. 3. bekannten Werthe von

$$\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right), \ldots.$$

nach und nach die Grössen

$$\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right),\ \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right),\ \left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right), \ldots.$$

finden lassen, wobei man nur zu beachten hat, dass nach dem Obigen, und wie sich auch von selbst versteht, $(\cos A) = \cos \mathfrak{A}$, $(\sin A) = \sin \mathfrak{A}$, $(A) = \mathfrak{A}$ ist.

Es ist also

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{\partial^2 \cos A}{\partial x^2}\right),$$

und folglich nach 17):

$$54)\quad \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{3} bc \sin \mathfrak{A}.$$

Folglich ist nach dem Obigen ferner:

$$55)\quad \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{3} bc \sin \mathfrak{A} \cos \mathfrak{A},$$

oder

$$56)\quad \left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right) = \tfrac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2) \sin \mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) = -3\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^4 \cos A}{\partial x^4}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{3} b^2 c^2 \sin \mathfrak{A}^2 \cos \mathfrak{A}$$
$$+ \tfrac{2}{15} bc(3b^2 + 3c^2 - a^2) \sin \mathfrak{A}^2$$
$$= bc\left\{\tfrac{2}{15}(3b^2 + 3c^2 - a^2) - \tfrac{1}{6}(b^2 + c^2 - a^2)\right\} \sin \mathfrak{A}^2,$$

d. i., wie man leicht findet:

$$57)\quad \left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right) = \tfrac{1}{30} bc(7b^2 + 7c^2 + a^2) \sin \mathfrak{A}.$$

Digitized by Google

Also ist nach dem Obigen

58) $$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)=\tfrac{1}{3}bc\left\{\tfrac{1}{10}(7b^2+7c^2+a^2)\cos\mathfrak{A}-bc\sin\mathfrak{A}^2\right\}\sin\mathfrak{A}$$

oder

$$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)=\tfrac{1}{60}(7b^2+7c^2+a^2)(b^2+c^2-a^2)\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{12}\left\{a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right\}\sin\mathfrak{A},$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet:

59) $$\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)=\tfrac{1}{15}(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}.$$

Ferner ist

$$(\sin A)\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right)=-5\left(\frac{\partial^4 \sin A}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}\right)-10\left(\frac{\partial^2 \sin A}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^4 A}{\partial x^4}\right)$$
$$-\left(\frac{\partial^6 \cos A}{\partial x^6}\right)$$
$$=-\tfrac{1}{9}bc(a^4+3b^4+3c^4-4a^2b^2+b^2c^2-4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$-\tfrac{1}{18}bc(b^2+c^2-a^2)(7b^2+7c^2+a^2)\sin\mathfrak{A}^2$$
$$+\tfrac{1}{7}bc\left\{\begin{array}{l}\tfrac{17}{2}b^4+\tfrac{26}{3}b^2c^2+\tfrac{17}{2}c^4\\-\tfrac{11}{3}(b^2+c^2)a^2+\tfrac{1}{2}a^4\end{array}\right\}\sin\mathfrak{A}^2,$$

und folglich, wie man nach leichter Rechnung findet:

60) $$\left(\frac{\partial^6 A}{\partial x^6}\right)$$
$$=\tfrac{1}{63}bc(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\sin\mathfrak{A}.$$

Folglich ist nur erst mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung:

61) $$A=\mathfrak{A}+\tfrac{1}{6}bc\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2$$
$$+\tfrac{1}{720}bc(a^2+7b^2+7c^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4$$
$$+\tfrac{1}{45360}bc(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^6,$$

oder

62) $$A=\mathfrak{A}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{360}(a^2+7b^2+7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(a^4+31b^4+31c^4+16a^2b^2+31b^2c^2+16c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

oder auch

63) $$A=\mathfrak{A}+\tfrac{1}{6}b_1c_1\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{720}b_1c_1(a_1{}^2+7b_1{}^2+7c_1{}^2)\sin\mathfrak{A}$$
$$+\tfrac{1}{45360}b_1c_1(a_1{}^4+31b_1{}^4+31c_1{}^4+16a_1{}^2b_1{}^2+31b_1{}^2c_1{}^2+16c_1{}^2a_1{}^2)\sin\mathfrak{A},$$

oder

64) $A = \mathfrak{A} + \frac{1}{3}\mathfrak{D}_1$
$$+ \tfrac{1}{360}(a_1^2 + 7b_1^2 + 7c_1^2)\mathfrak{D}_1$$
$$+ \tfrac{1}{22680}(a_1^4 + 31b_1^4 + 31c_1^4 + 16a_1^2b_1^2 + 31b_1^2c_1^2 + 16c_1^2a_1^2)\mathfrak{D}_1.$$

Mit Vernachlässigung von Gliedern der sechsten Ordnung ist aber:

65) $\sin A = \sin\mathfrak{A} - \frac{1}{12}(a^2 - b^2 - c^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^2$
$$+ \tfrac{1}{360}(a^4 + 3b^4 + 3c^4 - 4a^2b^2 + b^2c^2 - 4c^2a^2)\sin\mathfrak{A}\,.\,x^4,$$

oder

66) $\sin A = \frac{2\mathfrak{D}}{bc} - \frac{1}{6}(a^2 - b^2 - c^2)\frac{\mathfrak{D}}{bc}x^2$
$$+ \tfrac{1}{180}(a^4 + 3b^4 + 3c^4 - 4a^2b^2 + b^2c^2 - 4c^2a^2)\frac{\mathfrak{D}}{bc}x^4.$$

Auch ist mit demselben Grade der Genauigkeit:

67) $\sin A = \sin\mathfrak{A} - \frac{1}{12}(a_1^2 - b_1^2 - c_1^2)\sin\mathfrak{A}$
$$+ \tfrac{1}{360}(a_1^4 + 3b_1^4 + 3c_1^4 - 4a_1^2b_1^2 + b_1^2c_1^2 - 4c_1^2a_1^2)\sin\mathfrak{A},$$

oder

68) $\sin A = \frac{2\mathfrak{D}_1}{b_1c_1} - \frac{1}{6}(a_1^2 - b_1^2 - c_1^2)\frac{\mathfrak{D}_1}{b_1c_1}$
$$+ \tfrac{1}{180}(a_1^4 + 3b_1^4 + 3c_1^4 - 4a_1^2b_1^2 + b_1^2c_1^2 - 4c_1^2a_1^2)\frac{\mathfrak{D}_1}{b_1c_1}.$$

Umgekehrt ist auch, wie man leicht findet, mit demselben Grade der Genauigkeit:

65*) $\sin\mathfrak{A} = \sin A + \frac{1}{12}(a^2 - b^2 - c^2)\sin A\,.\,x^2$
$$+ \tfrac{1}{720}(3a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 8b^2c^2 - 2c^2a^2)\sin A\,.\,x^4$$

oder

67*) $\sin\mathfrak{A} = \sin A + \frac{1}{12}(a_1^2 - b_1^2 - c_1^2)\sin A$
$$+ \tfrac{1}{720}(3a_1^4 - b_1^4 - c_1^4 - 2a_1^2b_1^2 + 8b_1^2c_1^2 - 2c_1^2a_1^2)\sin A.$$

§. 6.

Nach 62) hat man nun

$A = \mathfrak{A} + \frac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$
$$+ \tfrac{1}{360}(a^2 + 7b^2 + 7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+ \tfrac{1}{22680}(a^4 + 31b^4 + 31c^4 + 16a^2b^2 + 31b^2c^2 + 16c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

$B = \mathfrak{B} + \frac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$
$$+ \tfrac{1}{360}(b^2 + 7a^2 + 7c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+ \tfrac{1}{22680}(b^4 + 31a^4 + 31c^4 + 16b^2c^2 + 31c^2a^2 + 16a^2b^2)\mathfrak{D}x^6,$$

Digitized by Google

$$C=\mathfrak{C}+\tfrac{1}{3}\mathfrak{D}x^2$$
$$+\tfrac{1}{180}(c^2+7a^2+7b^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{22680}(c^4+31a^4+31b^4+16c^2a^2+31a^2b^2+16b^2c^2)\mathfrak{D}x^6.$$

Addirt man diese drei Gleichungen zusammen, so erhält man, weil

$$(A+B+C)-(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})=2E$$

ist:

$$69)\quad 2E=\mathfrak{D}x^2+\tfrac{1}{24}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{360}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}x^6$$

oder

$$70)\quad 2E=\mathfrak{D}_1+\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)\mathfrak{D}_1$$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+a_1{}^2b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2)\mathfrak{D}_1,$$

oder

$$71)\quad \frac{2E}{\mathfrak{D}_1}=1+\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)$$
$$+\tfrac{1}{360}(a_1{}^4+b_1{}^4+c_1{}^4+a_1b_1{}^2+b_1{}^2c_1{}^2+c_1{}^2a_1{}^2).$$

Bestimmt man aber aus der Gleichung 69) die Grösse $\mathfrak{D}x^2$, so erhält man ohne Schwierigkeit mit Vernachlässigung von Gliedern der achten *) Ordnung:

$$72)\quad \mathfrak{D}x^2=2E-\tfrac{1}{12}(a^2+b^2+c^2)Ex^2$$
$$-\tfrac{1}{1440}(3a^4+3b^4+3c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)Ex^4,$$

oder

$$73)\quad \mathfrak{D}_1=2E-\tfrac{1}{12}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)E$$
$$-\tfrac{1}{1440}(3a_1{}^4+3b_1{}^4+3c_1{}^4-2a_1{}^2b_1{}^2-2b_1{}^2c_1{}^2-2c_1{}^2a_1{}^2)E,$$

oder

$$74)\quad \frac{\mathfrak{D}_1}{2E}=1-\tfrac{1}{24}(a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2)$$
$$-\tfrac{1}{2880}(3a_1{}^4+3b_1{}^4+3c_1\;-2a_1{}^2b_1{}^2-2b_1{}^2c_1{}^2-2c_1{}^2a_1{}^2).$$

Führt man nun den gefundenen Ausdruck von $\mathfrak{D}x^2$ in den obigen Ausdruck von A ein, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$75)\quad A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E$$
$$-\tfrac{1}{90}(2a^2-b^2-c^2)Ex^2$$
$$-\tfrac{1}{45360}(38a^4-19b^4-19c^4-a^2b^2+2b^2c^2-c^2a^2)Ex^4,$$

wobei wieder nur Grössen der achten Ordnung vernachlässigt sind. Auch ist mit demselben Grade der Genauigkeit:

---

*) Da nämlich nach 69) E selbst eine Grösse der zweiten Ordnung ist.

Digitized by Google

$$76)\quad A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E$$
$$-\tfrac{1}{90}(2a_1{}^2-b_1{}^2-c_1{}^2)E$$
$$-\tfrac{1}{45360}(38a_1{}^4-19b_1{}^4-19c_1{}^4-a_1{}^2b_1{}^2+2b_1{}^2c_1{}^2-c_1{}^2a_1{}^2)E.$$

Umgekehrt aber ist

$$77)\quad \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E$$
$$+\tfrac{1}{90}(2a^2-b^2-c^2)Ex^2$$
$$+\tfrac{1}{45360}(38a^4-19b^4-19c^4-a^2b^2+2b^2c^2-c^2a^2)Ex^4$$

oder

$$78)\quad \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E$$
$$+\tfrac{1}{90}(2a_1{}^2-b_1{}^2-c_1{}^2)E$$
$$+\tfrac{1}{45360}(38a_1{}^4-19b_1{}^4-19c_1{}^4-a_1{}^2b_1{}^2+2b_1{}^2c_1{}^2-c_1{}^2a_1{}^2)E.$$

Ganz ähnliche Formeln ergeben sich für die Winkel B, C und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Geht man blos bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so ist mit Vernachlässigung von Gliedern der vierten Ordnung:

$$79)\left\{\begin{array}{ll} A=\mathfrak{A}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{A}=A-\tfrac{2}{3}E; \\ B=\mathfrak{B}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{B}=B-\tfrac{2}{3}E; \\ C=\mathfrak{C}+\tfrac{2}{3}E, & \mathfrak{C}=C-\tfrac{2}{3}E; \end{array}\right.$$

welches bekanntlich das Legendre'sche Theorem ist, wenn man nur überlegt, dass in allen unsern obigen Formeln E den **halben** Excess bezeichnet.

Leicht würde man in die obigen Formeln auch den ganzen Excess einführen können, was wir dem Leser überlassen.

Um eine Controle für die Richtigkeit unserer Rechnungen zu haben, wollen wir mittelst des aus 69) sich ergebenden Ausdrucks von E, nämlich

$$E=\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}x^2+\tfrac{1}{48}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}x^4$$
$$+\tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}x^6,$$

die Grösse $\cos E$ nach der Formel

$$\cos E=1-\tfrac{1}{2}E^2+\tfrac{1}{24}E^4$$

entwickeln, und den sich ergebenden Ausdruck mit dem oben in 41) auf ganz anderem Wege gefundenen Ausdrucke von $\cos E$ vergleichen.

Es ist aber, wie man leicht findet:

Digitized by Google

$$E^2 = \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^2x^4 + \tfrac{1}{16}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$+ \tfrac{1}{2304}(a^2+b^2+c^2)^2\mathfrak{D}^2x^8$$
$$+ \tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\mathfrak{D}^2x^8$$
$$= \tfrac{1}{4}\mathfrak{D}^2x^4 + \tfrac{1}{48}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$+ \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2304}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2) \\ + \tfrac{1}{720}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \end{array} \right\} \mathfrak{D}^2x^8$$

und

$$E^4 = \tfrac{1}{16}\mathfrak{D}^4x^8 = \tfrac{1}{64}b^2c^2\mathfrak{D}^2\sin\mathfrak{A}^2 . x^8$$
$$= -\tfrac{1}{256}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)\mathfrak{D}^2x^8,$$

also

$$\cos E = 1 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$- \tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$- \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{4608}(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2) \\ + \tfrac{1}{1440}(a^4+b^4+c^4+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \\ + \tfrac{1}{6144}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2) \end{array} \right\} \mathfrak{D}^2x^8.$$

Da nun

$$\tfrac{1}{4608} + \tfrac{1}{1440} + \tfrac{1}{6144}$$
$$= \tfrac{20}{92160} + \tfrac{64}{92160} + \tfrac{15}{92160} = \tfrac{99}{92160}$$

und

$$\tfrac{2}{4608} + \tfrac{1}{1440} - \tfrac{2}{6144}$$
$$= \tfrac{40}{92160} + \tfrac{64}{92160} - \tfrac{30}{92160} = \tfrac{74}{92160}$$

ist, so ist

$$\cos E = 1 - \tfrac{1}{8}\mathfrak{D}^2x^4$$
$$- \tfrac{1}{96}(a^2+b^2+c^2)\mathfrak{D}^2x^6$$
$$- \tfrac{1}{92160}\{99(a^4+b^4+c^4) + 74(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\}\mathfrak{D}^2x^8,$$

welches genau mit der oben auf ganz anderem Wege gefundenen Formel 44) übereinstimmt.

Um eine Controle wie die vorhergehende für die Richtigkeit der obigen etwas weitläufigen Rechnungen zu gewinnen, war die nächste Veranlassung zu den in §. 4 gegebenen, sonst eigentlich für unsern gegenwärtigen Zweck nicht unbedingt erforderlichen Entwickelungen.

§. 7.

Nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie ist

$$80)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2 = -\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}.$$

Digitized by Google

Nun ist aber, wie leicht erhellen wird,

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+B+C)=-\sin E,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(B+C-A)=\sin(B+C-E);$$

also

$$81)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2=\frac{\sin E\sin(B+C-E)}{\sin B\sin C},$$

und folglich

$$\frac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}=\frac{\cos E\sin(B+C-E)-\sin E\cos(B+C-E)}{\sin B\sin C},$$

also

$$82)\quad \frac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}=\frac{\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C},$$

woraus sich nun ferner leicht

$$83)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2}=-\dfrac{2\cos(B+C-2E)}{\sin B\sin C}, \\ \dfrac{\partial^3.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^3}=-\dfrac{2^2.\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C}, \\ \dfrac{\partial^4.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^4}=\dfrac{2^3.\cos(B+C-2E)}{\sin B\sin C}, \\ \dfrac{\partial^5.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^5}=\dfrac{2^4.\sin(B+C-2E)}{\sin B\sin C}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

ergiebt. Also ist

$$84)\quad \begin{cases} (\sin\frac{1}{2}a_1{}^2)=0, \\ \left(\dfrac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E}\right)=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}, \\ \left(\dfrac{\partial^2.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2}\right)=-\dfrac{2\cos(B+C)}{\sin B\sin C}, \\ \left(\dfrac{\partial^3.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^3}\right)=-\dfrac{2^2.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}, \\ \left(\dfrac{\partial^4.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^4}\right)=\dfrac{2^3.\cos(B+C)}{\sin B\sin C}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

und folglich

Digitized by Google

$$85)\ \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2 = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E}{1}$$
$$-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^2}{1.2}$$
$$-\frac{2^2.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{2^3.\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^4}{1.2.3.4}$$
$$-\frac{2^4.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^5}{1.2.3.4.5}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$86)\ \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2 = \frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{2E}{1} - \frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^2}{1.2}$$
$$-\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^4}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^5}{1.2.3.4.5}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Differentiation nach E erhält man:

$$\frac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E} = \sin\tfrac{1}{2}a_1\cos\tfrac{1}{2}a_1\frac{\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{2}\sin a_1\frac{\partial a_1}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{2a_1\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E},$$

also

$$\frac{\partial^2.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial a_1}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^2}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{8}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^3}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}.$$

Für $E=0$ ist $a_1=0$. Bestimmt man nun nach den bekannten Regeln die Werthe der Brüche

Digitized by Google

$$\frac{\sin a_1}{a_1} \text{ und } \frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^3}$$

für $a_1 = 0$, so erhält man

$$\left(\frac{\sin a_1}{a_1}\right) = 1, \quad \left(\frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^3}\right) = -\tfrac{1}{3};$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\partial . \sin \frac{1}{2} a_1{}^2}{\partial E}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 . \sin \frac{1}{2} a_1{}^2}{\partial E^2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1{}^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right)^2;$$

d. i.

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right),$$

$$-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1{}^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right)^2.$$

Daher ist

$$87) \quad \left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right) = \frac{4\sin(B+C)}{\sin B \sin C}$$

und

$$88) \quad \left(\frac{\partial^2 . a_1{}^2}{\partial E^2}\right) = -\frac{8\cos(B+C)}{\sin B \sin C} + \tfrac{8}{3}\left\{\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right\}^2;$$

oder

$$89) \quad \left(\frac{\partial . a_1{}^2}{\partial E}\right) = 4(\cot B + \cot C)$$

und

$$90) \quad \left(\frac{\partial^2 . a_1{}^2}{\partial E^2}\right) = 8\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\}.$$

Daher ist

$$91) \quad a_1{}^2 = \frac{4\sin(B+C)}{\sin B \sin C} E - 4\left\{\frac{\cos(B+C)}{\sin B \sin C} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right)^2\right\} E^2$$

oder

$$92) \quad a_1{}^2 = 4(\cot B + \cot C)E + 4\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\} E^2;$$

folglich, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$2a_1{}^2 - b_1{}^2 - c_1{}^2 = -4(2\cot A - \cot B - \cot C)E - \tfrac{4}{3}\left\{\begin{array}{l} 2\cot A^2 - \cot B^2 = \cot C^2 \\ -\cot A(\cot B + \cot C) + 2\cot B \cot C \end{array}\right\} E^2$$

Digitized by Google

$$85)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2 = \frac{\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E}{1}$$
$$-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^2}{1.2}$$
$$-\frac{2^2.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{2^3.\cos(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^4}{1.2.3.4}$$
$$-\frac{2^4.\sin(B+C)}{\sin B\sin C}\cdot\frac{E^5}{1.2.3.4.5}$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oder

$$86)\quad \sin\tfrac{1}{2}a_1{}^2 = \frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{2E}{1} - \frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^2}{1.2}$$
$$-\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^3}{1.2.3}$$
$$+\frac{\cos(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^4}{1.2.3.4}$$
$$+\frac{\sin(B+C)}{2\sin B\sin C}\cdot\frac{(2E)^5}{1.2.3.4.5}$$
$$-\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Durch Differentiation nach E erhält man:

$$\frac{\partial.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E} = \sin\tfrac{1}{2}a_1\cos\tfrac{1}{2}a_1\frac{\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{2}\sin a_1\frac{\partial a_1}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{2a_1\partial a_1}{\partial E} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E},$$

also

$$\frac{\partial^2.\sin\frac{1}{2}a_1{}^2}{\partial E^2} = \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\partial.\frac{\sin a_1}{a_1}}{\partial a_1}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{4}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^2}.\frac{\partial a_1}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\frac{\sin a_1}{a_1}.\frac{\partial^2.a_1{}^2}{\partial E^2} + \tfrac{1}{8}.\frac{a_1\cos a_1 - \sin a_1}{a_1{}^3}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}.\frac{\partial.a_1{}^2}{\partial E}.$$

Für $E=0$ ist $a_1=0$. Bestimmt man nun nach den bekannten Regeln die Werthe der Brüche

Digitized by Google

$$\frac{\sin a_1}{a_1} \text{ und } \frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1^3}$$

für $a_1 = 0$, so erhält man

$$\left(\frac{\sin a_1}{a_1}\right) = 1,\ \left(\frac{a_1 \cos a_1 - \sin a_1}{a_1^3}\right) = -\tfrac{1}{3};$$

und es ist also nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{\partial . \sin \frac{1}{2} a_1^2}{\partial E}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right),\ \left(\frac{\partial^2 . \sin \frac{1}{2} a_1^2}{\partial E^2}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right)^2;$$

d. i.

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right),$$

$$-\frac{2\cos(B+C)}{\sin B \sin C} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) - \tfrac{1}{24}\left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right)^2.$$

Daher ist

$$87)\ \left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right) = \frac{4\sin(B+C)}{\sin B \sin C}$$

und

$$88)\ \left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) = -\frac{8\cos(B+C)}{\sin B \sin C} + \tfrac{8}{3}\left\{\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right\}^2;$$

oder

$$89)\ \left(\frac{\partial . a_1^2}{\partial E}\right) = 4(\cot B + \cot C)$$

und

$$90)\ \left(\frac{\partial^2 . a_1^2}{\partial E^2}\right) = 8\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\}.$$

Daher ist

$$91)\ a_1^2 = \frac{4\sin(B+C)}{\sin B \sin C} E$$
$$-4\left\{\frac{\cos(B+C)}{\sin B \sin C} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{\sin(B+C)}{\sin B \sin C}\right)^2\right\} E^2$$

oder

$$92)\ a_1^2 = 4(\cot B + \cot C)E + 4\{1 + \tfrac{1}{3}(\cot B^2 + \cot C^2 - \cot B \cot C)\}E^2;$$

folglich, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$2a_1^2 - b_1^2 - c_1^2 = -4(2\cot A - \cot B - \cot C)E$$
$$-\tfrac{4}{3}\left\{\begin{matrix} 2\cot A^2 - \cot B^2 - \cot C^2 \\ -\cot A(\cot B + \cot C) + 2\cot B \cot C \end{matrix}\right\}E^2$$

Digitized by Google

und

$$38a_1{}^4 - 19b_1{}^4 - 19c_1{}^4 - a_1{}^2b_1{}^2 + 2b_1{}^2c_1{}^2 - c_1{}^2a_1{}^2$$
$$= - \left\{ \begin{array}{l} 288\,(2\cot A^2 - \cot B^2 - \cot C^2) \\ + 608\,(\cot A\,(\cot B + \cot C) - 2\cot B\cot C) \end{array} \right\} E^2.$$

Also ist nach 76) mit Vernachlässigung von Gliedern der achten Ordnung:

$$93)\quad A = \mathfrak{A} + \tfrac{2}{3}E$$
$$+ \tfrac{2}{45}(2\cot A - \cot B - \cot C)E^2$$
$$+ \tfrac{8}{135} \left\{ \begin{array}{l} 2\cot A^2 - \cot B^2 - \cot C^2 \\ - \tfrac{1}{15}(\cot A(\cot B + \cot C) - 2\cot B\cot C) \end{array} \right\} E^3,$$

und folglich mit demselben Grade der Genauigkeit:

$$94)\quad \mathfrak{A} = A - \tfrac{2}{3}E$$
$$- \tfrac{2}{45}(2\cot A - \cot B - \cot C)E^2$$
$$- \tfrac{4}{135} \left\{ \begin{array}{l} 2\cot A^2 - \cot B^2 - \cot C^2 \\ - \tfrac{1}{15}(\cot A(\cot B + \cot C) - 2\cot B\cot C) \end{array} \right\} E^3.$$

Auch ist, wie man leicht findet:

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 - c_1{}^2 = - 8\cot A\,.\,E$$
$$- 4\{1 + \tfrac{1}{3}(2\cot A^2 - \cot A\,(\cot B + \cot C) + \cot B\cot C)\}E^2,$$

und

$$a_1{}^4 + 3b_1{}^4 + 3c_1{}^4 - 4a_1{}^2b_1{}^2 + b_1{}^2c_1{}^2 - 4c_1{}^2a_1{}^2$$
$$= 16\{7\cot A^2 - \cot A\,(\cot B + \cot C) - 5\cot B\cot C\}E^2,$$

so wie

$$3a_1{}^2 - b_1{}^4 - c_1{}^4 - 2a_1{}^2b_1{}^2 + 8b_1{}^2c_1{}^2 - 2c_1{}^2a_1{}^2$$
$$= 32\{3\cot A^2 + \cot A\,(\cot B + \cot C) + 5\cot B\cot C\}E^2.$$

Also ist nach 67) und 66*):

$$95)\quad \sin A = \sin\mathfrak{A} + \tfrac{2}{3}\cot A\sin\mathfrak{A}\,.\,E$$
$$+ \tfrac{1}{3}\{1 + \tfrac{1}{15}(24\cot A^2 - 7\cot A(\cot B + \cot C) - 5\cot B\cot C)\}\sin\mathfrak{A}\,.\,E^2$$

und

$$96)\quad \sin\mathfrak{A} = \sin A - \tfrac{2}{3}\cot A\sin A\,.\,E$$
$$- \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{15}(4\cot A^2 - 7\cot A\,(\cot B + \cot C) - 5\cot B\cot C)\}\sin A\,.\,E^2$$

oder

$$97)\quad \frac{\sin A}{\sin\mathfrak{A}} = 1 + \tfrac{2}{3}\cot A\,.\,E$$
$$+ \tfrac{1}{3}\{1 + \tfrac{1}{15}(24\cot A^2 - 7\cot A\,(\cot B + \cot C) - 5\cot B\cot C)\}E^2$$

und

$$98)\quad \frac{\sin \mathfrak{A}}{\sin A} = 1 - \tfrac{1}{3}\cot A \,.\, E - \tfrac{1}{3}\{1 + \tfrac{1}{15}(4\cot A^2 - 7\cot A(\cot B + \cot C) - 5\cot B\cot C)\}\, E^2.$$

Die Anwendung der im Obigen entwickelten Formeln in der Geodäsie zu zeigen, kann hier nicht unsere Absicht sein, da diese sehr wichtige Anwendung als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden kann. Wir bezweckten hier nur eine weiter, als gewöhnlich geschieht, getriebene Entwickelung der Formeln nach einer Methode, welche leicht erkennen lässt, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn man zu noch mehreren Gliedern fortschreiten wollte, welchem nothwendigen Erforderniss uns die bisher angewandten Entwickelungsmethoden nicht gehörig zu entsprechen scheinen. Auch braucht hier nicht erläutert zu werden, wie man sich zu verhalten haben würde, wenn die Winkel oder Bogen nicht wie vorher in Theilen des der Einheit gleichen Halbmessers, sondern in einem andern Maasse ausgedrückt werden sollten, welches Alles zu bekannt und namentlich einem Jeden, wer in geodätischen Rechnungen nur einigermaassen geübt ist, zu geläufig ist, als dass darüber hier noch besondere Bemerkungen nöthig sein sollten.

IV.

Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven auf die Schattenconstructionen.

Von

Herrn C. T. Meyer,

Bergwerkscandidaten zu Freiberg.

So vielfache Anwendung die Mathematik schon in jeder Beziehung und unter den verschiedenartigsten Verhältnissen erlitten hat, so ist doch nicht zu leugnen, dass es auch noch Zweige der Wissenschaft und der Praktik giebt, wo sie entweder gänzlich vermisst wird, oder doch wenigstens ein grösserer Einfluss derselben zu wünschen wäre. Zu der erstern dieser beiden Abtheilungen, nämlich der der Wissenschaft, gehört auch unstreitig

Digitized by Google

die Zeichnenkunst, und wenn hier auch mathematische Hilfsgriffe zum Theil schon angewendet werden, so kann man doch gewiss nicht verkennen, dass eine viel grössere Anwendung, namentlich des mehr geometrischen Theils (im weitern Sinne des Begriffs) noch wünschenswerth sein möchte. Ich spreche hier weniger von der sogenannten geometrischen oder descriptiven Projectionslehre, obgleich auch diese nicht ausgeschlossen ist, wie schon die vorliegende Anwendung der Theorie der Umhüllungscurven zeigt, welche auch darauf Bezug finden könnte, und zwar mit noch grösserm Einflusse und noch glücklicherm Erfolge, als selbst bei den Schattenconstructionen, auf welche ich mich jedoch beschränken will, da jener in einem besondern Werke „Axonometrische Projectionslehre" auf genügendere Weise, als es hier möglich wäre, Erwähnung geschehen wird.

Schon aus dem Begriffe einer Umhüllungscurve geht hervor, dass ich mich hier nicht mit den Schatten geradlinig begrenzter, sondern vielmehr regelmässig gekrümmter Oberflächen zu beschäftigen habe, und zwar sind es namentlich die Rotationskörper und die gekrümmten Flächen zweiter Ordnung, auf deren Schattenconstruction genannte Theorie in vielen Fällen sehr vereinfachend einwirkt. Ich gehe hier der Einfachheit halber von den Rotationskörpern aus, an welche sich dann die allgemeinen Fälle der gekrümmten Oberflächen zweiter Ordnung leicht anschliessen werden; die Rotationskörper sind nämlich zum Theil nur als besondere Fälle jener gekrümmten Flächen zu betrachten; anderntheils reicht aber dieser Begriff viel weiter, so dass sonach zugleich für zwei verschiedene Richtungen Eingang geöffnet wird. Hiernach ist es auch natürlich, dass ich mich im Folgenden namentlich mit den Rotationskörpern der zweiten Ordnung beschäftigen werde, zumal solches die am häufigsten vorkommenden Körper sind, nämlich den Rotationskörper des Dreiecks, des Kreises und der Kegelschnitte, als Kegel, Kugel, Sphäroid, Umdrehungs-Paraboloid und Umdrehungs-Hyperboloid. Was die ersten beiden der genannten Körper, nämlich Kegel und Kugel betrifft, so wird, da ihre Schattenconstruction schon jetzt ziemlich einfach ist (s. Hummel: Geometrisch-practische Construction der Schatten. Berlin. 1830.), darauf wenig Einfluss ausgeübt werden können, und ich will daher auch von diesen sogleich absehen, obgleich das Princip, auf welches es hier namentlich ankommt, eben so gut an ihnen erläutert werden könnte.

Nicht immer zeigen die geometrischen und namentlich axonometrischen (d. h. isometrischen, monodimetrischen und anisometrischen) Darstellungen von Rotationskörpern eine Curve derselben Gattung, als die der Fläche ist, durch deren Drehung der Körper entstanden gedacht werden kann, und ebendasselbe gilt von den Abbildungen im Schatten, welcher nichts anderes als eine schiefe Projection ist.

Es liegen nun hier namentlich drei Fragen vor, deren Beantwortung das Hauptthema des Folgenden ist: 1) wie man sich überzeugen kann, ob der Schatten eine Curve derselben Art giebt, als die Rotationsfläche zeigt (d. h. ein Ellipsoid eine Ellipse, ein Paraboloid eine Parabel etc.) oder überhaupt, welche Curve im Schatten entsteht; 2) in welchen Fällen für die Curven der zwei-

Digitized by Google

ten Ordnung der Schatten eine Curve derselben Art giebt, und 3) in welchem Verhältniss dann die neue Curve steht, und wie eine Vereinfachung der Construction eintreten kann, was sich freilich schon mehr auf einzelne, specielle Fälle bezieht.

Diese drei Fragen werden jedoch nicht scharf getrennt abgehandelt werden, da sie ihrer Natur nach zu eng verwandt sind, als dass dies ohne Weitläuftigkeiten und Wiederholungen geschehen könnte. Zur Lösung der gestellten Aufgaben ist es nur vorerst erforderlich, zu zeigen, von welchem Principe der Schattenconstruction wir hier im Allgemeinen auszugehen haben, es ist die Basis anzugeben, wodurch die Theorie der Umhüllungscurven in Wirksamkeit zu treten vermag.

Da es sich hier lediglich um das Princip handelt, und solches an schweren Fällen mit nicht mehr Vortheil, als an einfachern, und nur mit grösserer Undeutlichkeit dargethan werden könnte, wie man denn in allen Stücken von dem Einfacheren zum Complicirteren übergeht, so werden wir auch hier einen der einfachern Fälle als Grundlage annehmen; es stehe nämlich der den Schatten werfende Rotationskörper mit der Ebene seiner Neigung parallel dem Lichtstrahle. Ist dies nicht der Fall, so wird dadurch das Ganze nicht geändert und blos wenig modificirt, wie wir später durch ein Beispiel sehen werden.

Es sei z. B. der horizontale Schlagschatten (natürlich geometrische) eines Rotationskörpers, wie *ABCD* in Taf. I. Fig. 1. (im Aufriss sind die Buchstaben mit einem Index versehen) zu finden, der von Lichtstrahlen parallel der Richtung x beleuchtet wird.

Da hierbei die Aufrissebene meist blos dazu dient, um die Rotationsfläche ihrer wirklichen Gestalt nach dem Beschauer zu zeigen, und überhaupt mehr nur als Hilfsconstruction zu betrachten ist, so wird man sie gewöhnlich parallel der Neigung des Rotationskörpers gelegt finden, und sollte dies nicht der Fall sein, so kann man sich auch leicht ein derartiges Profil verzeichnen; doch soll hierdurch keineswegs angedeutet werden, dass dies unbedingt nöthig sei, sondern es dient nur zur Vereinfachung, wie man auch selbst aus dem Verlaufe deutlich sehen wird; auch Hummel hat ein ähnliches Verfahren bei der Schattenconstruction der Kugel befolgt (S. 44. des obengenannten Werkes).

Man suche zuerst den Schatten einer durch die Axe *EF* gehenden, rechtwinklig zur Neigung des Körpers liegenden Ebene *GHJK* (es ist dies am einfachsten), was leicht nach den gewöhnlichen Regeln der optischen Zeichnungslehre geschehen kann. Ist die Begrenzungslinie eine Curve zweiter Ordnung, von denen wir hier ausgehen, so wird man sich der Aufsuchung einzelner Punkte blos dann bedienen, wenn die Curve eine Hyperbel ist, da deren Construction selbst nicht viel Vereinfachung gewährt; hat man es aber mit einer Parabel oder Ellipse zu thun, so wird man zweckmässig nur wenig Punkte bestimmen und dann sogleich die Curve auf gewöhnlichem geometrischen Wege vollends ausführen. Es ist hierzu freilich erforderlich, zu wissen, dass auch der Schatten dieselbe Gattung der Curven, als die Rotationsfläche in der Begrenzungslinie zeigt, und ich will daher mit wenigen Worten dies näher erläutern, da eine ausführlichere Beweisführung mich zu weit vom eigentlichen Gegenstande abführen würde.

Digitized by Google

Liegt nämlich die Fläche, wie hier angenommen, rechtwinklig gegen den Grundriss des Lichtstrahls, so werden alle Curven sich bei ihrer Abbildung im Schatten nur insofern ändern, als ihre Constanten verschiedene Werthe erhalten; denn offenbar bleiben alle Ordinaten (wenn man die Axe der Fläche als Abscissenaxe betrachtet) gleich gross und rechtwinklig zur Abscissenaxe, welche sich vergrössert oder verkleinert, je nach der Neigung des Lichtstrahles x gegen den Horizont und der Neigung β des Körpers (Taf. I. Fig. 2.), und zwar tritt x_1, als variable Abscisse an die Stelle von $x = \frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$, so dass also die neue Curve die Gleichung $y_1 = f\left(\frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\right)$ hat, wenn die der alten $y = f(x)$ war.

Trifft aber der Lichtstrahl im Grundriss schief auf die den Schatten werfende Fläche, so gilt dieses Gesetz nur noch bei den Linien der zweiten Ordnung, da solche auch für zusammengehörige (nicht rechtwinklig auf einander stehende) Durchmesser die gewöhnlichen Gleichungen zeigen, was allgemein für alle Curven nicht bewiesen werden kann, obgleich die Möglichkeit vorhanden ist, dass es noch für viele andere Linien höherer Grade Geltung hat. (Es ist hier natürlich der Kreis als zur Gattung der Ellipsen gehörig angesehen worden; er ist als Ellipse zu betrachten, wo kleine und grosse Axe denselben Werth erhalten.)

Hat man sich den Schatten dieser Fläche in *ghik* (Taf. I. Fig. 1.) dargestellt, so verzeichne man sich die Ellipsenprojection eines der Kreisschnitte rechtwinklig zur Rotationsaxe, etwa *cdgh*. Bei der Lage des Körpers, die die Figur darstellt, ist es offenbar, dass die beiden Axen der Ellipse auf den Schatten der Rotationsaxe und rechtwinklig dagegen zu liegen kommen, was bei einer schiefen Beleuchtung nicht der Fall ist, wie das letzte Beispiel zeigen wird; es ist dies ein nicht wesentlicher, aber doch sehr erleichternder Umstand. Verzeichnet man nun in beliebigen, möglichst kleinen Abständen auf der Schattenaxe der *ghik* ähnliche Ellipsen nach den Axen g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3 etc., so geben diese den Schatten von eben so viel rechtwinklig zur Axe geführten Durchschnitten des Rotationskörpers, und eine tangentiale Verbindung ihrer Conturen muss der gesuchte Schatten des Körpers selbst sein. Je näher man die Ellipsen verzeichnet, um desto weniger kann man fehlen, und legt man unendlich viel Ellipsen, so wird der Schatten auch genau richtig werden; d. i. mit andern Worten, eine Umhüllungscurve solcher Ellipsen giebt den gesuchten Schatten.

Hieraus folgt nun sogleich die Lösung der ersten der oben aufgeworfenen Fragen: wie man sich überzeugen kann, welche Curve als Begrenzungslinie des Schattens (oft blos seitlich, da, wie in der Figur, oben und unten halbe Ellipsen schliessen müssen) resultirt; denn man braucht solche blos nach der gewöhnlichen Theorie der Umhüllungscurven, wie sie Littrow in seinem Werke „Elemente der Algebra und Geometrie“ angiebt, zu berechnen, indem ähnliche Ellipsen nach einem gewissen Gesetze, welches durch die erste Schattencurve gegeben ist, fortschreiten.

Auf das Nähere über Umhüllungscurven gehe ich hier nicht besonders ein, da sowohl deren Theorie als bekannt vorausgesetzt

Digitized by Google

werden muss, als auch das Verfahren sogleich am besten durch die Beispiele deutlich werden wird.

Es sei z. B. der Rotationskörper aus einem Parabelbogen, der sich um eine Axe hinter seinem Scheitel dreht, entstanden.

Die Begrenzungslinie des Schattens der durch die Axe rechtwinklig zur Neigung des Körpers gelegten Fläche ist, wie früher gezeigt, eine Curve von der Form

$$y_1 = f\left(\frac{x_1 \sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}\right) = \sqrt{\frac{p.\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}.x_1},$$

also wieder eine Parabel, deren Parameter $=\frac{p.\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$ ist; doch kommt hierauf weiter nichts an, sondern wir gehen gleich von der Parabel im Schatten aus, deren Gleichung wir $y_1{}^2 = px_1$ nehmen wollen. Ist nun fe die Schattenprojection der Axe und $og_3 = oh_3$ der kleinste Abstand derselben von der Curve (natürlich vom Scheitel), welchen wir d nennen wollen, so wird die neue Curve eine Umhüllungscurve ähnlicher Ellipsen sein, deren Mittelpunkt sich auf fe von o aus nach beiden Seiten fortbewegt, wobei die Axen sich nach den Entfernungen der Curve von ef ändern. Bezeichnen wir die variable Halbaxe der Ellipse durch r, so wird der andere Halbmesser nr, da die Ellipsen ähnlich sein sollen, wenn n die Verhältnisszahl zwischen beiden Axen bedeutet, und ist $n=1$, so ist die fortlaufende Linie ein Kreis, welcher Fall bei aufrechter Stellung des Körpers eintreten würde. Bezeichnen wir ferner die variable Entfernung des Halbmessers r von dem angenommenen Anfangspunkte o durch α (analog Littrow) und durch x und y die Coordinaten der neuen Curve, so wird nach der Gleichung der Ellipse:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2} = 1,$$

und nach der der Parabel:

$$r = d + \frac{\alpha^2}{p},$$

woraus folgt:

$$n^2y^2 + (\alpha-x)^2 = n^2(d+\frac{\alpha^2}{p})^2.$$

Aus dieser Gleichung ist nun α durch Differenziiren darauf als Function von x zu bestimmen und dessen Werth dann wieder zu substituiren.

Differenziirt man daher obige Gleichung, so folgt:

$$2(\alpha-x) = 2n^2(d+\frac{\alpha^2}{p})\frac{2\alpha}{p},$$

$$\alpha - x = 2n^2\frac{d\alpha}{p} + \frac{2n^2\alpha^3}{p^2},$$

$$\alpha^3 + \alpha(pd - \frac{p^2}{2n^2}) + \frac{p^2x}{2n^2} = 0,$$

Digitized by Google

wonach sich α als eine Function des 3ten Grades von x darstellt: und bei der Substitution derselben in obige Gleichung ist leicht ersichtlich, dass eine Curve höherer Ordnung resultiren müsse, worauf wir uns aber nicht weiter einlassen wollen, da wir dasselbe einfacher zeigen können, indem wir $d=\frac{p}{2n^2}$ annehmen; es wird dann:

$$\alpha^3=-\frac{p^2x}{2n^2},$$

$$\alpha=-\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2n^2}},$$

und sonach:

$$n^2y^2+(x+\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2n^2}})^2=n^2(\frac{p}{2n^2}+\sqrt[3]{\frac{p^4x^2}{4n^4p^3}})^2.$$

Setzt man zur Vereinfachung noch $n=1$, so wird:

$$y^2+(\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}+x)^2=(\frac{p}{2}+\sqrt[3]{\frac{px^2}{4}})^2,$$

$$y^2+\sqrt[3]{\frac{p^4x^2}{4}}+x^2+2x\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}=\frac{p^2}{4}+\sqrt[3]{\frac{p^2x^4}{16}}+p\sqrt[3]{\frac{px^2}{4}},$$

$$y^2+x^2+2x\sqrt[3]{\frac{p^2x}{2}}-\sqrt[3]{\frac{p^2x^4}{16}}-\frac{p^2}{4}=0,$$

$$y^2+x^2+x\sqrt[3]{x}(2\sqrt[3]{\frac{p^2}{2}}-\sqrt[3]{\frac{p^2}{16}})-\frac{p^2}{4}=0,$$

offenbar die Gleichung eines höhern Grades.

Viel günstiger fällt schon das Resultat aus, wenn der Körper durch eine hyperbolische Linie begrenzt ist, d. h., wenn die Parabel der vorigen Aufgabe in eine halbe Hyperbel übergeht.

Behält man vorige Bezeichnungen bei, so ist in diesem Falle:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d,$$

wo a und b die Axen der Hyperbel bezeichnen, und ist die Axe des Rotationskörpers zugleich die der Hyperbel, so dass sich also gleichsam eine ganze Hyperbel um ihre imaginäre Axe dreht (wie Taf. I. Fig. 1. darstellt), so wird:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}.$$

Für den Fall $r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d$ erhält man ebenfalls eine

Digitized by Google

Curve höhern Grades, für $r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}$ resultirt aber wieder eine Hyperbel, was sehr erfreulich ist, da gerade letzteres Verhältniss das des gewöhnlichen Umdrehungs-Hyperboloids ist.

Setzen wir vorerst:

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}-a+d,$$

so geht

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

über in:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2(\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+d-a)^2$$

$$=n^2(\frac{a^2}{b^2}(b^2+\alpha^2)+2(d-a)\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+(d-a)^2)$$

$$=n^2(2a^2+\frac{\alpha^2 . a^2}{b^2}+2(d-a)\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2}+d^2-2ad).$$

Die Differentiation giebt:

$$\alpha-x=n^2[\frac{a^2}{b^2}\alpha+\frac{(d-a)\frac{a}{b}\alpha}{\sqrt{b^2+\alpha^2}}],$$

$$(\alpha-x)\sqrt{b^2+\alpha^2}=n^2(\frac{a^2}{b^2}\alpha\sqrt{b^2+\alpha^2}+(d-a)\frac{a}{b}.\alpha),$$

$$\sqrt{b^2+\alpha^2}[\alpha(1-\frac{a^2n^2}{b^2})-x]=n^2(d-a)\frac{a}{b}.\alpha,$$

$$(\alpha(1-\frac{a^2n^2}{b^2})-x)^2(b^2+\alpha^2)=n^4(d-a)^2.\frac{a^2}{b^2}.\alpha^2,$$

$$(\alpha^2(1-\frac{a^2n^2}{b^2})^2+x^2-2\alpha(1-\frac{n^2a^2}{b^2})x)(b^2+\alpha^2)=n^4(d-a)^2\frac{a^2}{b^2}.\alpha^2.$$

Bezeichnet man $1-\frac{a^2n^2}{b^2}$ durch μ, so wird:

$$\alpha^4\mu^2+x^2\alpha^2-2\alpha^3\mu x+\alpha^2b^2\mu^2+b^2x^2-2b^2\alpha\mu x=n^4(d-a)^2.\frac{a^2}{b^2}.\alpha^2,$$

$$\alpha^4-\alpha^3.\frac{2x}{\mu}+\alpha^2(\frac{x^2}{\mu^2}+b^2-\frac{n^4(d-a)^2}{\mu^2}.\frac{a^2}{b^2})-\alpha.\frac{2b^2x}{\mu}+\frac{b^2x^2}{\mu^2}=0.$$

Bestimmt man hieraus α, so wird solches eine Function sein, in welcher x unter dem vierten Wurzelzeichen vorkommt, und setzt man daher allgemein $\alpha=\varphi(\sqrt[4]{x})$ und substituirt diese Grösse oben, so ist durch eine leichte Betrachtung sogleich zu sehen, dass x mit dem vierten Wurzelzeichen behaftet nicht ganz verschwinden

Digitized by Google

kann, so dass also eine Gleichung von wenigstens dem vierten Grade entstehen muss.

Bedeutend einfacher wird die Rechnung für

$$r=\frac{a}{b}\sqrt{b^2+\alpha^2};$$

denn es wird nun:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2.\frac{a^2}{b^2}(b^2+\alpha^2);$$

differenziirt:

$$\alpha-x=\frac{n^2.a^2}{b^2}.\alpha,$$

$$\alpha=\frac{x}{1-\frac{n^2a^2}{b^2}}=\frac{b^2x}{b^2-n^2a^2};$$

und daher die gesuchte Gleichung:

$$n^2y^2+(\frac{b^2x}{b^2-n^2a^2}-x)^2=n^2\frac{a^2}{b^2}(\frac{b^4x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+b^2),$$

$$n^2y^2+\frac{n^4a^4x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}=\frac{n^2a^2b^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+n^2a^2,$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{n^2a^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}=\frac{b^2x^2}{(b^2-n^2a^2)^2}+1,$$

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2(n^2a^2-b^2)}{(b^2-n^2a^2)^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2-n^2a^2}=1,$$

d. i. die einer Hyperbel, wo die frühere Axe a unverändert bleibt. b aber in $\sqrt{b^2-n^2a^2}$ übergeht (y sind hier die Abscissen, x die Ordinaten der neuen Hyperbel).

Ist $b^2<n^2a^2$, so wird die Curve nach der Formel eine Ellipse, doch ist dies augenscheinlich nur für die nächsten Punkte des Scheitels möglich, so dass also die andern Ellipsen keine Umhüllungscurve geben können; die nächst grössere wird immer die andere umschliessen. Der Schatten wird dann auch nicht mehr von der Umhüllungscurve abhängig sein, sondern nur aus den beiden Endellipsen bestehen, die sich dann schneiden müssen.

Durch diese Gleichung hat man nicht nur bewiesen, dass der Schatten des Hyperboloids wieder eine durch eine ganze Hyperbel begrenzte Fläche ist, da sich die Axe a nicht ändert, was in vielen Fällen schon von Nutzen sein wird, sondern man kann auch sogleich diese Hyperbel nach der Abhängigkeit der neuen von der alten Axe a und b construiren, was zwar nicht einfach ist, aber doch in vielen Fällen einen Vorzug dagegen verdient, dass man sich durch Schnitte o. a. mehr Punkte des Schattens bestimmt.

Digitized by Google

Von noch grösserm Vortheil als beim Hyperboloide wird aber die Construction durch Umhüllungscurven bei dem Umdrehungs-Ellipsoide oder Sphäroide und dem Umdrehungs-Paraboloide, woran sich dann ein Körper schliesst, der aus der Drehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entsteht. In diesen Fällen resultirt nicht nur dieselbe Curve, sondern es ergeben sich auch ziemlich einfache Abhängigkeitsverhältnisse, welche von wesentlichem Nutzen für die Zeichnung sind.

Aus der Vergleichung dieser Fälle mit den vorigen ersieht man zugleich, dass allemal dieselbe Curve entsteht, wenn die Rotation um eine Axe stattfindet, dass sich aber eine Linie höherer Ordnung ergiebt, wenn die Rotationsaxe nicht mit einer Axe der Erzeugungscurve zusammenfällt, daher auch bei der Ellipse und der Hyperbel zwei verschiedene Rotationsbewegungen möglich sind, nämlich um die grosse und kleine Axe, bei der Parabel aber blos eine einzige um ihre eine Axe, um im Schatten eine Curve derselben Art zu erhalten.

Ich werde nun auf diese Körper specieller eingehen und zwar beim Ellipsoide beginnen.

1) Soll (Taf. I. Fig. 3.) ein geneigt stehendes Sphäroid *ABCD* (wo wir den allgemeinen Fall annehmen, dass die Rotation um die grosse Axe stattgefunden hat) als Schatten auf der horizontalen Bodenfläche projicirt werden, so wird man, wie früher schon angegeben, erst den Schatten einer rechtwinklig zur Neigung liegenden, durch die Axe *AB* gehenden Durchschnittsfläche bestimmen und dann die Umhüllungscurve der ähnlichen Ellipsen suchen, welche die Projectionen von Schnitten rechtwinklig zur Axe darstellen und deren Fortschreiten durch die erstere Ellipse gegeben wird. Es sei nun die Gleichung der erstern Ellipse *abfg*, bei Beibehaltung der frühern Benennungen,

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{r^2}{b^2}=1,$$

so wird, da wie früher

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

ist, geht man vom Mittelpunkte o aus,

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2.\frac{b^2}{a^2}(a^2-\alpha^2).$$

Differenziirt man diese Gleichung, so folgt:

$$\alpha-x=-\frac{n^2b^2}{a^2}\alpha,\ \alpha=\frac{a^2x}{a^2+n^2b^2};$$

und folglich wird die Gleichung der Umhüllungscurve:

$$n^2y^2+(\frac{a^2x}{a^2+n^2b^2}-x)^2=n^2b^2-\frac{n^2b^2}{a^2}.\frac{a^4x^2}{(a^2+n^2b^2)^2}.$$

$$n^2y^2 + \frac{n^4b^4x^2}{(a^2+n^2b^2)^2} = n^2b^2 - \frac{n^2b^2a^2x^2}{(a^2+n^2b^2)^2},$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{n^2b^2x^2+x^2a^2}{(a^2+n^2b^2)^2} = 1.$$

$$\frac{x^2}{a^2+n^2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Der gesuchte Schatten ist also eine neue Ellipse, deren kleine Axe gleich der des Schattens des ersten Schnittes bleibt, während die grosse $= \sqrt{a^2+n^2b^2}$ wird, d. h., man muss b mit dem Verhältniss n (welches man leicht durch Messen zweier beliebigen r und nr, etwa of und oc, mit einem Maasstabe und Division erhalten kann, wenn es nöthig) multipliciren, welche Grösse sogleich in oc und od gegeben ist, und dann die Hypotenuse zu den rechtwinklig an einander gelegten Linien a und nb ziehen, um die grosse Axe zu erhalten. Noch einfacher kann man dieselbe auch dadurch finden, dass man tangential an den Aufriss in der Richtung des Lichtstrahls eine Linie zieht und deren Fusspunkt auf die verlängerte ab projicirt; denn man muss den Endpunkt erhalten, da der Aufriss als ein Vertikaldurchschnitt betrachtet werden kann.

Es ist einleuchtend, dass man bei gewöhnlicher Ausführung nicht einmal erst die Ellipsen $abfg$ und $cdfg$ zeichnen wird, sondern man findet nur die Punkte a, b, f, g, c und d, wo $oa = ob = a$, $of = og = b$, $oc = od = nb$ ist, und construirt dann, nachdem man, wie angegeben, die neuen Axen gefunden hat, sogleich die Schattenellipse, was am besten durch Krümmungskreise erfolgen wird.

Ist das Ellipsoid durch Drehung um die kleine Axe entstanden, so bedingt dies nur wenig Unterschied und kann somit füglich übergangen werden.

2) Den Schatten eines Umdrehungs-Paraboloids, wie ABC, zu verzeichnen (Taf. II. Fig. 1.).

Das Verfahren bleibt dem frühern ganz ähnlich, daher wir uns hier auch ziemlich kurz fassen können. Der Schatten des Schnittes durch $CDFG$ ist $cdfg$, und zwar wieder eine Parabel nach der frühern Angabe; man hat nicht nöthig, sie zu verzeichnen, sondern es genügt, die Punkte c, d, f und g zu wissen. Der Schatten irgend eines Kreisschnittes giebt die Axenpunkte k, h, i, l, oder einfacher nimmt man gleich f, g, a, b, und es ist nun die Umhüllungscurve zu suchen, welche entsteht, wenn ähnliche Ellipsen auf der Linie cd nach dem Gesetze der Parabel fortschreiten. Bezeichnet man analog den frühern Beispielen ok durch r, oi durch nr, nennt das variable $co = \alpha$ und die Coordinaten der neuen Curve x und y vom Anfangspunkte c aus, so wird, bezeichnet man durch p den Parameter der Curve fgc:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{(\alpha - x)^2}{nr^2} = 1$$

und

$$r^2 = p\alpha,$$

also:

Digitized by Google

$$n^2y^2 + (\alpha - x)^2 = n^2p\alpha;$$

differenziirt:

$$2(\alpha - x) = pn^2,\ \alpha = \frac{pn^2 + 2x}{2};$$

woraus folgt:

$$n^2y^2 + (\frac{pn^2 + 2x}{2} - x)^2 = n^2p(\frac{pn^2 + 2x}{2}),$$

$$n^2y^2 + \frac{p^2n^4}{4} = \frac{n^4p^2}{2} + x \cdot n^2p,$$

$$y^2 = \frac{n^2p^2}{4} + xp,$$

$$y^2 = p(\frac{n^2p}{4} + x),$$

d. i. die Gleichung einer Parabel, deren Anfangspunkt um $\frac{pn^2}{4}$ weiter auf der Abscissenaxe zurückliegt als bei der Parabel $y^2 = px$. Es findet sonach hier das eigenthümliche Verhältniss statt, dass die neue Curve von der alten nur dadurch verschieden ist, dass ihr Anfangspunkt um $\frac{n^2p}{4}$ weiter hinausgerückt wird. Ist die Ellipse ein Kreis, d. i. $n=1$, so wird die Entfernung $\frac{p}{4}$, d. h. der Scheitel der alten Parabel giebt dann den Brennpunkt der neuen. Um nun diese Parabel zu verzeichnen, ist vor Allem nöthig, p zu bestimmen, was ganz einfach auf rein geometrischem Wege erfolgt, indem in c der Scheitel, in f oder g ein beliebiger Punkt der Parabel vom Parameter p gegeben ist; man verbinde f und c durch eine gerade Linie und errichte darauf in f ein Perpendikel, welches die Abscissenaxe in m schneidet, es ist sodann $md=p$. Die Verhältnisszahl n findet man, wie beim Umdrehungs-Ellipsoide angegeben, $=\frac{db}{df}$ (oder $\frac{oi}{ok}$), und nimmt man dann p $\frac{n^2}{4}$mal und trägt solches von c rückwärts auf, so findet man den neuen Scheitel c_1, von welchem aus man nach der gewöhnlichen, ziemlich einfachen Parabelconstruction diese selbst verzeichnet. Auf andere, einfachere, Weise kann man auch den Scheitelpunkt wie beim Sphäroide finden, so dass man also nicht einmal n zu bestimmen braucht. Am Ende schliesst die Parabel natürlich tangential an den elliptischen Schatten der Basis des Körpers an.

3) Zwischen dem Sphäroide und dem Umdrehungs-Paraboloide mitten inne steht gleichsam der dritte zu betrachtende Körper, der nämlich, welcher aus der Drehung einer halben Hyperbel um ihre Abscissenaxe entsteht; denn in der Formel ist die Abweichung vom Ellipsoide gering, während er sich der Gestalt nach mehr dem Paraboloide nähert.

Eine abermalige Wiederholung der Zeichnung wäre jedenfalls überflüssig und ich beschränke mich daher hier darauf, blos

Digitized by Google

die Formel für die Schatten-Hyperbel herzuleiten, zumal ein solcher Körper nur selten vorkommt.

Behält man die frühern Bezeichnungen bei, so wird die Gleichung der Ellipse wieder:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2r^2,$$

während man für die Hyperbel hat:

$$\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{r^2}{b^2}=1;$$

es ist hier α, also auch x, vom Mittelpunkte (nicht dem Scheitel) der Hyperbel aus gezählt. Führt man nun die Rechnung wie gewöhnlich durch, so erhält man:

$$n^2y^2+(\alpha-x)^2=n^2.\frac{b^2}{a^2}(\alpha^2-a^2);$$

differenziirt:

$$\alpha-x=\frac{n^2b^2}{a^2}\alpha,\quad \alpha=\frac{a^2x}{a^2-n^2b^2},$$

und sonach

$$n^2y^2+(\frac{a^2x}{a^2-n^2b^2}-x)^2=\frac{n^2b^2}{a^2}(\frac{a^4x^2}{(a^2-n^2b^2)^2}-a^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2-n^2b^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

d. i die Gleichung einer Hyperbel, wo die grosse Axe $=\sqrt{a^2-n^2b^2}$, die kleine $=b$ ist.

Einen Uebelstand bei der Verzeichnung eines solchen Körpers giebt nun aber die Bestimmung von a und b, welche blos mittels Rechnung erfolgen kann, indem man mit dem Maasstabe zu zwei verschiedenen Abscissen in der erstern Hyperbel zwei verschiedene Ordinaten abnimmt; aus zwei Gleichungen lassen sich dann zwei Unbekannte a und b finden. Dies ist natürlich blos nöthig, wenn die Gleichung des schattenwerfenden Körpers nicht bestimmt gegeben ist, da sich sonst hieraus, wie oben gezeigt, a und b finden lässt. Ein um so günstigeres Verhältniss ist es daher, dass gerade dieser Körper, wie schon erwähnt, zu den seltenen gehört und durch das früher beschriebene Hyperboloid vertreten wird.

Ich hoffe, dass durch das Vorhergehende das Princip, auf welches es wesentlich ankommt, hinlänglich deutlich geworden sein wird, so dass man in vorkommenden, mehr oder weniger abweichenden Fällen im Stande ist, sich selbst neue Formeln und Abhängigkeiten zu entwickeln.

Zum Schlusse der Betrachtung über Rotationskörper will ich blos noch ein Beispiel anführen, um zu zeigen, dass das Verfahren sich nur wenig ändert, wenn die Lichtstrahlen nicht parallel der Ebene seiner Neigung auf den Körper fallen; es treten dann zusammengehörige Durchmesser an die Stelle der Axen.

Digitized by Google

Es sei also (Taf. II. Fig. 2.) ein Sphäroid *ABCD* von einem sowohl im Grund- als Aufriss schief stehenden Lichtstrahl *X* beleuchtet und es soll der Schatten gefunden werden, den es auf die horizontale Bodenfläche wirft.

(Um auch die sehr nützliche Anwendung auf das geometrische Zeichnen darzuthun, sei es mir erlaubt, hier abweichend darauf aufmerksam zu machen, wie leicht sich, hat man $A_1B_1C_1D_1$ im Aufriss gegeben, dieses Ellipsoid in den Grundriss zeichnen lässt; man hat blos nöthig, die Linien $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$ tangential von der Ellipse des Aufrisses herabzuziehen, so giebt $\alpha\beta$ eine Axe der Ellipse im Grundriss, während die zweite rechtwinklig dagegen, *FG*, natürlich gleich C_1D_1 ist; hieraus verzeichnet man dann leicht, am besten durch Krümmungskreise, die Ellipse. Es genügt zur Erklärung dieses Verfahrens, vorher zu wissen, dass wieder eine Ellipse resultiren müsse, und dies ist einleuchtend, da man sich als Ellipsen darstellende Kreise hat, die wieder nach einer projicirten Ellipse fortschreiten, ganz ähnlich wie bei dem früher beschriebenen Falle der Schattenconstruction.)

Man verzeichne sich zuerst, ganz wie früher, den Schatten einer durch die Axe *CD* gehenden, rechtwinklig zur Neigung des Körpers, also auch rechtwinklig zur Aufrissebene, liegenden Schnittebene, *abfg*, und hierauf den Schatten eines Kreisdurchschnittes des Körpers, am besten den durch die Mitte, als *cdfg*. Es ist nicht nöthig, beide Zeichnungen auszuführen, sondern es genügt, wie wir später sehen werden, die einer, nämlich am besten der kleinern, was von der Neigung des Ellipsoids abhängt; hier wird man also blos *abfg* auszuführen haben. Die Construction dieser Ellipsen ergiebt sich daraus, dass sowohl *ab* und *gf*, als auch *fg* und *cd* zusammengehörige Durchmesser derselben sind, wovon man sich dadurch überzeugen kann, dass sowohl die Axe *AB*, als auch der Kreisdurchmesser *CD* alle mit dem andern Durchmesser parallele Sehnen halbirt, was auch im Schatten bleiben muss. Die Aufgabe besteht nun eigentlich darin, die Umhüllungscurve zu suchen, welche aus der Fortbewegung von Ellipsen ähnlich *cdfg* auf *ab* nach dem Gesetze der Veränderung von Parallelen mit *gf* oder *of* in der Ellipse *abfg* entsteht; dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch, wenn man umgekehrt Ellipsen ähnlich *abgf* auf *cd* nach den Ordinaten der Ellipse *cdgf* sich fortlaufend denkt, was auch aus der Betrachtung des Ellipsoids selbst hervorgeht, und darauf gründet es sich, dass man eine beliebige der beiden Ellipsen ausziehen kann, nämlich die, welche man als fortschreitend annimmt, wozu man natürlich lieber die kleinere wählt. Dass aber überhaupt eine Ellipse ausgezogen werden muss und man nicht wie bei dem frühern Falle einer parallelen Beleuchtung verfahren kann, soll gleich im Folgenden näher gezeigt werden. Will man nämlich diese Aufgabe, wie sie hier gestellt ist, sogleich lösen, so wird man nicht nur Winkel einführen müssen, sondern auch ziemlich grosse Ausdrücke der Abhängigkeit erhalten, welche für die Zeichnung unbrauchbar sind; dagegen kommt man zu einem sehr einfachen Resultate, wenn man die zusammengehörigen Durchmesser der fortschreitenden Ellipse verlegt, nämlich so, dass der eine auf die Linie fällt, auf der die Ellipsen fortschreiten; es wird dann *hk* der eine, *mn* der andere der zusammengehörigen Durchmesser. Hiernach lassen sich

Digitized by Google

nun einfache Abhängigkeitsverhältnisse der Umhüllungscurve finden. Bezeichnet man ok als Halbmesser der sich verändernden Ellipse durch r und om durch nr, also $\frac{om}{ok}=n$, so wird, behält man die andern Bezeichnungen wie früher bei, so dass also $oc=od=a$, $of=og=b$, $\alpha=$Entfernung des r von o, x die Abscisse der Umhüllungscurve von o aus und y die dazu gehörige Ordinate parallel r ist, da für zusammengehörige Durchmesser dieselben Gleichungen als für die Axen gelten:

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{(\alpha-x)^2}{n^2r^2}=1$$

und

$$r=\mu\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2},$$

wo μ das Verhältniss angiebt, in dem die mit b parallelen Durchmesser zu dem variablen r stehen (es ist dies ein constantes Verhältniss, da beide Linien immer denselben Winkel einschliessende Durchmesser ähnlicher Ellipsen sind). Es ist nun aber hiernach r in dem Stande wie $ok=\mu b$, und bezeichnet man diese constante Grösse durch l, so wird demnach:

$$r=\frac{l}{a}\sqrt{a^2-\alpha^2},$$

und folglich

$$ny^2+(\alpha-x)^2=n^2\frac{l^2}{a^2}(a^2-\alpha^2),$$

welche Gleichung wir auch früher hatten, nur dass hier l statt dort b steht. Ganz ähnlich wird daher auch das Resultat:

$$\frac{x^2}{a^2+n^2l^2}+\frac{y^2}{l^2}=1,$$

die Gleichung einer Ellipse zwischen znsammengehörigen Durchmessern, von welchen einer $=\sqrt{a^2+n^2l^2}$ ist und der andere $=l$ bleibt.

Um also den Durchmesser der zu verzeichnenden Ellipse auf der verlängerten cd zu finden, errichte man in o ein Perpendikel, mache dasselbe $=nl$, d. i. $=om$, und ziehe die Hypotenuse pc, welche die verlangte Grösse $\sqrt{a^2+n^2l^2}$ giebt. Aus den zusammengehörigen Durchmessern hk und st beschreibt man nun wie gewöhnlich die Ellipse.

Die Construction der Ellipse aus zusammengehörigen Durchmessern kann auf verschiedene Weise erfolgen; eine ziemlich einfache Art will ich hier anhangsweise noch beifügen, ohne jedoch einen weitern Beweis dafür zu liefern.

Man beschreibe um den einen Durchmesser, am besten den grössern, AB (Taf. I. Fig. 4.), einen Kreis oder Halbkreis, errichte auf AB im Mittelpunkte C ein Perpendikel CF und ver-

Digitized by Google

binde *FE*; legt man nun durch beliebige Punkte C_1, C_2, C_3, C_4 etc. der *AB* ähnliche Dreiecke im Halbkreise, was leicht durch Parallelen geschieht, so erhält man in E_1, E_2, E_3, E_4 etc. beliebig viele Punkte der Ellipse.

Man kann auch die Methode der Construction durch Krümmungskreise hier anwenden, obgleich mit weniger Vortheil, als wenn die Axen gegeben sind.

Nachdem nun so das Princip festgestellt und auch die Rotationskörper ziemlich ausführlich betrachtet worden sind, bleibt es nur noch übrig, auch mit wenig Worten auf die gekrümmten Flächen der zweiten Ordnung überhaupt einzugehen und deren Relationen zu den beschriebenen Umdrehungskörpern der zweiten Ordnung anzugeben. Die hierhergehörigen Körper sind namentlich: das Ellipsoid, das Paraboloid (elliptisches Paraboloid), das Hyperboloid und zwar mit einem und mit zwei Mänteln oder mit ununterbrochener oder getrennten Höhlungen, und endlich das hyperbolische Paraboloid.

Was das Ellipsoid betrifft, so ist das Verfahren bei der Schattenzeichnung ganz wie beim Sphäroid, nur dass ein elliptischer Durchschnitt sich statt eines Kreisdurchschnittes im Schatten als Ellipse projicirt. Der einzige Unterschied, der eintreten kann, ist, dass sich bei paralleler Beleuchtung schon ein Fall ähnlich dem zuletzt erwähnten bei schiefer Beleuchtung herausstellt, was von der Stellung der Neigung des Körpers abhängt.

Das elliptische Paraboloid verhält sich zum Umdrehungsparaboloid ganz wie das Ellipsoid zum Sphäroid, so dass hierüber nichts weiter zu sagen ist, und ebendasselbe gilt von einem Hyperboloide mit einem Mantel zum Umdrehungshyperboloide, wie aus der Entstehung solcher Körper sehr leicht folgt; s. Leroy „Darstellende Geometrie", deutsch von Kauffmann. S. 38.

Das Hyperboloid mit zwei Mänteln oder getrennten Höhlungen findet seinen Repräsentanten in dem dritten der drei zuletzt betrachteten Rotationskörper, der aus der Drehung einer Hyperbel um ihre wirkliche Axe entsteht, nur dass wir im Beispiel sich blos eine halbe Hyperbel drehen liessen, während bei diesem Hyperboloid die andere Hälfte nicht vernachlässigt werden darf. Es hat dies noch den Vortheil, dass man dann gleich den Axenwerth *a* mit im Schatten erhält.

Der letzte dieser Körper, das hyperbolische Paraboloid, hat zwar keinen Vertreter im Frühern, doch werden wir auch darüber kurz hinweggehen können, indem der Körper zu ungewöhnlich ist, um eine Formelableitung zu lohnen, bei welcher man es offenbar nicht mit einer Umhüllungscurve fortlaufender Ellipsen, sondern vielmehr von Parabeln oder Hyperbeln zu thun hat, die nach einer andern Parabel fortschreiten.

Digitized by Google

V.

Ueber die verschiedenen Ausdrücke des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve.

Von dem
Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,
astronomischen Rechner an der Königl. Sternwarte zu Berlin.

In den Lehrbüchern der Mechanik kommen verschiedene Ausdrücke des Krümmungshalbmessers in Anwendung, je nachdem man andere Coordinaten oder andere Urvariabeln annimmt. Einige derselben werden auf nicht ganz einfache Weise hergeleitet, weshalb hier einmal der Versuch gemacht werden soll, dieselben systematisch herzuleiten. Hierbei wird jedoch die Aufgabe in so fern beschränkt, als nur eine Curve einfacher Krümmung, die also in einer Ebene liegt, betrachtet werden soll.

§. 1. Aufgabe. Es ist eine Curve AP (Taf. II. Fig. 3.) und auf ihr der Punkt P durch die rechtwinkligen Coordinaten $AB = x$ und $PB = y$ gegeben; man soll den Krümmungshalbmesser der Curve in diesem Punkte bestimmen.

Auflösung. Sind $AD = \alpha$ und $CD = \beta$ die Coordinaten des Mittelpunktes C des osculirenden Kreises, ist γ sein Radius, d. h. der gesuchte Krümmungshalbmesser; so müssen bekanntlich für die Curve und den Kreis sowohl die Coordinaten des Punktes P, als auch ihre ersten und zweiten Differentiale identisch sein. Da nun die Gleichung des gesuchten Kreises ist:

$$1)\quad \gamma^2 = (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2,$$

so ergiebt sich hieraus durch zweimalige Differentiation, weil γ, α und β constant sind:

$$2)\quad 0 = (y-\beta)\,dy + (x-\alpha)\,dx,$$

$$3)\quad 0 = dy^2 + dx^2 + (y-\beta)\,ddy + (x-\alpha)\,ddx.$$

Durch Verbindung dieser zwei Gleichungen erhält man

Digitized by Google

$$4)\ y-\beta=\frac{(dy^2+dx^2)\,dx}{dy\,ddx-dx\,ddy}$$

und

$$5)\ x-\alpha=-\frac{(dy^2+dx^2)\,dy}{dy\,ddx-dx\,ddy}.$$

Substituirt man die letztern Werthe in 1) und zieht alsdann die Quadratwurzel aus, so ergiebt sich

$$\text{I.}\quad \gamma=\frac{(dy^2+dx^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\,ddx-dx\,ddy}=\frac{ds^3}{dy\,ddx-dx\,ddy}.$$

Hier bezeichnet $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$ das Element des Bogens der Curve und es ist hier keine der Veränderlichen x, y und s als urvariabel vorausgesetzt.

Zusatz 1. Nimmt man, wie es gewöhnlich geschieht, x als urvariabel, also

$$ddx=0$$

an, so erhält man sogleich

$$\text{II.}\quad \gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,ddy}=-\frac{ds^3}{dx\,ddy}.$$

In dieser Formel pflegt man wie hier das negative Zeichen zu wählen, wenn die Curve gegen die Abscissenaxe concav ist.

Unter derselben Voraussetzung, dass $ddx=0$ sei, erhält man aus $ds^2=dx^2+dy^2$:

$$ds\,dds=dy\,ddy,$$

und so, wenn man ddy aus II. eliminirt:

$$\text{III.}\quad \gamma=-\frac{ds^2.dy}{dx\,dds}.$$

Zusatz 2. Nimmt man y als urvariabel an, setzt also

$$ddy=0,$$

so folgt aus I.:

$$\text{IV.}\quad \gamma=\frac{ds^3}{dy\,ddx}.$$

Unter derselben Voraussetzung folgt aber aus $ds^2=dx^2+dy^2$:

$$ds\,dds=dx\,ddx,$$

und wenn man daher ddx aus IV. eliminirt:

$$\text{V.}\quad \gamma=\frac{ds^2.dx}{dy\,dds}.$$

Digitized by Google

Zusatz 3. Nimmt man endlich s als urvariabel, also

$$dds = 0$$

an, so wird aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$:

$$0 = dx\,ddx + dy\,ddy.$$

Wenn man nun mittelst der letzten Gleichung zuerst ddy, dann ddx aus I. eliminirt, so erhält man

$$\text{VI.}\quad \gamma = \frac{ds\,dy}{ddx},$$

$$\text{VII.}\quad \gamma = -\frac{ds\,dx}{ddy}.$$

§. 2. Aufgabe. Man soll (Taf. II. Fig. 4.) den Krümmungshalbmesser im Punkt P der Curve AP ausdrücken durch Polarcoordinaten, indem dieser Punkt durch den Radius Vector $PM = r$ und den Winkel $PMA = v$ bestimmt wird.

Auflösung. Es sei die Länge AM, durch welche die Lage des Pols M gegen den vorigen Anfangspunkt bestimmt wird, constant $= a$.

Alsdann erhalten wir sogleich zwischen den rechtwinkligen Coordinaten des §. 1. und den jetzigen Polarcoordinaten die zwei Gleichungen:

$$1)\ x = a - r\cos v,$$

$$2)\ y = r\sin v.$$

Differentiiren wir diese Gleichungen, ohne Annahme einer bestimmten Urvariabeln, so erhalten wir:

$$3)\ dx = r\sin v\,dv - \cos v\,dr,$$

$$4)\ dy = r\cos v\,dv + \sin v\,dr.$$

Aus 3) und 4) ergiebt sich sogleich, wie bekannt:

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2.$$

Differentiiren wir ferner 3) und 4) noch einmal, so folgt:

$$5)\ ddx = r\cos v\,dv^2 + 2\sin v\,dr\,dv + r\sin v\,ddv - \cos v\,ddr,$$

$$6)\ ddy = -r\sin v\,dv^2 + 2\cos v\,dr\,dv + r\cos v\,ddv + \sin v\,ddr.$$

Substituirt man die so erhaltenen Werthe von dx, dy, ddx und ddy in I., so ergiebt sich:

$$\text{VIII.}\quad \gamma = \frac{(r^2dv^2 + dr^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2dv^3 + 2dr^2dv - r\,dv\,ddr + r\,dr\,ddv}$$

$$= \frac{ds^3}{r^2dv^3 + 2dr^2dv - r\,dv\,ddr + r\,dr\,ddv}.$$

Digitized by Google

Hier ist keine der drei veränderlichen Grössen s, r und v als urvariabel angenommen.

Zusatz 1. Nimmt man v als urvariabel, also

$$ddv = 0$$

an, so erhält man aus VIII. unmittelbar:

$$\text{IX.} \quad \gamma = \frac{ds^3}{r^2 dv^3 + 2\,dr^2\,dv - r\,dv\,ddr}.$$

Unter dieser Voraussetzung wird aber aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$ds\,dds = r\,dr\,dv^2 + dr\,ddr,$$

und wenn man mittelst der letzten Gleichung ddr aus IX. eliminirt, nach einiger Reduction:

$$\text{X.} \quad \gamma = \frac{ds^2\,dr}{2\,ds\,dr\,dv - r\,dds\,dv}.$$

Zusatz 2. Nimmt man r als urvariabel, also

$$ddr = 0$$

an, so erhält man aus VIII.:

$$\text{XI.} \quad \gamma = \frac{ds^3}{r^2 dv^3 + 2\,dr^2\,dv + r\,dr\,ddv}.$$

Wir erhalten aber bei dieser Annahme aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$ds\,dds = r\,dr\,dv^2 + r^2 dv\,ddv,$$

und wenn man nun ddv aus XI. eliminirt und reducirt:

$$\text{XII.} \quad \gamma = \frac{r\,ds^2\,dv}{r\,ds\,dv^2 + dr\,dds}.$$

Zusatz 3. Endlich wollen wir s als urvariabel oder

$$dds = 0$$

annehmen. Alsdann folgt aus $ds^2 = r^2 dv^2 + dr^2$:

$$0 = r\,dr\,dv^2 + r^2\,dv\,ddv + dr\,ddr.$$

Eliminirt man mittelst dieser Gleichung zuerst ddr, dann ddv aus VIII., so erhält man nach kurzer Reduction:

$$\text{XIII.} \quad \gamma = \frac{ds\,dr}{2\,dr\,dv + r\,ddv},$$

Digitized by Google

$$\text{XIV.}\quad \gamma=\frac{rds\,dv}{rdv^2-ddr}.$$

Anmerkung. Hiermit sind alle einzelnen Fälle, welche be rechtwinkligen und Polarcoordinaten vorkommen können, erschöpft dagegen lässt sich noch ein recht einfacher Ausdruck für de Krümmungshalbmesser darstellen, indem man das vom Pol M au die Tangente in P gefällte Perpendikel MQ als veränderlich Grösse einführt. Setzen wir demnach $MQ=p$, den Winkel PTM welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, $=\delta$ und de Winkel $QPM=\varepsilon$; so ist bekanntlich

$$\tang\delta=\frac{dy}{dx},\quad \sin\delta=\frac{dy}{ds}\ \text{und}\ \cos\delta=\frac{dx}{ds}.$$

Ferner haben wir

$$\varepsilon=\delta+v,$$

$$\sin\varepsilon=\frac{\cos v dy+\sin v dx}{ds}.$$

Substituirt man hier die Werthe von dx und dy aus §. 2. unter No. 3. und 4., so wird:

$$\sin\varepsilon=\frac{rdv}{ds}$$

und

$$p=r\sin\varepsilon=\frac{r^2dv}{ds}.$$

Nimmt man nun, wie in §. 2. Zusatz 1., v als urvariabel, also

$$ddv=0$$

an, so erhält man durch Differentiation der letzten Gleichung:

$$dp=\frac{2rdr\,dv}{ds}-\frac{r^2\,dv\,dds}{ds^2}$$

$$=\frac{2rdr\,dv}{ds}-\frac{r^2dv}{ds^2}\cdot\frac{r\,dr\,dv^2+dr\,ddr}{ds}\qquad(\text{§. 2. Zus. 1.})$$

$$=\frac{rdr\{r^2\,dv^3-rdv\,ddr+2dr^2\,dv\}}{ds^3}.$$

Vergleicht man diesen Werth mit IX., so erhält man sogleich

$$\text{XV.}\quad \gamma=\frac{rdr}{dp}.$$

Es scheint nicht unangemessen, diese seltener vorkommende Formel durch einige Beispiele zu erläutern.

Digitized by Google

Beispiel I. Es sei $ATMB$ (Taf. II. Fig. 5.) eine Ellipse, deren halbe grosse Axe $=a$ und halbe kleine Axe $=b$ ist. Für den Mittelpunkt C als Anfangspunkt oder Pol und die grosse Axe als Abscissenaxe, sei die Abscisse CQ des beliebigen Punktes $M=x$, die Ordinate $MQ=y$, der Radius Vector $CM=r$, TMR die in M gezogene Tangente und $CT=p$ das auf sie gefällte Perpendikel. Aus der Gleichung

$$1)\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

folgt sogleich

$$2)\quad \operatorname{tang}\alpha=-\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}.$$

Ferner

$$p=(\frac{y}{\operatorname{tang}\alpha}+x)\sin\alpha,$$

d. h. weil $\sin\alpha=\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ist:

$$3)\quad p=\frac{xdy-ydx}{\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

oder, indem man dx eliminirt:

$$4)\quad p=\frac{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}.$$

Aus

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ und } x^2+y^2=r^2$$

erhält man aber

$$x^2=\frac{a^2(r^2-b^2)}{a^2-b^2} \text{ und } y^2=\frac{b^2(a^2-r^2)}{a^2-b^2},$$

und wenn man diese Werthe in 4) substituirt:

$$5)\quad p=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2-r^2}}.$$

Hieraus erhält man durch Differentiation:

$$\frac{dp}{dr}=\frac{abr}{(a^2+b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und so nach XV.

$$\gamma=\frac{(a^2+b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Digitized by Google

Beispiel 2. Es bleibe alles wie im vorigen Beispiele, jedoch liege der Anfangspunkt der Coordinaten oder der Pol in dem einen Brennpunkte F. Es sei der Radius Vector $FM = r'$ und das aus F auf die Tangente gefällte Perpendikel $FT' = p'$. Alsdann ist, weil der Abstand $FC = ae$ ist, wo

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

die Excentricität bezeichnet,

$$p' = p + ae \sin \alpha$$

oder

$$1)\ p' = \frac{ab + bex}{\sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}.$$

Ist nun F' der zweite Brennpunkt, so wird im Dreiecke FMF', dessen Seite FF' in C halbirt ist, nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie:

$$r'^2 + (2a - r')^2 = 2r^2 + 2a^2e^2 = 2r^2 + 2a^2 - 2b^2$$

und so:

$$2)\ a^2 + b^2 - r^2 = 2ar' - r'^2.$$

Ferner aus $r'^2 = y^2 + (ae + x)^2$:

$$3)\ ex = r' - a.$$

Substituirt man nun die Werthe von 2) und 3) in 1): so erhält man

$$4)\ p' = \frac{br'}{\sqrt{2ar' - r'^2}}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Differentiation:

$$5)\ \frac{dp'}{dr'} = \frac{abr'}{(2ar' - r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und nun nach XV.

$$\gamma = \frac{(2ar' - r'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

Dieser Ausdruck würde sich auch unmittelbar ergeben haben, wenn man den Werth von $a^2 + b^2 - r^2$ aus 2) in die Gleichung für γ des vorigen Beispiels substituirt hätte.

Beispiel 3. Es sei AMB (Taf. II. Fig. 6.) eine hyperbolische Spirallinie, also wenn $\angle HCM = v$ und der Radius Vector $CM = r$ gesetzt wird, ihre Gleichung

$$1)\ rv = a,$$

Digitized by Google

wo a constant ist. Die gerade Linie TMR sei eine Tangente an der Curve, dieselbe bilde verlängert mit der Axe ACR einen Winkel $=\delta$. Ferner sei $CT=p$ das von C auf die Tangente gefällte Perpendikel, endlich $CG=x$ und $MG=y$ die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes M in Bezug auf C als Anfangspunkt und CR als Abscissenaxe. Da nun

$$2)\quad x=-r\cos v,$$

$$3)\quad y=r\sin v;$$

so ergiebt sich durch Differentiation der Gleichungen 1), 2) und 3) und Verbindung derselben;

$$4)\quad dx=r\sin v dv+\frac{r\cos v dv}{v},$$

$$5)\quad dy=r\cos v dv-\frac{r\sin v dv}{v}.$$

Hieraus folgt:

$$6)\quad \operatorname{tang}\delta=-\frac{dy}{dx}=\frac{\sin v-v\cos v}{\cos v+v\sin v},$$

$$7)\quad \sin\delta=\frac{\sin v-v\cos v}{\sqrt{1+v^2}}.$$

Ferner

$$8)\quad RG=\text{subtang}=r\sin v\frac{\cos v+v\sin v}{\sin v-v\cos v},$$

$$9)\quad CR=x+\text{subtang}=\frac{rv}{\sin v-v\cos v};$$

endlich, weil $CT=CR\sin\delta$:

$$10)\quad p=\frac{rv}{\sqrt{1+v^2}}=\frac{ar}{\sqrt{r^2+a^2}}.$$

Aus 10) folgt:

$$\frac{dp}{dr}=\frac{a^3}{(a^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und so nach XV.

$$\gamma=\frac{r(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}.$$

Substituirt man statt r seinen Werth durch v nach 1), so erhält man auch:

$$\gamma=\frac{a(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{v^3}.$$

VI.

Bemerkungen über die Kurve der Krümmungsmittelpunkte.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Dass der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte für die Punkte einer Kurve von doppelter Krümmung keine Evolute der letztern ist, hat unter Andern Lacroix im Traité du calcul diff. etc. Tom. I. p. 625. Paris. 1810. synthetisch und p. 630—31 auch analytisch erwiesen *). Die Krümmungsradien tangiren weder den Ort der Krümmungsmittelpunkte, noch ist das Differential des Bogens der letztern dem Differential des Krümmungsradius gleich. Ich habe die Relation zwischen den beiden Differentialien, sowie die relative Lage der Tangente und des Krümmungsradius aufgesucht, was meines Wissens noch nicht geschehen ist, und deshalb hier mitgetheilt wird, weil es bei manchen Untersuchungen von Nutzen sein kann.

Bezeichnet x, y, z einen beliebigen Punkt einer Kurve im Raume, α, β, γ den ihm zugehörenden Krümmungsmittelpunkt, ϱ den Krümmungshalbmesser,

$$1.\quad A(x-\alpha)+B(y-\beta)+C(z-\gamma)=0$$

die Osculationsebene im Punkte x, y, z, deren Durchschnitt mit der Kugel

$$2.\quad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\varrho^2$$

den Osculationskreis giebt, so gehören dem letztern, weil er durch drei unendlich einander benachbarte Punkte der Kurve geht, bekanntlich noch folgende Gleichungen an, die durch zweimalige Differentiation der beiden vorhergehenden nach x, y, z entstehen:

---

*) Man vergl. auch Littrow analyt. Geometrie. p. 294. Wien. 1823

Digitized by Google

3. $A\partial x + B\partial y + C\partial z = 0,$
4. $(x-\alpha)\partial x + (y-\beta)\partial y + (z-\gamma)\partial z = 0,$
5. $A\partial^2 x + B\partial^2 y + C\partial^2 z = 0,$
6. $(x-\alpha)\partial^2 x + (y-\beta)\partial^2 y + (z-\gamma)\partial^2 z + \partial s^2 = 0;$

wo $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$ ist. Man findet hier die Coefficienten der Osculationsebene:

$$7.\quad \begin{cases} A = \partial y\,\partial^2 z - \partial z\,\partial^2 y, \\ B = \partial z\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 z, \\ C = \partial x\,\partial^2 y - \partial y\,\partial^2 x; \end{cases}$$

und für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Gleichungen

$$8.\quad D^2(x-\alpha) = P\partial s^2,\ D^2(y-\beta) = Q\partial s^2,\ D^2(z-\gamma) = R\partial s^2;$$

wenn wir zur Abkürzung

$$9.\quad \begin{cases} C\partial y - B\partial z = P, \\ A\partial z - C\partial x = Q, \\ B\partial x - A\partial y = R, \\ A^2 + B^2 + C^2 = D^2 \end{cases}$$

setzen. Eliminirt man aus den drei Gleichungen 8. x (also auch y, z als bekannte Funktionen von x), so bekommt man zwei Gleichungen in α, β, γ, welche die Kurve der Krümmungsmittelpunkte ausdrücken.

Es sei nun Θ der Winkel, welchen die Tangente an die Kurve der Krümmungsmittelpunkte in einem bestimmten Punkte derselben α, β, γ mit dem entsprechenden Krümmungsradius bildet; da die Gleichungen der Tangente sind $X-\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}(Z-\gamma)$, $Y-\beta = \frac{\partial\beta}{\partial\gamma}(Z-\gamma)$; die Gleichungen des Krümmungsradius $X - x = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}(Z-z)$, $Y-y = \frac{y-\beta}{z-\gamma}(Z-z)$; so ist

$$10.\quad \cos\Theta = \pm\frac{(x-\alpha)\partial\alpha + (y-\beta)\partial\beta + (z-\gamma)\partial\gamma}{\varrho\partial\sigma},$$

wo $d\sigma = \sqrt{\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2}$ das Differential des Bogens der Kurve der Krümmungsmittelpunkte ist. Die Differentiation der Gleichung 2. mit Rücksicht auf 4. giebt aber

$$11.\quad (x-\alpha)\partial\alpha + (y-\beta)\partial\beta + (z-\gamma)\partial\gamma = -\varrho\partial\varrho,$$

folglich nach 10. und 11.

$$12.\quad \partial\varrho = \pm\cos\Theta\partial\sigma.$$

Digitized by Google

Es kommt jetzt darauf an, den Winkel Θ zu bestimmen. Zu dem Ende muss man eine andere Relation zwischen den Differentialen $\partial\varrho$, $\partial\sigma$ suchen.

Differenziren wir die Gleichungen 1. und 4., indem Alles veränderlich gedacht wird, und berücksichtigen dabei 3. und 6., so kommt

$$-A\partial\alpha - B\partial\beta - C\partial\gamma + (x-\alpha)\partial A + (y-\beta)\partial B + (z-\gamma)\partial C = 0,$$
$$\partial x\partial\alpha + \partial y\partial\beta + \partial z\partial\gamma = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen der Reihe nach $\partial\gamma$, $\partial\beta$, $\partial\alpha$ und setzt zur Abkürzung

$$13.\quad (x-\alpha)\partial A + (y-\beta)\partial B + (z-\gamma)\partial C = A\partial\alpha + B\partial\beta + C\partial\gamma = T,$$

so erhält man

$$14.\quad \begin{cases} Q\partial\alpha - P\partial\beta = T\partial z, \\ R\partial\beta - Q\partial\gamma = T\partial x, \\ P\partial\gamma - R\partial\alpha = T\partial y. \end{cases}$$

Nun betrachte man die Gleichung 11., multiplicire sie der Reihe nach mit P, Q, R und setze im ersten Falle für $P\partial\beta$, $P\partial\gamma$, im zweiten für $Q\partial\alpha$, $Q\partial\gamma$, im dritten für $R\partial\alpha$, $R\partial\beta$ ihre sich aus 14. ergebenden Werthe, so kommt für $P(x-\alpha) + Q(y-\beta) + R(z-\gamma) = U$:

$$15.\quad \begin{cases} U\partial\alpha = T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma) - P\varrho\partial\varrho, \\ U\partial\beta = T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha) - Q\varrho\partial\varrho, \\ U\partial\gamma = T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta) - R\varrho\partial\varrho. \end{cases}$$

Jetzt quadrire man diese Gleichungen, addire die Quadrate und ziehe die Wurzel aus, so erhält man

$$16.\quad U\partial\sigma = \sqrt{[(T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma) - P\varrho\partial\varrho)^2 + (T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha) - Q\varrho\partial\varrho)^2 + (T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta) - R\varrho\partial\varrho)^2]}.$$

Setzt man aber für $x-\alpha$, $y-\beta$, $z-\gamma$ ihre Werthe aus 8., so wird $U = \frac{P^2+Q^2+R^2}{D^2}\partial s^2$; bekanntlich ist aber $P^2+Q^2+R^2 = D^2\partial s^2$, also

$$17.\quad U = \partial s^4.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung 16. giebt die Entwickelung

$$\{T\partial z(y-\beta) - T\partial y(z-\gamma)\}^2 + \{T\partial x(z-\gamma) - T\partial z(x-\alpha)\}^2 + \{T\partial y(x-\alpha) - T\partial x(y-\beta)\}^2 = T^2\varrho^2\partial s^2;$$

ferner, mit Berücksichtigung von 8.:

$$P\{\partial z(y-\beta) - \partial y(z-\gamma)\} + Q\{\partial x(z-\gamma) - \partial z(x-\alpha)\} + R\{\partial y(x-\alpha) - \partial x(y-\beta)\} = 0,$$

Digitized by Google

und somit verwandelt sich die Gleichung 16. in

$$18.\quad \partial s^3 \partial \sigma = \varrho \sqrt{T^2 + D^2 \partial \varrho^2}.$$

Weil endlich der Krümmungsradius $\varrho = \frac{\partial s^3}{D}$, so hat man statt 18. die Gleichung

$$19.\quad \partial \sigma = \sqrt{\left(\frac{T}{D}\right)^2 + \partial \varrho^2}.$$

Aus dieser Relation folgt leicht $\frac{T}{D} = \sin \Theta \partial \sigma$ oder $\sin \Theta = \frac{T}{D \partial \sigma}$ $= \frac{A \partial \alpha + B \partial \beta + C \partial \gamma}{D \partial \sigma}$. Daraus sieht man, dass Θ zugleich der Winkel ist, welchen die Tangente mit der Osculationsebene bildet, dass folglich die Projection der Tangente auf die Osculationsebene der Krümmungsradius ist.

Für die Grösse T ist jetzt ein Ausdruck zu suchen, in welchem blos die Elemente der gegebenen Kurve vorkommen. Ein solcher ergiebt sich leicht aus

$$T = (x - \alpha) \partial A + (y - \beta) \partial B + (z - \gamma) \partial C.$$

Denn man hat

$$\partial A = \partial y \partial^3 z - \partial z \partial^3 y,$$
$$\partial B = \partial z \partial^3 x - \partial x \partial^3 z,$$
$$\partial C = \partial x \partial^3 y - \partial y \partial^3 x;$$

folglich, wenn man diese Werthe in die vorhergehende Gleichung einführt und für $x - \alpha$, $y - \beta$, $z - \gamma$ ihre Werthe aus 8. nimmt:

$$20.\quad T = \frac{\partial s^4}{D^2}(A \partial^3 x + B \partial^3 y + C \partial^3 z)$$
$$= \frac{\partial s^4}{D^2}[\partial x (\partial^2 y \partial^3 z - \partial^2 z \partial^3 y) + \partial y (\partial^2 z \partial^3 x - \partial^2 x \partial^3 z)$$
$$+ \partial z (\partial^2 x \partial^3 y - \partial^2 y \partial^3 x)].$$

Bezeichnet τ den Flexionswinkel, so ist bekanntermassen

$$21.\quad T = \tau d s^3,$$

und die Grösse τ, also auch T verschwindet, oder es wird $\partial \varrho = \pm \partial \sigma$, $\Theta = 0$, wenn die gegebene Kurve von einfacher Krümmung ist. Nur in diesem Falle ist folglich die Kurve der Krümmungsmittelpunkte eine Evolute der gegebenen.

Für die Verhältnisse $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ endlich kann man die Cosinusse der Neigungswinkel der Osculationsebene gegen die Ebenen

Digitized by Google

der yz, xz, xy einführen; heissen diese resp. ν, μ, λ, so ist nach 20.:

$$22. \quad T = \frac{\partial s^4}{D}(\cos\nu\partial^3 x + \cos\mu\partial^3 y + \cos\lambda\partial^3 z)$$
$$= \varrho\partial s(\cos\nu\partial^3 x + \cos\mu\partial^3 y + \cos\lambda\partial^3 z).$$

VII.

Beweis eines Theorems von den Kegelschnitten.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Durch vier Punkte in einer Ebene sei ein beliebiger Kegelschnitt gelegt; es wird die Richtung der beiden Axen (der *einen* Axe der Parabel) gesucht.

Nimmt man zwei Gegenseiten des durch die vier Punkte bestimmten Vierecks als Coordinatenaxen an, welche den Winkel u einschliessen, und bezeichnet die Coordinaten der beiden auf der Axe der x liegenden Punkte durch α, 0; α', 0; die Coordinaten der beiden andern auf der Axe der y liegenden Punkte durch 0, β; 0, β'; die Gleichung des Kegelschnitts, der um das Viereck beschrieben worden, durch

$$Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0;$$

so hat man folgende Relationen:

$$1. \quad C\alpha^2 + 2E\alpha + F = 0,$$
$$2. \quad C\alpha'^2 + 2E\alpha' + F = 0,$$
$$3. \quad A\beta^2 + 2D\beta + F = 0,$$
$$4. \quad A\beta'^2 + 2D\beta' + F = 0.$$

Eliminirt man E aus den beiden ersten Gleichungen, D aus den beiden andern, so kommt

Digitized by Google

$$5.\ C=\frac{F}{\alpha\alpha'},\ A=\frac{F}{\beta\beta'}.$$

Ist nun ξ der Winkel, welchen die Axen des Kegelschnitts mit der Axe der x bilden, so hat man bekanntermassen

$$6.\ \operatorname{tang} 2\xi=\frac{C\sin 2u-2B\sin u}{A-2B\cos u+C\cos 2u},$$

folglich, wenn man die Werthe von A und C aus 5. in 6. einführt:

$$7.\ \operatorname{tang} 2\xi=\frac{F\beta\beta'\sin 2u-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\sin u}{F(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\cos u}.$$

Damit ist die Richtung der Axen nur von dem Verhältniss $\frac{B}{F}$ abhängig und somit noch unbestimmt, wie es auch sein muss, in dem durch vier Punkte unendlich viele Linien zweiten Grades gelegt werden können.

Indessen giebt es einen Fall, in welchem tang 2ξ von $\frac{B}{F}$ unabhängig ist, und um diesen aufzufinden, setze man tang $2\xi=\gamma$, indem γ eine constante Grösse bezeichnen soll. Bringt man die Gleichung

$$\frac{F\beta\beta'\sin 2u-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\sin u}{F(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)-2B\alpha\alpha'\beta\beta'\cos u}=\gamma$$

auf Null, so erhält man

$$F\{\beta\beta'\sin 2u-\gamma(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)\}-2B\alpha\alpha'\beta\beta'(\sin u-\gamma\cos u)=0,$$

und da diese Gleichung für jedes B gelten soll, einzeln:

$$8.\ \beta\beta'\sin 2u-\gamma(\alpha\alpha'+\beta\beta'\cos 2u)=0,$$

$$9.\ \sin u-\gamma\cos u=0.$$

Eliminirt man γ aus diesen beiden Gleichungen, so entsteht $(\beta\beta'-\alpha\alpha')\sin u=0$, also, da $\sin u$ nicht verschwindet,

$$10.\ \beta\beta'=\alpha\alpha'.$$

Man erhält ferner aus 9. tang $u=\gamma$, also

$$11.\ \operatorname{tang} 2\xi=\operatorname{tang} u.$$

Man übersieht leicht, dass der Gleichung 10. der Fall entspricht, in welchem die vier Punkte in einer Kreislinie liegen, und da nach 11.

$$\xi=\tfrac{1}{2}u \text{ und } \xi=90^0+\tfrac{1}{2}u,$$

so haben wir folgendes Theorem, welches mir vor längerer Zeit als ein von Clausen gefundenes von dem Herrn Herausgeber gelegentlich zum Beweise vorgelegt wurde:

Digitized by Google

„Beschreibt man durch vier in einer Kreislinie liegende Punkte unendlich viele Linien des zweiten Grades, so sind deren Axen einer und derselben Richtung parallel, derjenigen nämlich, welche die von den Gegenseiten des Vierecks gebildeten Winkel halbirt."

VIII.

Elementare Darstellung einer höchst einfachen Berechnung des Kreisverhältnisses.

Von

Herrn Doctor Wilh. Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow.

1. J. Schwab (gestorben 1813 zu Nancy) hat bekanntlich in einem kleinen Werkchen (Elémens de géométrie. 8. Nancy. 1813. p. 104) ein äusserst einfaches Verfahren gelehrt *), das Verhältniss π der Kreislinie zum Durchmesser näherungsweise zu bestimmen, welches auch bereits einige (freilich nur wenige) neuere Lehrbücher der Geometrie aufgenommen haben; z. B. Vincent in seinem Cours de géométrie.

Es gründet sich dieses Verfahren auf den leicht nachweisbaren Zusammenhang umfangsgleicher regelmässiger Vielecke, dass, wenn R, r bei einem regelmässigen $n$ecke, und R', r' bei einem regelmässigen $2n$ecke, welche gleiche Umfänge haben, die Halbmesser der um- und eingeschriebenen Kreise vorstellen,

$$r' = \frac{r+R}{2},\ R' = \sqrt{Rr'}$$

*) Terquem weist in Liouville „Journal de mathém." t. 3. an. 1838. p. 98. nach, dass schon Descartes („Oeuvres de Descartes" publ. par V. Cousin. t. 11. p. 442.) diesen Vorgang gelehrt und Euler im J. 1763 („Novi comm. Petrop." t. 8. p. 157.) darauf aufmerksam gemacht hat. — So muss das in den Bibliotheken Vergrabene immer wieder neu erfunden werden!

Digitized by Google

ist. Verdoppelt man nun die Seitenzahl fortwährend und stellt die Halbmesser der successiven Vielecke in die Reihe

$$r\,,R\,;\;\; r'\,,R'\,;\;\; r''\,,R''\,;\;\; r'''\,,R'''\,;\;\; \ldots\,;$$

so ist vom dritten Gliede an jedes folgende erst das arithmetische und dann das geometrische Mittel; ja sogar, wenn bei weiterem Vorschreiten die Glieder sich hinreichend einander genähert haben, auch nur das arithmetische Mittel seiner beiden Vorgänger. Und die Grenze der Glieder ist der Halbmesser des Kreises, von demselben Umfange, wie alle diese regelmässigen Vielecke.

Sind dann einmal zwei solche Glieder A und B erreicht, deren geometrisches Mittel mit dem arithmetischen in so viel Dezimalziffern als man für die Grenze verlangt, übereinstimmt, so findet man sogleich die geforderte Grenze: $= B + \frac{A-B}{3} = B - \frac{B-A}{3}$.

2. Leider lässt diese so leicht herzuleitende und höchst einfache Rechnung, weil der Zusammenhang der eigentlich zu suchenden Zahl, π, mit der vorläufig zu berechnenden Hilfsgrösse — Halbmesser des Kreises von gegebenem Umfange — nicht offen und klar vor Augen liegt, nicht überschauen, wie man dem vorgesteckten Ziele, d. i. dem Verhältnisse der Kreislinie zu ihrem Durchmesser, durch allmälige Feststellung seiner nach einander folgenden Dezimalziffern, Schritt für Schritt näher rückt, was man bei einem mündlichen Vortrage dieses Verfahrens ungern vermisst. Das bewog mich, eine andere Hilfsgrösse ausfindig zu machen, welche diesem Mangel abhilft. Als solche fand ich, wie die nachfolgende Herleitung ausweisen soll, am zusagendsten das umgekerte obige Verhältniss, $\frac{1}{\pi}$, nemlich jenes des Durchmessers zur Kreislinie, so wie zum Umfange des ein- oder umgeschriebenen regelmässigen Vieleckes; da man hier dieselbe bequeme wiederholt abwechselnde Berechnung des arithmetischen und geometrischen Mittels benützen darf.

3. Sei (in Taf. III. Fig. 1.) d der Durchmesser eines Kreises; von dem ihm eingeschriebenen regelmässigen $n$ecke und $2n$ecke eine Seite AB und AC, der Umfang p und p'; von dem umgeschriebenen regelmässigen $n$ecke und $2n$ecke eine halbe Seite CE und GH, der Umfang P und P'; so dass man hat:

$$\begin{aligned} p &= n\,.\,AB = n\,.\,2AD, \\ p' &= 2n\,.\,AC = 2n\,.\,2AF, \\ P &= n\,.\,2CE, \\ P' &= 2n\,.\,2GH; \end{aligned}$$

also

$$2n = \frac{p}{AD} = \frac{p'}{2AF = AC} = \frac{P}{CE} = \frac{P'}{2GH}.$$

4. Hiervon benutzen wir vor Allem die Proportion

$$P' : p = 2GH : DA,$$

verlängern CO zum Durchmesser CJ und führen AJ, wodurch $\Delta JDA \backsim OGH$ wird *). Aus diesem folgt:

$$GH:DA = OG:JD = \frac{d}{2}:JD,$$

daher wird $P':p = d:JD$.

Zur Wegschaffung der JD betrachten wir das Dreieck OCE, in welchem $DA \parallel CE \perp OC$; daher erhalten wir

$$OD:DA = OC:CE,$$

also wegen $DA:p = CE:P$:

$$OD:p = \frac{d}{2}:P = OD + \frac{d}{2}:p + P$$
$$= JD:p + P,$$

und hieraus

$$d:JD = P:\frac{p+P}{2}.$$

Mithin geben beide Proportionen vereint

$$P':p = P:\frac{p+P}{2};$$

und sofort, wenn p, P, P' in Bezug auf eine beliebige Längeneinheit die Maasszahlen oder Zahlwerthe der betreffenden Vielecks-Umfänge vorstellen:

$$P' = pP:\frac{p+P}{2} = \frac{pP}{(p+P):2}.$$

So einfach auch diese Gleichung schon ist, so wird sie doch noch einfacher, wenn man ihr Umgekehrtes nimmt und die Theilung einzeln vollbringt, da dann

$$\frac{1}{P'} = \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{p}\right):2$$

wird. Ihr gemäss ist für jede Längeneinheit der umgekehrte (reciproke) Werth des Umfanges P' des umgeschriebenen $2n$ecks das arithmetische Mittel der umgekehrten Werthe der Umfänge p und P der ein- und umgeschriebenen $n$ecke; oder der Umfang P' des

---

*) Aehnliche so wie auch congruente Dreiecke pflege ich jederzeit so zu bezeichnen, dass gleichvielte Buchstaben die Spitzen gleicher Winkel andeuten; wonach auch jede zwei mit gleichvielten Buchstaben bezeichneten Seiten homolog sind, und man demgemäss sehr leicht übersieht, welche Winkel gleich und welche Seiten gleichliegend seien.

Digitized by Google

umgeschriebenen $2n$ecks ist das harmonische Mittel der Umfänge p und P der ein- und umgeschriebenen $n$ecke *).

5. Die bei F und D rechtwinkligen Dreiecke CDA und CFO haben den Winkel an C gemeinschaftlich; also sind sie ähnlich, und daher ist

$$CA:DA = CO:FO, \text{ und nach dem Obigen in 3.}$$

$$= p':p,$$

folglich

$$p':p = \frac{d}{2}:FO.$$

Ferner ist zur Elimination von FO im Dreiecke OGH die $FA \parallel GH \perp OG$, mithin

$$GO:FO = GH:FA,$$

nemlich

$$\frac{d}{2}:FO = P':p';$$

also giebt die Vereinigung beider Proportionen die neue

$$P':p' = p':p,$$

und hieraus, wenn wieder p, p', P' die Zahlwerthe der betreffenden Umfänge vorstellen, ist

$$p' = \sqrt{p \cdot P'}.$$

Nimmt man, der Gleichförmigkeit wegen, auch hiervon das Umgekehrte, so wird

$$\frac{1}{p'} = \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{P'}}.$$

6. Zwischen den Umfängen p und P der beiden regelmässigen $n$ecke besteht eines Theils die Proportionalität derselben zu den Halbmessern OD und $\frac{d}{2}$ der ihnen eingeschriebenen Kreise, nemlich (wie auch in 4.):

$$p:P = OD:\frac{d}{2};$$

und andern Theils ist im rechtwinkligen Dreiecke OAD:

---

*) Die letztere Auslegung obiger Gleichung fand ich blos in van Swinden's „Elem. d. Geom.", übersetzt von Jacobi, Jena 1834, angezeigt; obwohl sie schon Lamy († 1715) und Horrebow (1737) kannten.

Digitized by Google

$$OD^2 = OA^2 - AD^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2n}\right)^2,$$

daher

$$p^2 : P^2 = d^2 - \left(\frac{p}{n}\right)^2 : d^2.$$

Diese Proportion wird vereinfacht, wenn man durch p^2 und d^2 theilend ihr die Form anweist:

$$\frac{1}{P^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(nd)^2}$$

oder

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 - \left(\frac{1}{P}\right)^2 = \frac{1}{(nd)^2};$$

so dass man danach aus jedem der umgekehrten Werthe der Umfänge p und P den des andern leicht berechnen kann.

7. Die letzte Gleichung macht dadurch, dass sie noch mehr an Einfachheit gewinnt, wenn man sie mit d^2 multiplizirt, d. h. die Umfänge p und P zu dem Durchmesser d ins Verhältniss nimmt, folglich in

$$(1.)\quad \left(\frac{d}{p}\right)^2 - \left(\frac{d}{P}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

übergeht, darauf aufmerksam, dass dieses Verfahren füglich auch auf die früheren zwei Gleichungen anzuwenden sei. Geschieht dies, indem man selbe mit d multiplizirt, so erhalten sie folgende Gestalt:

$$(2.)\quad \frac{d}{P'} = \left(\frac{d}{P} + \frac{d}{p}\right) : 2,$$

$$(3.)\quad \frac{d}{p'} = \sqrt{\frac{d}{p} \cdot \frac{d}{P'}}.$$

8. Kennt man demnach eines der beiden Verhältnisse $\frac{d}{P}$ und $\frac{d}{p}$, so sucht man das andere mittelst der Gleichung (1.), dann zu ihnen gemäss der Gleichung (2.) das arithmetische Mittel $\frac{d}{P'}$, und zu diesem und zum nächst vorhergehenden Verhältnisse $\frac{d}{p}$ gemäss der Gleichung (3.) das geometrische Mittel $\frac{d}{p'}$.

Auf diese Weise liegt jedes nachfolgende Verhältniss zwischen den zwei unmittelbar vorhergehenden und diese Verhältnisse nähern sich, bei unendlichem Wachsen der Seitenzahl n, einer Grenze, welche, weil für $\lim n = \infty$, wenn man die Kreislinie c nennt, sowohl $\lim p = c$ als auch $\lim P = c$ ist, $\frac{d}{c} = 1 : \frac{c}{d} = 1 : \pi = \frac{1}{\pi}$ sein

Digitized by Google

muss. Da nun auch diese Grenze zwischen jeden zwei nach einander berechneten Verhältnissen liegt, so müssen diejenigen und so viele Anfangsziffern derselben richtig bestimmt sein, als welche und wie viele in beiden Verhältnissen die nemlichen sind.

9. Legt man z. B. das eingeschriebene regelmässige Sechseck, $n=6$, zu Grunde, so ist seine Seite gleich dem Halbmesser $\frac{d}{2}$; daher sein Umfang

$$p=6\frac{d}{2}=3d \text{ und sonach } \frac{d}{p}=\frac{1}{3}.$$

Daraus findet man

$$\frac{d}{P}=\sqrt{\frac{1}{3^2}-\frac{1}{6^2}}=\frac{1}{6}\sqrt{2^2-1}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Bedient man sich bei der weitern Rechnung der 7stelligen Logarithmen, so findet man allmälig folgende zusammengehörigen Verhältnisse:

n	$d:P$	$d:p$
6	0·288675	0·333333
12	0·311004	0·321975
24	0·316489	0·319220
48	0·317854	0·318536.

Von 0·319220 und 0·317854 ist das arithmetische Mittel $=$ 0·318537 hinreichend nahe gleich dem geometrischen 0·3185364. Nimmt man nun die beiden letzten Zahlen 0·317854
und 0·318536

so ist ihr Unterschied 682
sein Drittel 227

also die Grenze $\frac{1}{\pi}=0{\cdot}318309.$

Es ist demnach in 6 Anfangsziffern nahe richtig $\frac{1}{\pi}=d:c=0{\cdot}318309$; daher findet man das eigentlich verlangte Kreisverhältniss $\pi=c:d$ $=3{\cdot}14160$. Der richtige Werth ist $\pi=3{\cdot}14159265$, daher der gefundene erst in der 6ten Ziffer um 1 zu gross.

Nachtrag.

10. Eben als ich das Manuscript zur Absendung bereit lege, fällt mir noch der Gedanke bei, dass sich selbst der Methode Schwab's der Vortheil verschaffen lässt, nicht erst die entferntere Hilfsgrösse, den Halbmesser des Kreises, von voraus festgesetztem Umfange, sondern die dem gesuchten π nächste Hilfsgrösse, $\frac{1}{\pi}$, sogleich zu berechnen, indem man gleich im Anfang

Digitized by Google

der Rechnung von den Halbmessern der regelmässigen Vielecke auf die Verhältnisse ihrer Durchmesser zu ihrem sich gleich bleibenden Umfange übergeht.

11. Hiebei nehme ich zugleich Gelegenheit, obige Beziehungsgleichungen zwischen den Vieleckshalbmessern nach einem Verfahren abzuleiten, das noch einfacher und überschaulicher als das von Schwab a. a. O. gewiesene ist, und welches, wie mir mein verehrter Freund, Herr Professor und Regierungsrath von Ettingshausen, im Juli 1838 erzählte, sein damaliger Adjunct, nunmehriger Professor der Physik zu Innsbruck, Herr Baumgarten, in einem alten Buche gefunden habe.

12. Sei (in Taf. III. Fig. 2.) AB die Seite eines regelmässigen, einem Kreise eingeschriebenen Vielecks. Führt man auf sie senkrecht den Halbmesser OC, so halbirt dieser den Winkel AOB, und die Sehnen CA, CB werden einander gleich. Verbindet man die Mitten A' und B' derselben durch die Gerade $A'B'$; so ist sie die Seite, OD' der kleinere und OA' der grössere Halbmesser eines regelmässigen Vieleckes, welches doppelt so viel Seiten, aber doch denselben Umfang wie das gegebene hat.

Denn so wie OC den Winkel AOB halbirt, eben so halbiren die zu den Mitten A' und B' der gleichen Sehnen CA und CB gehenden Radienvectoren OA' und OB' wieder seine Hälften COA und COB; folglich ist

$$COA' = A'OA = COB' = B'OB = \tfrac{1}{4} AOB$$

und

$$A'OB' = COA' + COB' = \tfrac{1}{2} AOB.$$

Ferner liegen die gleichen Sehnen CA, CB, also auch ihre Mitten A', B', vom Mittelpunkte gleich weit ab, nemlich es ist $OA' = OB'$, daher das Dreieck $A'OB'$ gleichschenklig, und des Winkels $A'OB'$ Halbirungslinie $OD' \perp A'B'$; folglich ist $A'OB'$ der Winkel am Mittelpunkte, $A'B'$ die Seite, OA' der grössere und OD' der kleinere Halbmesser eines regelmässigen Vielecks von doppelt so viel Seiten, als ihrer das gegebene besitzt.

Weil endlich im Dreieck ABC die $A'B' \parallel AB$, als zugleich senkrecht auf der OC, ist, dabei CA' und CB' die Hälften der Seiten CA und CB, also zu diesen proportional sind: muss $A'B'$ gleichfalls die Hälfte derselben AB sein. Das entstehende regelmässige Vieleck hat daher doppelt so viel, aber halb so kleine Seiten als das ursprüngliche, mithin einen eben so grossen Umfang wie dieses.

13. Sei nun $OA = OB = OC = R$ der grössere, $OD = r$ der kleinere Halbmesser im ursprünglichen regelmässigen Vieleck; daher im doppelt- so viel-seitigen der grössere Halbmesser $OA' = OB' = R'$ und der kleinere $OD' = r'$.

So wie $CA' = AA'$ muss wegen $A'D' \parallel AD$ auch $CD' = DD'$, also D' die Mitte von CD sein; dann ist OD' das arithmetische Mittel von OC und OD, nemlich

$$OD = \frac{OC + OD}{2},$$

oder

$$r'' = \frac{R+r}{2}.$$

Die OA' ist, weil auf ihr die AC senkrecht steht, eine Projection der OC; und OD', weil auf ihr die $A'B'$ senkrecht steht, ihre Rückprojection; oder in dem bei A' rechtwinkligen Dreiecke $OA'C$ ist $A'D' \perp OC$; daher ist OA' die mittlere Proportionale zwischen OC und OD'; nemlich

$$OC : OA' = OA' : OD',$$

oder

$$R : R' = R' : r'.$$

Mithin ist

$$R' = \sqrt{Rr'} \text{ *)}.$$

14. Bezeichnen wir jetzt bei diesen zwei regelmässigen Vielecken ihre kleineren Durchmesser mit d, d' und ihre grösseren mit D, D', so dass diese Durchmesser die Doppelten der gleichnamigen Halbmesser r, r', R, R' vorstellen; so bestehen zwischen den Durchmessern ähnliche Gleichungen wie zwischen den gleichnamigen Halbmessern, nemlich:

$$d' = \frac{D+d}{2},\quad D' = \sqrt{Dd'}.$$

Stellen wir endlich noch durch p den in beiden Vielecken gleichen Umfang vor, so gelten offenbar auch noch ähnliche Gleichungen für die Verhältnisse der vier verbundenen Durchmesser zu diesem sich gleich bleibenden Umfange, nämlich

$$\frac{d'}{p} = \left(\frac{d}{p} + \frac{D}{p}\right) : 2,\quad \frac{D'}{p} = \sqrt{\frac{D}{p} \cdot \frac{d'}{p}}.$$

Folglich ist

erstlich $\frac{d'}{p}$ das arithmetische Mittel von $\frac{d}{p}$ und $\frac{D}{p}$,

dann $\frac{D'}{p}$ das geometrische Mittel von $\frac{D}{p}$ und $\frac{d'}{p}$.

15. Geht man nun auch hier vom regelmässigen Sechsecke aus, so ist seine Seite $AB = R$, daher sein Umfang $p = 6R$, und das Verhältniss $\frac{D}{p} = \frac{2R}{6R} = \frac{1}{3}$. Zugleich macht die halbe Seite $\frac{R}{2}$ mit den beiden Halbmessern r und R ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse R ist; folglich hat man

*) Zur Ableitung dieser Sätze in 12. und 13. würde auch schon die auf einer Seite der OC liegende Halbscheid der Figur ausreichen.

Digitized by Google

$$r^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2=R^2 \text{ und daraus } r=\frac{R}{2}\sqrt{3}.$$

Mithin ist das Verhältniss

$$\frac{d}{p}=\frac{2r}{6R}=\frac{R\sqrt{3}}{6R}=\frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

Man läuft daher von denselben zwei Zahlen $\frac{1}{6}\sqrt{3}=\frac{d}{p}$ und $\frac{1}{3}=\frac{D}{p}$ aus und rechnet in gleicher Weise; folglich erhält man auch dieselbe Zahlenreihe wie in obigem Täfelchen in Art. 9., nur wird das Verhältniss $\frac{d}{p}$ durch $\frac{D}{p}$ ersetzt. Demnach findet man auch wieder als Grenzverhältniss $\frac{d}{c}=\frac{1}{\pi}$.

15. Schlussbemerkung. Diese letztere Rechnungsweise des Kreisverhältnisses lässt sich also nicht blos am einfachsten durchführen, sondern auch am leichtesten rein geometrisch ableiten und sohin dürfte sie wohl die vorzüglichste sein.

IX.

Ueber den Satz von dem Inhalte der Obelisken.

Von

dem Herausgeber.

I.

Herr Oberlehrer K. Koppe an dem Gymnasium zu Soest hat sich bekanntlich durch die sehr zweckmässige Einführung einer neuen Art von Körpern unter dem Namen Obelisken in die Elemente der Stereometrie verdient gemacht, und deren Inhaltsbestimmung auf einen bemerkenswerthen Satz zurückgeführt. Für diesen Satz hat Herr Koppe selbst in einem besondern, unter dem Titel: Ein neuer Lehrsatz der Stereometrie. Von Karl Koppe. Essen. 1843. erschienenen Schriftchen und in

seinen Anfangsgründen der reinen Mathematik. Zweiter Theil. Zweite Auflage. Essen. 1846, ferner Herr Professor Steiner in Crelle's Journal. Band 23. Heft 3., und Herr Professor Bretschneider in seinem Lehrgebäude der niedern Geometrie. Jena. 1844. elementare Beweise gegeben. Ich glaube aber, dass diese Beweise, wenn auch nicht in ihrem Wesen, doch in der Form noch einer Vereinfachung fähig sind, da der Satz wirklich an sich so einfach ist, dass er sich eigentlich, bei nur einiger aufmerksamen Betrachtung, auf der Stelle ganz von selbst darbietet, und will daher in diesem Aufsatze die Art und Weise, wie ich den Beweis darstellen würde, in der Kürze mittheilen.

II.

Ein Obelisk ist ein Körper, welcher von zwei parallelen Vielecken von gleich vielen Seiten als Grundflächen und eben so vielen Trapezen, als die Grundflächen Seiten haben, als Seitenflächen eingeschlossen wird.

Die Anzahl der Seiten der beiden Grundflächen bestimmt zugleich auch die Anzahl der Seiten des Obelisken.

Die Entfernung der beiden parallelen Grundflächen von einander wird die Höhe des Obelisken genannt.

Die Figur, welche entsteht, wenn ein Obelisk von einer seinen Grundflächen parallelen Ebene in gleichen Abständen von den beiden Grundflächen geschnitten wird, heisst seine mittlere Durchschnittsfigur.

Wenn man durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der einen der beiden Grundflächen Parallelen zu den Seitenkanten eines Obelisken zieht, so heisst das Vieleck, dessen Ecken die Durchschnittspunkte dieser Parallelen mit der mittlern Durchschnittsfigur sind, die Ergänzungsfigur des Obelisken *).

Sehr leicht lässt sich beweisen und bedarf daher hier keiner besondern Erläuterung, dass die beiden Grundflächen eines Obelisken und dessen mittlere Durchschnittsfigur jederzeit gleiche Winkel haben und dass jeder dreiseitige Obelisk eine abgekürzte dreiseitige Pyramide ist, d. h. dass die Seitenkanten eines dreiseitigen Obelisken, gehörig verlängert, jederzeit in einem und demselben Punkte zusammenstossen. Eben so leicht erhellet, dass die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur immer gleiche Winkel haben. Endlich fällt auch auf der Stelle in die Augen, dass die Seiten der mittleren Durchschnittsfigur die halben Summen, die Seiten der Ergänzungsfigur die halben Differenzen der ihnen parallelen Seiten der Grundflächen des Obelisken sind.

---

*) Dies weicht von der Koppe'schen Erklärung der Ergänzungsfigur, nach welcher man die Parallelen mit den Seitenkanten durch einen beliebigen Punkt in der Ebene der mittlern Durchschnittsfigur ziehen soll, ab, kommt aber offenbar im Wesentlichen auf dasselbe hinaus und erleichtert, wie es mir scheint, die Darstellung des Beweises.

Digitized by Google

III.

Wenn man in Taf. III. Fig. 3. durch eine Ecke A eines dreiseitigen Obelisken $ABCA'B'C'$ eine der dieser Ecke gegenüberstehenden Seitenfläche $BCB'C'$ parallele Ebene $AD'E'$ legt, so entsteht ein Körper $ABCB'D'E'C'$, welcher von dem Dreieck ABC und Viereck $B'D'E'C'$ als parallelen Grundflächen, und dem Trapez $BCB'C'$, den beiden Parallelogrammen $ABB'D'$ und $ACC'E'$ und dem Dreieck $AD'E'$ als Seitenflächen eingeschlossen wird.

Jeder Körper $ABCDEFG$ (Taf. III. Fig. 4.) dieser Art ist einem Prisma gleich, welches die mittlere Durchschnittsfigur $D'E'F'G'$ des Körpers zur Grundfläche und die Entfernung seiner parallelen Grundflächen von einander, d. h. seine Höhe, zur Höhe hat.

Die Richtigkeit hiervon erhellet auf der Stelle, wenn man durch die Linie $D'E'$ eine den parallelen Linien AF, CG parallele Ebene legt, welche die nöthigenfalls gehörig erweiterten Grundflächen ABC und $DEFG$ in den Linien HJ und KL, die ebenfalls, wenn es nöthig ist, gehörig erweiterten parallelen Seitenflächen $BCDG$ und AEF in den Linien HK und JL schneidet. Dadurch erhält man die beiden dreiseitigen Prismen $ABHJD'E'$ und $DEKLD'E'$, von denen auf der Stelle erhellet, dass sie zur Deckung gebracht werden können, wobei man sich am besten etwa das obere Prisma um die Linie $D'E'$ gedreht und in das untere Prisma gelegt denkt. Hieraus ergiebt sich aber ferner auf der Stelle durch die einfachsten Schlüsse die zu beweisende Gleichheit des Körpers $ABCDEFG$ und des Prisma $ACHJFGKL$, was hier nicht weiter erläutert zu werden braucht.

IV.

Wenn nun $ABCDEA'B'C'D'E'$ (Taf. III. Fig. 5.) ein Obelisk von beliebiger Seitenzahl ist, so lege man durch eine beliebige Ecke A die den Seitenkanten BB', CC', DD', EE' parallelen Linien AB'', AC'', AD'', AE'', und ziehe die Linien $B''C''$, $C''D''$, $D''E''$, wodurch man die Pyramide $AA'B''C''D''E''$ erhält. Zieht man nun noch die Linien AC, AD und $C'C''$, $D'D''$, so sind $ABCB'C'B''C''$, $ACDC'D'C''D''$, $ADED'E'D''E''$ offenbar Körper von der Beschaffenheit der in III. betrachteten Körper. Ueberlegt man daher jetzt nur, dass der Obelisk, dessen mittlere Durchschnittsfigur, Ergänzungsfigur, Höhe und Inhalt wir respective durch M, E, H, O bezeichnen wollen, die Summe der Pyramide $AA'B''C''D''E''$ und der drei vorher genannten Körper, so wie ferner, dass nach einem allgemein bekannten stereometrischen Satze der Inhalt der Grundfläche der Pyramide offenbar $4E$, dass endlich die Summe der mittlern Durchschnittsfiguren der drei die Pyramide zum Obelisken ergänzenden Körper augenscheinlich $M - E$ ist; so erhellet nach dem bekannten Satze von dem Inhalte der Pyramide und aus III. auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

Digitized by Google

$$O=\frac{1}{3}.4E.H+(M-E)H,$$

d. i.

$$O=(M-E+\frac{4}{3}E)H,$$

folglich

$$O=(M+\frac{1}{3}E)H,$$

woraus sich unmittelbar der folgende Satz ergiebt:

Jeder Obelisk ist der Summe eines Prisma und einer Pyramide gleich, welche respective die mittlere Durchschnittsfigur und die Ergänzungsfigur des Obelisken zu Grundflächen und die Höhe des Obelisken zur gemeinschaftlichen Höhe haben.

Stellt man den Beweis dieses von Koppe gefundenen Satzes auf die obige Weise dar, so bedarf man des sogenannten Schlusses von n auf $n+1$ gar nicht, der Beweis gewinnt, wie es mir scheint, überhaupt in mehrfacher Beziehung an Einfachheit, und legt auch die grosse Einfachheit des Satzes an sich deutlich vor Augen. Was bei der obigen Darstellung der Kürze wegen etwa noch unerörtert geblieben ist, wird Jeder leicht selbst hinzufügen können. Ueber die Anwendung des Satzes zur Berechnung verschiedener Arten von Körpern findet man vielfache Belehrung in dem oben angeführten besondern Schriftchen von Koppe, auf welches daher zu verweisen für deutsche Leser völlig genügt. Weil jedoch das Archiv sich auch einer grossen Anzahl von Lesern ausserhalb Deutschlands, ich darf wohl sagen fast in ganz Europa, selbst auch jenseits des Oceans, in Amerika, erfreuet, so mag, um den Satz, wie er ungeachtet seiner grossen Einfachheit allerdings verdient, in einem möglichst grossen Kreise bekannt zu machen, hier in der Kürze noch Folgendes dem Obigen hinzugefügt werden.

V.

Eine abgekürzte Pyramide ist offenbar ein Obelisk mit einander ähnlichen Grundflächen. Bezeichnen wir daher die eine Grundfläche einer abgekürzten Pyramide durch F und das Verhältniss einer beliebigen Seite derselben zu der gleichliegenden Seite der andern Grundfläche durch $m:n$, so ist nach II. $m:\frac{1}{2}(m+n)$ das Verhältniss der gleichliegenden Seiten der Grundfläche F und der mittlern Durchschnittsfigur M, und $m:\pm\frac{1}{2}(m-n)$ das Verhältniss der gleichliegenden Seiten der Grundfläche F und der Ergänzungsfigur E. Daher ist nach einem bekannten Satze aus der Lehre von der Aehnlichkeit

$$F:M=m^2:\frac{1}{4}(m+n)^2,$$

Digitized by Google

$$F:E = m^2:\frac{1}{4}(m-n)^2;$$

folglich

$$M=\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2 F,\quad E=\left(\frac{m-n}{2m}\right)^2 F;$$

also nach IV.

$$O=\left\{\left(\frac{m+n}{2m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{2m}\right)^2\right\} HF$$

oder

$$O=\frac{1}{4}\left\{\left(1+\frac{n}{m}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{n}{m}\right)^2\right\} HF.$$

Entwickelt man die Quadrate, so ergiebt sich

$$O=\frac{1}{3}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right)HF.$$

Bezeichnet man aber den Inhalt der andern Grundfläche der abgekürzten Pyramide durch F', so ist

$$F:F' = m^2:n^2,$$

also

$$\frac{n}{m}=\sqrt{\frac{F'}{F}},\quad \frac{n^2}{m^2}=\frac{F'}{F};$$

folglich

$$O=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt{\frac{F'}{F}}+\frac{F'}{F}\right)HF$$

oder

$$O=\frac{1}{3}H(F+\sqrt{FF'}+F'),$$

welches die aus den Elementen der Stereometrie bekannte Formel zur Berechnung des Inhalts der abgekürzten Pyramide ist.

Ein Ponton ist ein Obelisk, dessen beide Grundflächen Rechtecke sind. Bezeichnen wir nun die parallelen Seiten dieser Rechtecke durch a, a' und b, b'; so ist nach II. offenbar

$$M=\frac{1}{2}(a+a')\cdot\frac{1}{2}(b+b')=\frac{1}{4}(a+a')(b+b'),$$

$$E=\frac{1}{2}(a-a')\cdot\frac{1}{2}(b-b')=\frac{1}{4}(a-a')(b-b');$$

folglich, wenn h die Höhe des Pontons ist:

$$O=\frac{1}{4}h\{(a+a')(b+b')+\frac{1}{3}(a-a')(b-b')\},$$

oder, wie hieraus durch leichte Rechnung folgt:

$$O = \frac{1}{6} h \{ a(2b + b') + a'(b + 2b') \},$$

oder auch

$$O = \frac{1}{6} h \{ b(2a + a') + b'(a + 2a') \};$$

welches die gewöhnlichen Formeln zur Berechnung der Pontons sind.
Auch aus diesen wenigen Beispielen sieht man schon, dass Herrn Koppe's Satz zu vielen bemerkenswerthen Resultaten auf sehr einfache Weise führt, und jedenfalls sehr verdient, in den stereometrischen Elementarunterricht immer allgemeiner aufgenommen zu werden.

X.

Ueber die Entstehung der Obelisken und eine geometrische Aufgabe.

Von
dem Herausgeber.

In der euclidischen Geometrie hat es von jeher als Regel einer guten Methode gegolten, und wird auch immer dafür gelten müssen, dass jederzeit erst die Realität eines geometrischen Objects nachgewiesen werden müsse, bevor man es überhaupt unternehmen dürfe, weitere Untersuchungen über dasselbe anzustellen, woraus sich auch überall die öfters scheinbar willkührliche Aneinanderreihung der geometrischen Sätze in dem euclidischen Systeme auf das Genügendste erklären lässt, so dass sich, wenn man nur diesen Gesichtspunkt stets festhält, dieses System, was man auch in neuerer Zeit hin und wieder dagegen gesagt, und wenn man auch öfters mit einer gewissen Geringschätzung von einer Veraltung desselben gesprochen haben mag, in allen seinen Theilen auf das Vollkommenste und Schönste abrundet. Auch wüsste ich, selbst auf die Gefahr hin, mit einer gewissen Hartnäckigkeit am

Althergebrachten festzuhalten beschuldigt zu werden, In der That kein neueres System, welches sich in Bezug auf wahre geometrische Strenge und Evidenz der Darstellung der eigentlichen geometrischen Grundelemente — denn nur von diesen, keineswegs von den grossen und schönen Erweiterungen, mit denen in neuester Zeit die Geometrie durch Auffassung allgemeinerer Gesichtspunkte so sehr bereichert worden ist, deren hohe Wichtigkeit Niemand mehr als ich anzuerkennen bereit sein kann, ist und kann hier die Rede sein — dem euclidischen Systeme an die Seite stellen liesse, weshalb ich denn auch dieses System namentlich für den strengen geometrischen Schulunterricht — ohne daneben auf die Einführung neuerer Entdeckungen in denselben zu verzichten — durchaus für das geeignetste halte, und es fortwährend als erste und eigentliche Grundlage jedes strengeren mathematischen Studiums betrachte, wobei ich auch nicht umhin kann, zu bemerken, dass sich nach meiner Ansicht die Art und Weise, auf welche manche neuere Bearbeiter der Elemente gewisse bekannte Knoten, deren Lösung Euclides uns hinterlassen hat, etwas cavalièrement zu durchhauen suchen, keinesweges billigen lässt, wie auch in dieser Zeitschrift schon hin und wieder hervorgehoben worden ist.

Die Einführung der besonderen Art von Körpern, welche man Obelisken genannt hat, in die Elemente der Stereometrie, ist jedenfalls sehr verdienstlich und verdient alle Anerkennung. Man hat die Inhaltsbestimmung dieser Körper auf einen sehr einfachen Satz zurückgeführt, welcher eine Quelle vieler anderen Inhaltsbestimmungen geometrischer Körper ist, und ich selbst habe in dem vorhergehenden, absichtlich von dem vorliegenden getrennten Aufsatze eine für den Elementarunterricht so wünschenswerthe, möglichst einfache Begründung dieses Satzes zu geben versucht. Aber noch Niemand hat, so viel mir bekannt geworden ist, den strengen Nachweis der Möglichkeit oder Realität der Obelisken zu führen gesucht, was sich nach meinen oben dargelegten Ansichten über die geometrische Methode nicht rechtfertigen lässt. Nach der Erklärung der Obelisken hat man, ohne um deren Realität sich weiter zu bekümmern, sogleich einige Eigenschaften derselben bewiesen, und hat dann, wahrscheinlich um recht bald etwas in der Praxis Anwendbares zu gewinnen, mit einer gewissen Eile den körperlichen Inhalt dieser besonderen Art von Körpern zu bestimmen gesucht. Die Nachweisung der Realität der Obelisken dürfte aber um so nöthiger sein und ein besonderes Interesse gewähren, weil man, wie sich nachher zeigen wird, wenn man dieselbe zu geben versucht, zuletzt auf ganz natürlichem Wege zu einem Probleme geführt wird, welches sich, so viel ich weiss, bis jetzt in den stereometrischen Elementen noch nicht findet, und nach meiner Ansicht durchaus aufgelöst werden muss, bevor man überhaupt zur weiteren Betrachtung der Obelisken übergehen darf. Es ist hier eine Lücke im geometrischen Systeme vorhanden, welche man sich hätte auszufüllen bemühen sollen Wir werden bald sehen, welches dieses Problem ist. Eine Auflösung bloss mit Hülfe der synthetischen Geometrie, welche allerdings, um jene Lücke genügend auszufüllen, erforderlich sein würde und vielleicht ziemlich einfach sein kann, zu geben, ist in diesem Aufsatze nicht meine Absicht. Es genügt mir vielmehr für jetzt, auf das Problem aufmerksam zu machen und die syn-

Digitized by Google

thetische Auflösung den Lesern zu überlassen; dagegen werde ich aber, um eine genauere Einsicht in die Natur desselben zu vermitteln, im Folgenden eine analytische Auflösung geben, welche mir, sowie die Aufgabe selbst, nicht ganz uninteressant zu sein scheint.

Wir wollen uns also jetzt zuerst mit der Entstehung der Obelisken, deren Erklärung wir als bekannt voraussetzen, beschäftigen, indem wir vorläufig nur bemerken, dass man im Folgenden stets festzuhalten hat, dass in Folge der Definition alle einen Obelisken begränzende Flächen ohne Ausnahme Ebenen sein sollen. Hiernach kann man sich aber die Entstehung eines Obelisken auf folgende Art denken, wobei wir im Folgenden der Kürze wegen, wenn das Schneiden zweier geraden Linien gefordert wird, deren Parallelismus dabei nie ausschliessen werden.

Es sei eine beliebige ebene geradlinige Figur $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$, welche wir im Folgenden der Kürze wegen durch F bezeichnen wollen, gegeben. Durch den Punkt A_1 lege man eine beliebige, nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie. Hierauf lege man durch den Punkt A_2 eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie, welche die vorhergehende durch den Punkt A_1 gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, was offenbar jederzeit möglich ist. Ferner lege man durch den Punkt A_3 eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie, welche die vorhergehende, durch den Punkt A_2 gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, was wieder offenbar jederzeit möglich ist. Auf diese Art weiter gehend wird man endlich zu dem Punkte A_n gelangen. Durch diesen Punkt werden wir wieder eine nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie legen, welche die vorhergehende, durch den Punkt A_{n-1} gelegte gerade Linie in einem gewissen Punkte schneidet, zu legen haben, was offenbar jederzeit möglich sein würde. Soll nun aber, wie es nach der Definition des Obelisken erforderlich ist, auch die letzte durch die Kante A_nA_1 gehende Seitenfläche desselben eine Ebene sein, so ist es augenscheinlich nöthig, dass die letzte durch den Punkt A_n gelegte, nicht in die Ebene der Figur F fallende gerade Linie nicht bloss die vorletzte, durch den Punkt A_{n-1} gelegte, sondern zugleich auch die erste, durch den Punkt A_1 gelegte gerade Linie schneidet, und wir werden also, indem wir den Nachweis der Realität der Obelisken zu führen suchen, offenbar zuletzt zu der Aufgabe: — wenn zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben sind, durch diesen Punkt eine die beiden gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie zu legen — geführt. Die Auflösung dieser Aufgabe muss also im geometrischen Systeme nothwendig der Theorie der Obelisken vorangehen. Ist aber die Möglichkeit derselben nachgewiesen, so wird man ohne Weiteres mittelst einer der Figur F parallelen Ebene einen nach allen Seiten hin von Ebenen begränzten Körper von der Natur der Obelisken herstellen können, und also die Realität der letzteren, wie es die geometrische Strenge fordert, bewiesen haben.

Alles kommt also, wie man hieraus sieht, auf die Auflösung der oben namhaft gemachten Aufgabe an, welche wir nun, die Aufsuchung einer synthetischen Auflösung für jetzt den Lesern

überlassend, analytisch auflösen wollen, um eine etwas genauere Einsicht in ihre Natur zu vermitteln.

Aufgabe.

Es seien zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine die *beiden* gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie legen.

Auflösung.

Die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien seien

$$1)\quad \begin{cases} \dfrac{x-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c_1}{\cos\gamma_1}, \\ \dfrac{x-a_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y-b_2}{\cos\beta_2}=\dfrac{z-c_2}{\cos\gamma_2}; \end{cases}$$

und a_3, b_3, c_3 seien die Coordinaten des gegebenen Punktes. Da die gesuchte gerade Linie durch den Punkt $(a_3 b_3 c_3)$ gehen soll, so sind ihre Gleichungen von der Form:

$$2)\quad \frac{x-a_3}{\cos\varphi}=\frac{y-b_3}{\cos\psi}=\frac{z-c_3}{\cos\chi}.$$

Weil nun diese gerade Linie sowohl die erste, als auch die zweite der beiden geraden Linien 1) schneiden soll; so haben wir, wenn die Coordinaten der respectiven Durchschnittspunkte durch x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 bezeichnet werden, die folgenden Gleichungen:

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1-a_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y_1-b_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z_1-c_1}{\cos\gamma_1}, \\ \dfrac{x_1-a_3}{\cos\varphi}=\dfrac{y_1-b_3}{\cos\psi}=\dfrac{z_1-c_3}{\cos\chi} \end{cases}$$

und

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{x_2-a_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y_2-b_2}{\cos\beta_2}=\dfrac{z_2-c_2}{\cos\gamma_2}, \\ \dfrac{x_2-a_3}{\cos\varphi}=\dfrac{y_2-b_3}{\cos\psi}=\dfrac{z_2-c_3}{\cos\chi}. \end{cases}$$

Nimmt man zu diesen acht Gleichungen endlich noch die bekannte Gleichung

$$5)\quad \cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1,$$

so hat man neun Gleichungen, mittelst welcher die neun unbekannten Grössen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; φ, ψ, χ bestimmt werden müssen.

Eliminirt man aus den vier Gleichungen 3) die drei Grössen x_1, y_1, z_1; so erhält man nach leichter Rechnung die Gleichung:

Digitized by Google

$$6)\quad \left.\begin{array}{l}\{(b_1-b_3)\cos\gamma_1-(c_1-c_3)\cos\beta_1\}\cos\varphi\\ +\{(c_1-c_3)\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\cos\gamma_1\}\cos\psi\\ +\{(a_1-a_3)\cos\beta_1-(b_1-b_3)\cos\alpha_1\}\cos\chi\end{array}\right\}=0;$$

und auf ganz ähnliche Art ergiebt sich durch Elimination von x_2, y_2, z_2 aus den vier Gleichungen 4) die Gleichung:

$$7)\quad \left.\begin{array}{l}\{(b_2-b_3)\cos\gamma_2-(c_2-c_3)\cos\beta_2\}\cos\varphi\\ +\{(c_2-c_3)\cos\alpha_2-(a_2-a_3)\cos\gamma_2\}\cos\psi\\ +\{(a_2-a_3)\cos\beta_2-(b_2-b_3)\cos\alpha_2\}\cos\chi\end{array}\right\}=0.$$

Diese beiden Gleichungen liefern in Verbindung mit der Gleichung 5) die zur Bestimmung der drei unbekannten Grössen φ, ψ, χ erforderliche Anzahl von Gleichungen.

Setzt man der Kürze wegen

$$8)\quad \left\{\begin{array}{l}A_1=(a_1-a_3)\cos\beta_1-(b_1-b_3)\cos\alpha_1,\\ A_2=(a_2-a_3)\cos\beta_2-(b_2-b_3)\cos\alpha_2;\\ B_1=(b_1-b_3)\cos\gamma_1-(c_1-c_3)\cos\beta_1,\\ B_2=(b_2-b_3)\cos\gamma_2-(c_2-c_3)\cos\beta_2;\\ C_1=(c_1-c_3)\cos\alpha_1-(a_1-a_3)\cos\gamma_1,\\ C_2=(c_2-c_3)\cos\alpha_2-(a_2-a_3)\cos\gamma_2;\end{array}\right.$$

so werden die beiden Gleichungen 6) und 7):

$$9)\quad \left\{\begin{array}{l}B_1\cos\varphi+C_1\cos\psi+A_1\cos\chi=0,\\ B_2\cos\varphi+C_2\cos\psi+A_2\cos\chi=0;\end{array}\right.$$

woraus sich

$$10)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos\psi=\dfrac{A_1B_2-B_1A_2}{C_1A_2-A_1C_2}\cos\varphi,\\[2ex] \cos\chi=\dfrac{B_1C_2-C_1B_2}{C_1A_2-A_1C_2}\cos\varphi\end{array}\right.$$

ergiebt. Also ist nach 5):

$$\cos\varphi=\pm\frac{C_1A_2-A_1C_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},$$

woraus sich, in Verbindung mit 10), die folgenden Formeln zur Bestimmung von φ, ψ, χ ergeben, in denen die obern und untern Zeichen auf einander zu beziehen sind:

$$11)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos\varphi=\pm\dfrac{C_1A_2-A_1C_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},\\[2ex] \cos\psi=\pm\dfrac{A_1B_2-B_1A_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+(C_1A_2-A_1C_2)^2}},\\[2ex] \cos\chi=\pm\dfrac{B_1C_2-C_1B_2}{\sqrt{(A_1B_2-B_1A_2)^2+(B_1C_2-C_1B_2)^2+C_1A_2-A_1C_2)^2}}.\end{array}\right.$$

Digitized by Google

Hat man aber die Winkel φ, ψ, χ mittelst dieser Formeln gefunden, so erhält man die Coordinaten x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 leicht mittelst der Gleichungen 3) und 4), was wir hier nicht weiter entwickeln wollen.

Die Gleichungen der gesuchten durch den Punkt $(a_3 b_3 c_3)$ gehenden und die beiden gegebenen, durch die Gleichungen 1) charakterisirten Linien schneidenden geraden Linien sind nach 2) und 11):

$$12)\quad \frac{x-a_3}{C_1A_2-A_1C_2}=\frac{y-b_3}{A_1B_2-B_1A_2}=\frac{z-c_3}{B_1C_2-C_1B_2}.$$

Zu einer andern Auflösung gelangt man auf folgende Weise.

Die Gleichungen der beiden gegebenen geraden Linien seien

$$13)\quad \begin{cases} x=a_1z+b_1,\ y=\alpha_1z+\beta_1;\\ x=a_2z+b_2,\ y=\alpha_2z+\beta_2; \end{cases}$$

und f, g, h seien die Coordinaten des gegebenen Punktes. Also sind die Gleichungen der gesuchten geraden Linie von der Form

$$14)\quad x-f=A(z-h),\ y-g=\mathfrak{A}(z-h).$$

Sind nun x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Durchschnittspunkte dieser Linie mit den beiden gegebenen geraden Linien, so haben wir zur Bestimmung der acht unbekannten Grössen x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; A, $\mathfrak{A}$ die folgenden acht Gleichungen:

$$15)\quad \begin{cases} x_1=a_1z_1+b_1,\ y_1=\alpha_1z_1+\beta_1;\\ x_2=a_2z_2+b_2,\ y_2=\alpha_2z_2+\beta_2;\\ x_1-f=A(z_1-h),\ y_1-g=\mathfrak{A}(z_1-h),\\ x_2-f=A(z_2-h),\ y_2-g=\mathfrak{A}(z_2-h). \end{cases}$$

Aus den vier letzten Gleichungen erhält man durch Elimination von A und $\mathfrak{A}$:

$$16)\quad \begin{cases} (x_1-f)(z_2-h)-(x_2-f)(z_1-h)=0,\\ (y_1-g)(z_2-h)-(y_2-g)(z_1-h)=0; \end{cases}$$

also vermöge der vier ersten Gleichungen:

$$17)\quad \begin{cases} (a_1z_1+b_1-f)(z_2-h)-(a_2z_2+b_2-f)(z_1-h)=0,\\ (\alpha_1z_1+\beta_1-g)(z_2-h)-(\alpha_2z_2+\beta_2-g)(z_1-h)=0; \end{cases}$$

oder

$$18)\quad \begin{cases} \{(a_1-a_2)z_1+(a_2h+b_1-f)\}z_2\\ =(b_1-b_2)h+(a_1h+b_2-f)z_1,\\ \{(\alpha_1-\alpha_2)z_1+(\alpha_2h+\beta_1-g)\}z_2\\ =\{(\beta_1-\beta_2)h+(\alpha_1h+\beta_2-g)z_1; \end{cases}$$

Digitized by Google

folglich

$$19)\quad \{a_2h + b_1 - f + (a_1-a_2)z_1\}\{(\beta_1-\beta_2)h + (\alpha_1 h + \beta_2 - g)z_1\}$$
$$= \{\alpha_2 h + \beta_1 - g + (\alpha_1-\alpha_2)z_1\}\{(b_1-b_2)h + (a_1 h + b_2 - f)z_1\},$$

also, wie man nach leichter Entwickelung findet:

$$20)\quad 0 = \{(b_1-b_2)(\alpha_2 h+\beta_1-g) - (\beta_1-\beta_2)(a_2h+b_1-f)\}h$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h + (a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\ -(a_1-a_2)(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right\}z_1$$
$$+\{(\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\}z_1^2.$$

Für $z_1 = h$ wird, wie man leicht findet, die Gleichung 19), folglich auch die Gleichung 20), erfüllt, so dass also

$$0 = \{(b_1-b_2)(\alpha_2 h+\beta_1-g) - (\beta_1-\beta_2)(a_2h+b_1-f)\}h$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h + (a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\ -(a_1-a_2(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right\}h$$
$$+\{(\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\}h^2$$

ist. Subtrahirt man diese Gleichung von der Gleichung 20), so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$21)\quad \left\{\begin{array}{l}M = (\alpha_1-\alpha_2)(b_1-b_2)h + (a_1h+b_2-f)(\alpha_2h+\beta_1-g)\\ \qquad -(a_1-a_2)(\beta_1-\beta_2)h-(a_2h+b_1-f)(\alpha_1h+\beta_2-g),\\ N = (\alpha_1-\alpha_2)(a_1h+b_2-f)-(a_1-a_2)(\alpha_1h+\beta_2-g)\end{array}\right.$$

gesetzt wird, die Gleichung:

$$22)\quad (z_1-h)\{M+N(z_1+h)\}=0,$$

so dass also entweder

$$z_1-h=0$$

oder

$$M+N(z_1+h)=0,$$

d. h. entweder

$$23)\quad z_1=h$$

oder

$$24)\quad z_1+h=-\frac{M}{N},\quad z_1=-h-\frac{M}{N}$$

ist.

Wollten wir aber $z_1=h$ setzen, so würde aus der fünften und sechsten der Gleichungen 15) $x_1=f$, $y_1=g$ folgen, und wegen der ersten und zweiten dieser Gleichungen müsste also

$$f=a_1h+b_1,\quad g=\alpha_1h+\beta_1$$

Digitized by Google

sein, d. h der gegebene Punkt (fgh) würde in der ersten der beiden gegebenen Linien liegen, was gegen die Voraussetzung streitet, da wir angenommen haben, dass der gegebene Punkt in keiner der beiden gegebenen Linien liegen soll.

Hiernach können wir also bloss

$$25)\quad z_1 = -h - \frac{M}{N}$$

setzen.

Bis hierher haben wir die Rechnung absichtlich ganz allgemein geführt. Um uns jedoch die fernere Rechnung zu erleichtern, wollen wir, was offenbar verstattet ist, jetzt den gegebenen Punkt als Anfang der Coordinaten annehmen, d. h. wir wollen im Vorhergehenden $f=g=h=0$ setzen.

Dies vorausgesetzt, ist im Vorhergehenden

$$26)\quad \begin{cases} M = b_2\beta_1 - b_1\beta_2, \\ N = b_2(\alpha_1 - \alpha_2) - \beta_2(a_1 - a_2); \end{cases}$$

folglich nach 25):

$$27)\quad z_1 = -\frac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_2}.$$

Nach der ersten der beiden Gleichungen 18) ist

$$z_2 = \frac{b_2 z_1}{b_1 + (a_1 - a_2)z_1},$$

also, wenn man den vorhergehenden Werth von z_1 einführt:

$$28)\quad z_2 = -\frac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_1}.$$

Führt man nun ferner die gefundenen Ausdrücke von z_1 und z_2 in die aus 15) bekannten Gleichungen

$$x_1 = a_1 z_1 + b_1,\quad y_1 = \alpha_1 z_1 + \beta_1;$$
$$x_2 = a_2 z_2 + b_2,\quad y_2 = \alpha_2 z_2 + \beta_2$$

ein, so erhält man für die Coordinaten der Durchschnittspunkte der gesuchten Linie mit den beiden gegebenen Linien überhaupt die folgenden Ausdrücke:

$$29)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_2}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_2}, \\[2ex] z_1 = -\dfrac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_2 - (\alpha_1 - \alpha_2)b_2} \end{cases}$$

und

Digitized by Google

$$30)\begin{cases} x_2 = \dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}, \\ y_2 = \dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}, \\ z_2 = -\dfrac{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}{(a_1 - a_2)\beta_1 - (\alpha_1 - \alpha_2) b_1}. \end{cases}$$

Die Gleichungen der gesuchten Linie sind

$$31)\begin{cases} x = -\dfrac{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1} z, \\ y = -\dfrac{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1} z \end{cases}$$

oder

$$32)\begin{cases} \dfrac{x}{b_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - b_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)} \\ = \dfrac{y}{\beta_1(\alpha_2 b_2 - a_2\beta_2) - \beta_2(\alpha_1 b_1 - a_1\beta_1)} \\ = -\dfrac{z}{b_1\beta_2 - b_2\beta_1}. \end{cases}$$

Ist der gegebene Punkt nicht der Anfang der Coordinaten, sondern überhaupt durch die Coordinaten f, g, h bestimmt, so braucht man sich durch denselben bloss ein dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem gelegt zu denken, und wird dann leicht finden, dass man, um die nöthigen Ausdrücke zur Bestimmung der Lage der gesuchten Linie zu erhalten, in den vorhergehenden Formeln bloss für

$$x, y, z$$

respective

$$x-f,\ y-g,\ z-h;$$

und für

$$b_1, \beta_1;\ b_2. \beta_2$$

respective

$$a_1 h + b_1 - f,\ \alpha_1 h + \beta_1 - g;\ a_2 h + b_2 - f,\ \alpha_2 h + \beta_2 - g$$

setzen, alles Uebrige aber ungeändert lassen muss, was wir weiter auszuführen dem Leser überlassen.

Schliesslich wiederholen wir, dass wir eine Auflösung der vorhergehenden Aufgabe bloss durch Construction, so dass dieselbe Platz in den Elementen der Stereometrie finden kann, für wünschenswerth halten.

Digitized by Google

XI.

Sur les dérivées d'une fonction de fonction.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Divers procédés ont été proposés pour déterminer, en forme finie, les dérivées d'une fonction qui dépend d'une autre fonction. Ce problème, loin d'être généralement résolu, n'est abordé que pour des cas très spéciaux. Convaincu de l'imperfection de la théorie des dérivées, M. Oscar Schlömilch (Archiv. T. VII. p. 204.) a tenté de déterminer les dérivées des fonctions f_{x^λ} et f_{e^x}. Il a trouvé

$$\partial_x^n f_{x^\lambda} = \frac{1}{x^n}\left\{ \overset{n}{A}_1 x^\lambda f'_{x^\lambda} + \overset{n}{A}_2 x^{2\lambda} f''_{x^\lambda} + \ldots + \overset{n}{A}_n x^{n\lambda} f^{(n)}_{x^\lambda} \right\},$$

dans laquelle

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots p}\left\{ (p\lambda)_n - (\overline{p-1}\lambda)_n p_1 + (\overline{p-2}\lambda)_n p_2 - \ldots \pm \lambda_n p_{p-1} \right\};$$

et

$$\partial_x^n f_{e^x} = \overset{n}{A}_1 e^x f'_{e^x} + \overset{n}{A}_2 e^{2x} f''_{e^x} + \ldots + \overset{n}{A}_n e^{nx} f^{(n)}_{e^x},$$

le coefficient $\overset{n}{A}_p$ étant donné dans cette formule par l'équation

$$\overset{n}{A}_p = \frac{1}{1.2\ldots p}\left\{ p^n - (p-1)^n p_1 + (p-2)^n p_2 - \ldots \pm 1^n p_{p-1} \right\},$$

en observant que dans les deux formules p_1, p_2, ... désignent les coefficients binominaux de l'exposant p. L'auteur a démontré ces formules par induction, en indiquant qu'elles seront vérifiées pour les dérivées de l'ordre $n+1$, lorsqu'on les suppose exactes pour l'ordre n. Il a ajouté être parvenu à la détermination des coefficients

Digitized by Google

par une méthode qui lui est propre; et il est à regretter qu'il ne l'a pas communiquée, puisque la méthode est souvent plus instructive que le résultat n'est intéressant.

Depuis longtemps j'avais trouvé les mêmes formules, mais, occupé par d'autres recherches, je ne les avais pas rédigées. En lisant récemment l'article cité de M. Schlömilch, j'ai fixé de nouveau l'attention sur ce sujet, et, en attendant que l'auteur faisse connaître la méthode par laquelle il est parvenu à ses formules, j'exposerai le procédé qui m'a conduit à une formule générale qui embrasse les formules citées comme cas particuliers.

Puisqu'on a généralement

$$\partial_x^n \varphi_{x+h} = \partial_h^n \varphi_{x+h},$$

il faut que soit

$$\partial_x^n \varphi_x = \partial_\varepsilon^n \varphi_{x+\varepsilon},$$

lorsque ε désigne une variable qui s'évanouit après les différentiations. Si donc y représente une fonction de x, et qu'on pose

$$y = y_x,$$

on aura de même

(1) $$\partial_x^n f_y = \partial_\varepsilon^n f_{y_{x+\varepsilon}},$$

et lorsqu'on fait

(2) $$y_{x+\varepsilon} = y + \Theta_\varepsilon,$$

il s'ensuit

$$f_{y_{x+\varepsilon}} = f_{y+\Theta_\varepsilon},$$

ce qui change l'équation (1) en

(3) $$\partial_x^n f_y = \partial_\varepsilon^n f_{y+\Theta_\varepsilon}.$$

De plus, on tire de l'équation (2)

(4) $$\Theta_\varepsilon = y_{x+\varepsilon} - y,$$

ce qui montre, non seulement que Θ_ε dépend de x et ε, mais encore que Θ_ε s'évanouira avec ε, du moins si l'on excepte les valeurs particulières de x pour lesquelles il y a solution de continuité. On aura par suite

$$f_{y+\Theta_\varepsilon} = f_y + f'_y \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \Theta_\varepsilon^3 + \ldots.,$$

et, en vertu de l'équation (3),

Digitized by Google

$$\partial_x^n f_y = \partial_\varepsilon^n \{ f_y + f'_y \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \Theta_\varepsilon^3 + \ldots \},$$

ou, puisque y est indépendant de ε,

$$(5) \quad \partial_x^n f_y = f'_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon + \frac{1}{1.2} f''_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^2 + \frac{1}{1.2.3} f'''_y \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^3 + \ldots$$

On s'assurera aisément que la série dans le second membre de cette formule s'arrêtera au terme

$$\frac{1}{1.2.3....n} f_y^{(n)} \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^n,$$

parceque, selon l'équation (4), le premier terme du développement de Θ_ε suivant les puissances entières et positives de ε étant proportionel à ε, le premier terme du développement de Θ_ε^m sera proportionel à ε^m, et qu'un terme de la forme $\partial_\varepsilon^m \varepsilon^m \varphi_\varepsilon$ s'évanouira avec ε, lorsque m est plus grand que n, et que φ_ε reste fonction continue pour $\varepsilon = 0$. La formule (5) peut donc être mise sous la forme

$$\partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \partial_\varepsilon^n \Theta_\varepsilon^k.$$

dans laquelle on a posé, pour abréger,

$$(6) \qquad k! = 1.2.3....k;$$

et, si l'on substitue à Θ_ε sa valeur tirée de l'équation (4), il viendra

$$(7) \qquad \partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{ y_{x+\varepsilon} - y \}^k.$$

Posons encore, pour abréger,

$$(8) \qquad \overset{m}{(k)} = \frac{k(k-1)(k-2)....(k-m+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;.\;.\;.\;.\; m};$$

on aura, en développant le binome $(y_{x+\varepsilon} - y_x)^k$,

$$\partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left\{ \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \sum_{m=0}^{m=k+1} (-1)^m \overset{m}{(k)} y^m \partial_\varepsilon^n y_{x+\varepsilon}^{k-m} \right\}.$$

et, si l'on a égard à l'équation (1), et qu'on observe que $\partial_x^n y^0 = \partial_x^n 1 = 0$, il résultera enfin

$$(9) \qquad \partial_x^n f_y = \sum_{k=1}^{k=n+1} \sum_{m=0}^{m=k} \frac{(-1)^m}{k!} \overset{m}{(k)} y^m f_y^{(k)} \partial_x^n y^{k-m}.$$

Voici la formule générale annoncée qui subsistera pour toute fonction f_y de y et pour toute fonction y de x, en exceptant toujours les cas particuliers où l'on attribue à x une valeur telle que

Digitized by Google

la continuité sera interrompue. En prenant successivement $y = x^\lambda$ et $y = e^x$, elle fournira les formules de M. Schlömilch rapportées au commencement de cet article. Il faut observer toutefois que, quoique la formule (9) soit plus développée que la formule (7), celle-ci l'emporte par sa simplicité: c'est pour quoi nous allons nous en occuper encore un instant.

Faisons

$$y = y_x = e^x,$$

on aura

$$y_{x+\varepsilon} = e^{x+\varepsilon} = e^x e^\varepsilon,$$

d'où

$$y_{x+\varepsilon} - y = e^x(e^\varepsilon - 1),$$

et la formule (7) donnera

$$(10) \qquad \partial_x^n f_{e^x} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} e^{kx} f_{e^x}^{(k)} \partial_\varepsilon^n (e^\varepsilon - 1)^k.$$

Or, ε étant égal à zéro,

$$\frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^n (e^\varepsilon - 1)^k$$

sera le coefficient de u^n dans le développement de

$$(e^u - 1)^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. Donc, si l'on désigne ce coefficient par $B_{k,n}$, on aura

$$(11) \qquad \partial_x^n f_{e^x} = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{n!}{k!} B_{k,n} e^{kx} f_{e^x}^{(k)}.$$

Lorsqu'on voudra appliquer la formule (7) à la détermination de la dérivée $\partial_x^n f_{x^\mu}$, il sera plus commode de substituer d'abord $x\varepsilon$ à ε et par suite $\frac{1}{x}\partial_\varepsilon$ à ∂_ε, ce qui la changera en

$$(12) \qquad \partial_x^n f_y = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_y^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{y_{x(1+\varepsilon)} - y\}^k.$$

Maintenant si l'on fait

$$y = y_x = x^\mu,$$

on aura

$$y_{x(1+\varepsilon)} = x^\mu (1+\varepsilon)^\mu,$$

d'où

$$y_{x(1+\varepsilon)} - y = x^\mu \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\},$$

et l'on trouvera, à l'aide de la formule (12),

Digitized by Google

$$(13)\qquad \partial_x^n f_{x^\mu} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} x^{k\mu} f_{x^\mu}^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^k ;$$

donc, si l'on pose

$$(14)\qquad \partial_x^n f_{x^\mu} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{n!}{k!} A_{k,n}\, x^{k\mu} f_{x^\mu},$$

il suivra que $A_{k,n}$ sera le coefficient de u^n dans le développement de

$$\{(1+u)^\mu - 1\}^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. Soit encore

$$y = y_x = lx,$$

on aura

$$y_{x(1+\varepsilon)} = lx(1+\varepsilon) = lx + l(1+\varepsilon),$$

d'où

$$y_{x(1+\varepsilon)} - y = l(1+\varepsilon).$$

Cette valeur de y substituée dans la formule (12), il viendra

$$\partial_x^n f_{lx} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k!} f_{lx}^{(k)} \partial_\varepsilon^n \{l(1+\varepsilon)\}^k .$$

et, si l'on pose

$$\partial_x^n f_{lx} = \frac{1}{x^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{n!}{k!} C_{k,n} f_{lx}^{(k)},$$

on sera assuré que $C_{k,n}$ représente le coefficient de u^n dans le développement de

$$\{l(1+u)\}^k$$

suivant les puissances entières et positives de u. On voit, par ce qui précède, en quoi consiste l'avantage que fournit la formule (7), puisqu'elle montre l'origine des coefficients A, B, C, de manière qu'on pourra maintenant étudier ces coefficients indépendamment des formules dans lesquelles ils se sont présentés.

Nous examinerons donc ces coefficients dans un article spécial.

Anmerkung des Herausgebers. In Theil VIII. Nr. XXXIII. und Nr. XLI. befinden sich noch zwei Abhandlungen des Herrn Professor Dr. Schlömilch über höhere Differenzialquotienten.

Digitized by Google

XII.

Sur le développement de la fonction $\left\{\frac{(1+u)^\mu-1}{\mu u}\right\}^x$.

Par
Monsieur Ubbo H. Meyer
de Groningue.

Les applications du No. précédent nous ont conduit aux coefficients des puissances de u dans le développement des fonctions

$$\{(1+u)^\mu-1\}^k,\ (e^u-1)^k \text{ et } \{l(1+u)\}^k.$$

La détermination de ces coefficients offre beaucoup de difficultés, et jusqu'ici on n'a pas trouvé d'expressions dont la simplicité soit comparable à celle des coefficients binomiaux. Afin de contribuer à la connaissance de ces coefficients, je vais en signaler quelques relations.

Le développement de la fonction

$$(1+u)^\mu-1$$

en série suivant les puissances entières et positives de u commence par μu, donc le développement de

$$\frac{(1+u)^\mu-1}{\mu u}$$

commencera par l'unité. Au lieu de la fonction

$$\{(1+u)^\mu-1\}^x$$

nous considérons donc plutôt la fonction

$$\left\{\frac{(1+u)^\mu-1}{\mu u}\right\}^x,$$

Digitized by Google

dont le développement aura l'unité pour premier terme. De même nous nous occuperons des fonctions

$$\left\{\frac{e^u-1}{u}\right\}^x \text{ et } \left\{\frac{l(1+u)}{u}\right\}^x$$

au lieu des fonctions

$$\{e^u-1\}^x \text{ et } \{l(1+u)\}^x;$$

et nous posons

$$(1) \qquad \left\{\frac{(1+u)^\mu-1}{\mu u}\right\}^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{A}_{x,n,\mu}u^n,$$

$$(2) \qquad \left\{\frac{e^u-1}{u}\right\}^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{B}_{x,n}u^n,$$

$$(3) \qquad \left\{\frac{l(1+u)}{u}\right\}^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathfrak{C}_{x,n}u^n;$$

n étant un nombre entier et positif, tandisque x et μ désignent des nombres quelconques. Il suit de là qu'entre les coefficients A, B, C de l'article précédent et entre les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ il y a les relations

$$(4) \quad A_{k,n}=\mu^k\mathfrak{A}_{k,n-k,\mu};\ B_{k,n}=\mathfrak{B}_{k,n-k};\ C_{k,n}=\mathfrak{C}_{k,n-k};$$

k étant un nombre entier et positif. On s'assurera de plus, par le théorème de Cauchy, que les équations (1) et (3) ne subsistent que pour un module de u inférieur à 1, et que l'équation (2) ne subsiste que pour un module de u inférieur à 2π.

Désignons maintenant par ε une variable qui s'évanouit après les différentiations, on aura, par le théorème de Maclaurin:

$$(5) \qquad \mathfrak{A}_{x,n,\mu}=\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^x.$$

$$(6) \qquad \mathfrak{B}_{x,n}=\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right\}^x,$$

$$(7) \qquad \mathfrak{C}_{x,n}=\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}^x;$$

équations qui suffisent pour déterminer $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ pour tout nombre entier et positif n, et auxquelles on pourra joindre

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_{x,0,\mu}=1,\ \mathfrak{B}_{x,0}=1,\ \mathfrak{C}_{x,0}=1; \\ \mathfrak{A}_{x,-n,\mu}=0,\ \mathfrak{B}_{x,-n}=0,\ \mathfrak{C}_{x,-n}=0. \end{cases}$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{\mu}$ et par suite ∂_ε par $\mu\partial_\varepsilon$, on tire de l'équation (5)

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{(1+\frac{\varepsilon}{\mu})^\mu-1}{\varepsilon}\right\}^x=\left(\frac{1}{\mu}\right)^n\mathfrak{A}_{x,n,\mu}.$$

Digitized by Google

Or, lorsqu'on fait $\mu=\infty$, ou $\frac{1}{\mu}=0$, la valeur de $(1+\frac{\varepsilon}{\mu})^\mu$ se changera en e^ε. Donc si la valeur de ι est égale à zéro, on aura

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}\right\}^x = \iota^n \mathfrak{A}_{x,n,\frac{1}{\iota}};$$

ou, en vertu de l'équation (6),

(9) $$\mathfrak{B}_{x,n}=\iota^n\mathfrak{A}_{x,n,\frac{1}{\iota}}.$$

Si, au contraire, on pose $\mu=\iota=0$, il suit de l'équation (5)

$$\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{\frac{l(1+\varepsilon)}{\varepsilon}\right\}^x = \mathfrak{A}_{x,n,\iota};$$

ou, suivant l'équation (7),

(10) $$\mathfrak{C}_{x,n}=\mathfrak{A}_{x,n,\iota}.$$

On voit donc qu'il suffit de déterminer d'une manière générale le coefficient $\mathfrak{A}$, puisque les équations (9) et (10) fournissent le moyen de déduire $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$.

Posons, pour abréger,

(11) $$f_\varepsilon=f_{\varepsilon,x}=\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^x;$$

on aura

(12) $$\partial_\varepsilon l f_\varepsilon = x\mu\frac{(1+\varepsilon)^{\mu-1}}{(1+\varepsilon)^\mu-1}-\frac{x}{\varepsilon},$$

d'où

$$\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon = x\mu\varepsilon\frac{(1+\varepsilon)^\mu}{(1+\varepsilon)^\mu-1}f_\varepsilon - x(1+\varepsilon)f_\varepsilon,$$

et puisque

$$\frac{(1+\varepsilon)^\mu}{(1+\varepsilon)^\mu-1}=\frac{1}{(1+\varepsilon)^\mu-1}+1,$$

on tire de la précédente:

(13) $$\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon = x\frac{\mu\varepsilon}{(1+\varepsilon)^\mu-1}f_\varepsilon + x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_\varepsilon,$$

ou, suivant l'équation (11),

$$\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_{\varepsilon,x} = xf_{\varepsilon,x-1}+x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_{\varepsilon,x},$$

puis

(14) $$\partial_\varepsilon^n\{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_{\varepsilon,x}\} = x\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,x-1} + x\partial_\varepsilon^n\{(\overline{\mu-1}\,\varepsilon-1)f_{\varepsilon,x}\}.$$

Pour développer les dérivées de cette équation, on peut se servir de la formule de Leibnitz

Digitized by Google

$$(15)\qquad \partial_x^n \varphi_x \psi_x = \sum_{m=0}^{m=n+1} \overset{m}{(n)}\, \partial_x^{n-m} \varphi_x\, \partial_x^m \psi_x,$$

n et m étant des nombres entiers et positifs, et $\overset{m}{(n)}$ donné par l'équation

$$(16)\qquad \overset{m}{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;m}.$$

En effet, si l'on suppose que φ_x reste fonction continue pour $x=0$, et qu'on fasse $\psi_x = x^p$, p étant un nombre entier et positif, la formule (15) se réduira à

$$(17)\qquad \partial_\varepsilon^n \varepsilon^p \varphi_\varepsilon = \overset{p}{(n)}\, p!\, \partial_\varepsilon^{n-p} \varphi_\varepsilon = \frac{n!}{(n-p)!}\, \partial_\varepsilon^{n-p} \varphi_\varepsilon.$$

En appliquant cette formule à l'équation (14), on obtiendra

$$n\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa} + n(n-1)\partial_\varepsilon^{n-1} f_{\varepsilon,\varkappa} = \varkappa\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa-1} + \varkappa(\mu-1)\, n\partial_\varepsilon^{n-1} f_{\varepsilon,\varkappa} - \varkappa\partial_\varepsilon^n f_{\varepsilon,\varkappa},$$

d'où l'on déduit, en ayant égard aux équations (5) et (11),

$$(18)\qquad (\varkappa+n)\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \varkappa\mathfrak{A}_{\varkappa-1,n} + (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)\mathfrak{A}_{\varkappa,n-1}.$$

On pourra partir de cette équation aux différences partielles pour déterminer $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$, en y joignant les équations (8) et la condition que $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$ ne contienne point de termes périodiques par rapport à $\varkappa$.

Posons pour cela

$$(19)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \frac{P_{\varkappa,n}}{(\varkappa+1)(\varkappa+2)\ldots(\varkappa+n)};$$

substituons cette valeur de $\mathfrak{A}$ dans l'équation (18), et faisons disparaître le facteur commun aux deux membres. On trouvera

$$P_{\varkappa,n} = P_{\varkappa-1,n} + (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)P_{\varkappa,n-1},$$

d'où

$$\Delta_\varkappa P_{\varkappa-1,n} = (\overline{\mu-1}\,\varkappa - n + 1)P_{\varkappa,n-1};$$

et puisque $\mathfrak{A}_{0,n}=0$, si n n'est pas égal à zéro, on aura de même $P_{0,n}=0$ sous la même condition. Si donc k_1 représente une variable dont l'accroissement est égal à l'unité, on déduit de la précédente

$$P_{\varkappa-1,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa} (\overline{\mu-1}\,k_1 - n + 1)P_{k_1,n-1}$$

ou

$$(20)\qquad P_{\varkappa,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=\varkappa+1} (\overline{\mu-1}\,k_1 - n + 1)P_{k_1,n-1},$$

ayant soin de réduire à zéro la fonction périodique par rapport à $\varkappa$ que l'intégration finie introduit, si $\varkappa$ n'est pas un nombre entier et positif.

En changeant k_1 en k_2, $\varkappa$ en k_1, et n en $n-1$, l'équation (20) se réduit à

$$P_{k_1,n-1} = \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} (\overline{\mu-1}\,k_2 - n + 2)P_{k_2,n-2},$$

Digitized by Google

et substituant cette valeur de $P_{k_1, n-1}$ dans l'équation (20), on obtiendra

$$P_{x,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=x+1} \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} (\overline{\mu-1}\, k_1 - n + 1)(\overline{\mu-1}\, k_2 - n + 2)\, P_{k_2, n-2}.$$

En continuant ainsi, et observant que

$$P_{x,0} = \mathfrak{A}_{x,0} = 1,$$

il viendra

$$P_{x,n} =$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=x+1} \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} \dots \sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1} (\overline{\mu-1}\, k_1 - n + 1)(\overline{\mu-1}\, k_2 - n + 2) \dots (\overline{\mu-1}\, k_n),$$

et, en vertu de l'équation (19), on aura enfin

$$(21) \quad \mathfrak{A}_{x,n} =$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=x+1} \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} \dots \sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1} \frac{\overline{\mu-1}\, k_1 - n + 1}{x+n} \cdot \frac{\overline{\mu-1}\, k_2 - n + 2}{x+n-1} \dots \frac{\overline{\mu-1}\, k_n}{x+1},$$

$k_1, k_2, \dots k_n$ désignant des variables dont l'accroissement est 1, et les intégrales étant prises de manière que les fonctions périodiques par rapport à x s'évanouissent. Cette équation est peu commode pour l'évaluation du coefficient $\mathfrak{A}$, toutefois elle semble mériter quelque attention, parcequ'il n'est pas impossible de réduire l'intégration multiple à une integration simple. Ajoutons que les équations (9) et (10) fournissent le moyen d'obtenir immédiatement des relations analogues pour les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$. L'équation (18) donnera

$$(22) \qquad (x+n)\mathfrak{B}_{x,n} = x\mathfrak{B}_{x-1,n} + x\mathfrak{B}_{x,n-1},$$

$$(23) \qquad (x+n)\mathfrak{C}_{x,n} = x\mathfrak{C}_{x-1,n} - (x+n-1)\mathfrak{C}_{x,n-1};$$

et l'équation (21) se réduira à

$$(24) \quad \mathfrak{B}_{x,n} = \sum_{k_1=1}^{k_1=x+1} \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} \dots \sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1} \frac{k_1}{x+n} \cdot \frac{k_2}{x+n-1} \dots \frac{k_n}{x+1},$$

$$(25) \quad \mathfrak{C}_{x,n} =$$

$$\sum_{k_1=1}^{k_1=x+1} \sum_{k_2=1}^{k_2=k_1+1} \dots \sum_{k_n=1}^{k_n=k_{n-1}+1} (-1)^n \frac{k_1+n-1}{x+n} \cdot \frac{k_2+n-2}{x+n-1} \dots \frac{k_n}{x+1}$$

L'équation (13) conduit encore à d'autres relations. On en tire d'abord

$$x f_\varepsilon = \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} \{ \varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon - 1) f_\varepsilon \},$$

puis

$$\frac{x}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{ \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} \{ \varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - x(\overline{\mu-1}\,\varepsilon - 1) f_\varepsilon \} \right\}$$

Digitized by Google

En y appliquant la formule de Leibnitz (15), qu'on peut mettre aussi sous la forme

$$\frac{\partial_x^n \varphi x \psi x}{n!} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\partial_x^{n-m} \varphi x}{(n-m)!} \cdot \frac{\partial_x^m \psi x}{m!},$$

on trouvera

$$\frac{\varkappa}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon =$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{(n-m)!}\partial_\varepsilon^{n-m}\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} \cdot \frac{1}{m!}\partial_\varepsilon^m \{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - \varkappa(\overline{\mu-1}\varepsilon - 1)f_\varepsilon\}.$$

Or, on a

$$\frac{1}{(n-m)!}\partial_\varepsilon^{n-m}\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon} = \frac{\overset{n-m+1}{(\mu)}}{\mu} = \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1},$$

et, eu égard à la formule (17),

$$\frac{1}{m!}\partial_\varepsilon^m \{\varepsilon(1+\varepsilon)\partial_\varepsilon f_\varepsilon - \varkappa(\overline{\mu-1}\,\varepsilon - 1)f_\varepsilon\}$$

$$= \frac{m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon + \frac{m-1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon - \frac{\varkappa\overline{\mu-1}}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon + \frac{\varkappa}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon$$

$$= \frac{\varkappa+m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon - \frac{\overline{\mu-1}\,\varkappa - m + 1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon;$$

donc l'équation précédente se changera en

$$\frac{\varkappa}{n!}\partial_\varepsilon^n f_\varepsilon = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\left\{\frac{\varkappa+m}{m!}\partial_\varepsilon^m f_\varepsilon - \frac{\overline{\mu-1}\,\varkappa - m+1}{(m-1)!}\partial_\varepsilon^{m-1} f_\varepsilon\right\},$$

ou, en vertu des équations (5) et (11),

$$(26)\qquad \varkappa\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\{(\varkappa+m)\mathfrak{A}_{\varkappa,m} - (\overline{\mu-1}\,\varkappa - m+1)\mathfrak{A}_{\varkappa,m-1}\}.$$

Le second membre deviendra plus simple, si l'on observe qu'en général on a

$$\sum_{m=0}^{m=n+1}\{\varphi_m + \psi_{m-1}\} = \varphi_n + \psi_{-1} + \sum_{m=0}^{m=n}\{\varphi_m + \psi_m\},$$

et que par suite l'équation (26) peut être changée en

$$\varkappa\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = (\varkappa+n)\mathfrak{A}_{\varkappa,n} - \frac{\overset{n}{(\mu-1)}}{n+1}(\overline{\mu-1}\,\varkappa+1)\,\mathfrak{A}_{\varkappa,-1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=n}\left\{\frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}(\varkappa+m) - \frac{\overset{n-m-1}{(\mu-1)}}{n-m}(\overline{\mu-1}\,\varkappa - m)\right\}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Mais, suivant l'équation (8), on a

$$\mathfrak{A}_{\varkappa,-1} = 0.$$

Digitized by Google

et de l'équation (16) on deduit

$$\overset{n-m}{(\mu-1)} = \frac{\mu-n+m}{n-m}\overset{n-m-1}{(\mu-1)};$$

donc, après quelques réductions, l'équation précédente deviendra

$$(27)\quad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{(\overline{n-m}\,\varkappa-m)\mu-(\varkappa+m)}{(n-m)(n-m+1)}\overset{n-m-1}{(\mu-1)}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Remarquons encore qu'à l'aide de la relation (18) on déduit de l'équation (26)

$$(28)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{\overset{n-m}{(\mu-1)}}{n-m+1}\mathfrak{A}_{\varkappa-1,m}.$$

On parvient à une relation semblable à l'équation (27), en opérant sur l'équation (12) présentée sous la forme

$$\partial_\varepsilon l f_\varepsilon = \frac{\varkappa\mu}{1+\varepsilon-(1+\varepsilon)^{1-\mu}} - \frac{\varkappa}{\varepsilon},$$

d'oú l'on tire

$$\varkappa\mu f_\varepsilon = \left\{1-\frac{(1+\varepsilon)^{1-\mu}-1}{\varepsilon}\right\}\left\{\varepsilon\partial_\varepsilon f_\varepsilon+\varkappa f_\varepsilon\right\}.$$

En prenant la dérivée de l'ordre n par rapport à ε des deux membres de cette équation, et se servant des formules (15) et (17), on obtiendra après quelques réductions

$$(29)\qquad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n}(\varkappa+m)\frac{\overset{n-m+1}{(1-\mu)}}{\mu}\mathfrak{A}_{\varkappa,m},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(30)\quad n\mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{(\varkappa+m)(1-\mu)}{(n-m)(n-m+1)}\overset{n-m-1}{(\mu+n-m-1)}\mathfrak{A}_{\varkappa,m}.$$

Ajoutons encore que l'on trouvera des relations analogues pour les coefficients $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ à l'aide des équations (9) et (10). L'équation (27) conduira à

$$(31)\qquad n\mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n}\frac{\overline{n-m}\,\varkappa-m}{(n-m+1)!}\mathfrak{B}_{\varkappa,m},$$

$$(32)\qquad n\mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m}\frac{\varkappa+m}{(n-m)(n-m+1)}\mathfrak{C}_{\varkappa,m}.$$

L'équation (28) donnera

$$(33)\qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1}\frac{1}{(n-m+1)!}\mathfrak{B}_{\varkappa-1,m},$$

$$(34)\qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1}\frac{(-1)^{n-m}}{n-m+1}\mathfrak{C}_{\varkappa-1,m}.$$

Enfin l'équation (29) ou (30) fournira seulement

Digitized by Google

$$(35)\qquad n\mathfrak{B}_{x,n}=\sum_{m=0}^{m=n}(-1)^{n-m+1}\frac{x+m}{(n-m+1)!}\mathfrak{B}_{x,m},$$

car pour $\mu=0$ elle coincidera avec l'équation (27) et se réduira donc à la relation (32).

A ces relations peuvent se joindre celles qu'on obtient, en appliquant la formule de Leibnitz au second membre de l'équation

$$\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^x=\partial_\varepsilon^n\left\{\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^{x-\lambda}\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^\lambda\right\}.$$

On arrivera à

$$(36)\qquad \mathfrak{A}_{x,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\mathfrak{A}_{\lambda,m}\mathfrak{A}_{x-\lambda,n-m},$$

puis, au moyen des équations (9) et (10),

$$(37)\qquad \mathfrak{B}_{x,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\mathfrak{B}_{\lambda,m}\mathfrak{B}_{x-\lambda,n-m},$$

$$(38)\qquad \mathfrak{C}_{x,n}=\sum_{m=0}^{m=n+1}\mathfrak{C}_{\lambda,m}\mathfrak{C}_{x-\lambda,n-m}.$$

Dans toutes les formules rapportées ci-dessus la valeur de μ reste invariable; c'est pour quoi nous avons écrit partout simplement $\mathfrak{A}_{x,n}$ au lieu de $\mathfrak{A}_{x,n,\mu}$. Cherchons à présent des relations dans lesquelles il entre à-la-fois diverses valeurs de μ.

Soit y une fonction de x déterminée par l'équation

$$(39)\qquad y=y_x=(1+x)^\mu-1;$$

il s'en suit

$$\frac{y}{\mu x}=\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}.$$

De plus on tire de l'équation (39)

$$x=(1+y)^{\frac{1}{\mu}}-1,$$

d'où

$$\frac{\mu x}{y}=\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}}-1}{\frac{1}{\mu}y};$$

donc on aura

$$(40)\qquad \frac{y}{\mu x}=\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}=\left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}}-1}{\frac{1}{\mu}y}\right\}^{-1},$$

puis

$$\partial_x^n\left\{\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}\right\}^x=\partial_x^n\left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}}-1}{\frac{1}{\mu}y}\right\}^{-x}.$$

Digitized by Google

Rappelons nous maintenant la formule (7) du No. précédent

(41) $$\partial_x^n f_y = \sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{m!} f_y^{(m)} \partial_\varepsilon^n \{y_{x+\varepsilon} - y\}^m,$$

et appliquons cette formule au second membre de l'équation précédente; nous obtiendrons, en égard à l'équation (39),

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}\right\}^x =$$

$$\sum_{m=0}^{m=n+1} \frac{1}{m!} \partial_y^m \left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}} - 1}{\frac{1}{\mu} y}\right\}^{-x} \partial_\varepsilon^n \{(1+x+\varepsilon)^\mu - (1+x)^\mu\}^m.$$

En faisant $x=0$, et observant que y s'évanouit avec x, on déduit de la précédente jointe à l'équation (5):

$$\mathfrak{A}_{x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{A}_{-k,m,\frac{1}{\mu}} \frac{\partial_\varepsilon^n}{n!} \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^m.$$

Mais, à l'aide des équations (5) et (17), on trouvera

$$\frac{1}{n!} \partial_\varepsilon^n \{(1+\varepsilon)^\mu - 1\}^m = \frac{\mu^m}{n!} \partial_\varepsilon^n \varepsilon^m \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^m$$

$$= \frac{\mu^m}{(n-m)!} \partial_\varepsilon^{n-m} \left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^m = \mu^m \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu};$$

donc on aura

$$\mathfrak{A}_{x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mu^n \mathfrak{A}_{-x,m,\frac{1}{\mu}} \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu},$$

ou, en écrivant $-x$ au lieu de x,

(42) $$\mathfrak{A}_{-x,n,\mu} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mu^n \mathfrak{A}_{x,m,\frac{1}{\mu}} \mathfrak{A}_{m,n-m,\mu}.$$

De plus on en tire, en vertu des équations (9) et (10),

(43) $$\mathfrak{B}_{-x,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{C}_{x,m} \mathfrak{B}_{m,n-m},$$

(44) $$\mathfrak{C}_{-x,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \mathfrak{B}_{x,m} \mathfrak{C}_{m,n-m}.$$

Le théorème de Burmann conduit encore à une relation plus simple. En effet, en vertu de ce théorème, on a

$$\partial_x^n \varphi_y = \partial_y^{n-1} \left\{\left(\frac{y}{x}\right)^n \partial_y \varphi_y\right\},$$

en faisant $x=0$ après les différentiations, et supposant que y s'évanouit avec x, tandisque la rapport $\frac{y}{x}$ reste fini. Il s'en suit

Digitized by Google

$$\partial_x^n\left(\frac{y}{x}\right)^\varkappa=\partial_y^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^n\partial_y\left(\frac{y}{x}\right)^\varkappa\right\}=\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\partial_y^n\left(\frac{y}{x}\right)^{\varkappa+n},$$

et

$$\partial_x^n\left(\frac{y}{\mu x}\right)^\varkappa=\mu^n\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\partial_y^n\left(\frac{y}{\mu x}\right)^{\varkappa+n}.$$

Si donc y dépend de x par l'équation (39), d'où l'on a déduit l'équation (40), on obtiendra

$$\partial_x^n\left\{\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}\right\}^\varkappa=\mu^n\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\partial_y^n\left\{\frac{(1+y)^{\frac{1}{\mu}}-1}{\frac{1}{\mu}y}\right\}^{-\overline{\varkappa+n}},$$

et puisque les valeurs de x et y sont nulles après les différentiations, on aura, suivant l'équation (5),

$$\mathfrak{A}_{\varkappa,n,\mu}=\mu^n\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\mathfrak{A}_{-\overline{\varkappa+n},n,\frac{1}{\mu}}; \tag{45}$$

d'où encore, en ayant égard aux équations (9) et (10),

$$\mathfrak{B}_{\varkappa,n}=\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\mathfrak{C}_{-\overline{\varkappa+n},n}, \tag{46}$$

$$\mathfrak{C}_{\varkappa,n}=\frac{\varkappa}{\varkappa+n}\mathfrak{B}_{-\overline{\varkappa+n},n}. \tag{47}$$

Avant de terminer cet article, nous ferons connaître les formules par lesquelles les coefficients $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont exprimés d'une manière indépendante.

Considérons d'abord le cas ou $\varkappa$ sera un nombre entier et positif, que nous désignerons par p. On aura

$$\mathfrak{A}_{p,n}=\frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n\left\{\frac{(1+\varepsilon)^\mu-1}{\mu\varepsilon}\right\}^p,$$

d'où, suivant la formule (17),

$$\mathfrak{A}_{p,n}=\frac{1}{\mu^p}\frac{1}{(p+n)!}\partial_\varepsilon^{p+n}\{(1+\varepsilon)^\mu-1\}^p,$$

puis

$$\mathfrak{A}_{p,n}=\frac{(-1)^p}{\mu^p}\sum_{q=0}^{q=p+1}(-1)^q\binom{p}{q}\frac{1}{(p+n)!}\partial_\varepsilon^{p+n}(1+\varepsilon)^{q\mu},$$

ou

$$\mathfrak{A}_{p,n}=\frac{(-1)^p}{\mu^p}\sum_{q=0}^{q=p+1}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q\mu}{p+n}. \tag{48}$$

Soit ensuite u une fonction de x déterminée par l'équation

$$u=u_x=\frac{(1+x)^\mu-1}{\mu x}-1, \tag{49}$$

d'où

Digitized by Google

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}\right\}^\varkappa = \partial_x^n (1+u)^\varkappa.$$

Appliquons l'équation (41) au second membre, et observons que

$$\frac{1}{m!}\partial_u^m (1+u)^\varkappa = \overset{m}{(\varkappa)}(1+u)^{\varkappa-m},$$

il viendra

$$\partial_x^n \left\{\frac{(1+x)^\mu - 1}{\mu x}\right\}^\varkappa = \sum_{m=0}^{m=n+1} \overset{m}{(\varkappa)}(1+u)^{\varkappa-m}\,\partial_\varepsilon^n (u_{x+\varepsilon} - u)^m;$$

et, puisque $u=0$, lorsque $x=0$, on trouvera, en prenant $x=0$ et recourant à l'équation (5),

$$(50)\qquad \mathfrak{A}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \alpha_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$\alpha_{m,n} = \frac{1}{n!}\partial_\varepsilon^n u_\varepsilon^m,$$

ou, suivant l'équation (49),

$$\alpha_{m,n} = \frac{(-1)^m}{n!}\partial_\varepsilon^n \left\{1 - \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\mu\varepsilon}\right\}^m;$$

de plus, m étant un nombre entier et positif, on tire de la précédente jointe à l'équation (5),

$$(51)\qquad \alpha_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{A}_{p,n}.$$

Donc, lorsqu'on aura trouvé la valeur de $\mathfrak{A}_{p,n}$ par l'équation (48), on évaluera $\alpha_{m,n}$ par l'équation (51), et l'équation (50) donnera enfin la valeur de $\mathfrak{A}_{\varkappa,n}$, quel que soit $\varkappa$.

On trouvera pareillement, pour l'évaluation de $\mathfrak{B}$,

$$(52)\qquad \mathfrak{B}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \beta_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

$$(53)\qquad \beta_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{B}_{p,n},$$

$$(54)\qquad \mathfrak{B}_{p,n} = \frac{(-1)^p}{(p+n)!} \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)}\, q^{p+n}.$$

Quant au coefficient $\mathfrak{C}$, on aura encore

$$(55)\qquad \mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \sum_{m=0}^{m=n+1} \gamma_{m,n}\overset{m}{(\varkappa)},$$

$$(56)\qquad \gamma_{m,n} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m+1} (-1)^p \overset{p}{(m)}\mathfrak{C}_{p,n};$$

mais, lorsqu'on voudra déduire la valeur de $\mathfrak{C}_{p,n}$ de l'équation (48),

Digitized by Google

en y faisant $\mu=0$, on sera conduit à la forme $\frac{0}{0}$. Pour éviter cet inconvénient, on différentie p fois par rapport à ε l'équation

$$\varepsilon^p \mathfrak{A}_{p,n,\varepsilon} = (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \overset{p+n}{(q\varepsilon)},$$

et l'on trouvera, en ayant égard aux équations (10) et (17),

$$p!\,\mathfrak{C}_{p,n} = (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(q\varepsilon)},$$

ou, si l'on substitue ε à εq et par suite $q\partial_\varepsilon$ à ∂_ε,

$$p!\,\mathfrak{C}_{p,n} = \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(\varepsilon)} (-1)^p \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} q^p.$$

Or, comme on a

$$\mathfrak{B}_{p,0} = 1,$$

on déduit de l'équation (54)

$$1 = \frac{(-1)^p}{p!} \sum_{q=0}^{q=p+1} (-1)^q \overset{q}{(p)} q^p,$$

ce qui change l'équation précédente en

(57) $$\mathfrak{C}_{p,n} = \partial_\varepsilon^p \overset{p+n}{(\varepsilon)};$$

d'où l'on voit que $\frac{1}{p!}\mathfrak{C}_{p,n}$ sera le coefficient de x^p dans le développement de

$$\overset{p+n}{(x)} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-p-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\dots\,(p+n)}$$

suivant les puissances entières et positives de x. Ayant évalué ce coefficient, soit par le théorème de Girard, soit par d'autres moyens, on calculera $\gamma_{m,n}$ par l'équation (56), et l'équation (55) fournira ensuite la valeur de $\mathfrak{C}_{\varkappa,n}$ pour tout $\varkappa$. Il faut remarquer toutefois qu'il sera plus simple de déduire la valeur de $\mathfrak{C}$ des équations (47) et (52), ce qui donnera immédiatement

$$\mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \frac{\varkappa}{\varkappa+n} \sum_{m=0}^{m=n+1} \beta_{m,n} \overset{m}{(-\varkappa-n)},$$

ou, ce qui revient au même,

(58) $$\mathfrak{C}_{\varkappa,n} = \frac{\varkappa}{\varkappa+n} \sum_{m=0}^{m=n+1} (-1)^m \beta_{m,n} \overset{m}{(\varkappa+n+m-1)}.$$

Digitized by Google

XIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\frac{1}{14^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\frac{1}{12^2-1}+\ldots\text{ in inf. }=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^2}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{2}{\pi}.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3}+\frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4}+\frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^5}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{4}{\pi}-1.$$

Zwischen den Schenkeln AB und AC des Winkels BAC soll die Linie DE so gezogen werden, dass der innerhalb des Winkels BAC gegebene Punkt F der Schwerpunkt des Dreiecks ADE werde.

(Die Figur zu dieser und der folgenden Aufgabe wird sich ein Jeder leicht selbst entwerfen können.)

Ausserhalb der Schenkel AB, AC des Winkels BAC ist ein Punkt E und innerhalb dieser Schenkel eine durch die Spitze A des Winkels gehende Linie AD gegeben; man soll die, die Schenkel AB und AC in M und N schneidende Gerade MN dergestalt ziehen, dass sie verlängert durch E gehe und, wenn O den Durchschnittspunkt dieser Linie mit AD bezeichnet, zugleich $MO=ON$ sei.

Digitized by Google

Auf einer Geraden OP rollt ein Kreis, dessen Halbmesser R ist, mit einer Geschwindigkeit V. Auf dem Umfange dieses Kreises rollt ein zweiter Kreis, welcher den ersten im Anfange der Bewegung in einem bestimmten Punkte G berührt, mit einer Geschwindigkeit v. Ist nun r der Halbmesser dieses Kreises, so verlangt man den Ort eines bestimmten Punktes M des Umfangs des letztern Kreises am Ende der Zeit t, so wie die Kurve, welche dieser Punkt beschrieben hat.

Es ist

$$ab + (a+d)be + (a+2d)be^2 + (a+3d)be^3 + \dots + (a+(n-1)d)be^{n-1}$$
$$= \frac{(e-1)(a+(n-1)d)be^n - (e^n-1)bd - (a-d)b(e-1)}{(e-1)^2}.$$

So findet man für $a=1$, $e=b$, $d=1$:

$$b + 2b^2 + 3b^3 + 4b^4 + \dots + nb^n = \frac{nb^{n+2} - (n+1)b^{n+1} + b}{(b-1)^2}.$$

Es ist

$$r(r-1)(r-2)\dots 1 + (r+1)r(r-1)\dots 2.x + (r+2)(r+1)\dots 3.x^2 + \dots$$
$$\dots + (r+m)(r+m-1)\dots(m+1)x^m$$
$$= r(r-1)\dots 1\Big[\pm\frac{x^{m+r+1}-x}{(x-1)^{r+1}} \mp \frac{m+r+1}{1}\cdot\frac{x^{m+r}-1}{(x-1)^r}$$
$$\pm\frac{(m+r+1)(m+r)}{1.2}\cdot\frac{x^{m+r-1}}{(x-1)^{r-1}} \mp \frac{(m+r+1)(m+r)(m+r-1)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{m+r-2}}{(x-1)^{r-2}}$$
$$\dots\dots + \frac{(m+r+1)(m+r)\dots(m+2)}{1.2.3\dots r}\cdot\frac{x^{m+1}}{x-1}\Big],$$

wobei das obere Zeichen für ein gerades, das untere für ein ungerades r gilt.

So findet sich z. B. für $r=3$:

$$3.2.1 + 4.3.2.x + 5.4.3.x^2 + \dots + (m+3)(m+2)(m+1)x^m$$
$$= 6\Big[-\frac{x^{m+4}-x}{(x-1)^4} + (m+4)\cdot\frac{x^{m+3}-1}{(x-1)^3} - \frac{(m+4)(m+3)}{1.2}\cdot\frac{x^{m+2}}{(x-1)^2}$$
$$+ \frac{(m+4)(m+3)(m+2)}{1.2.3}\cdot\frac{x^{m+1}}{x-1}\Big].$$

Für $x=1$ bietet sich die Summe unter der Form $\frac{0}{0}$ dar, deren wahrer Werth jedoch alsdann leicht zu ermitteln ist.

Digitized by Google

$$bx+abx^2+(a+1)bx^3+(a+2)bx^4+\ldots.+(a+n-2)bx^n$$
$$=ab\frac{x^{n+1}-x^2}{x-1}+b\frac{(n-2)x^{n+2}-(n-1)x^{n+1}+2(x^3-x^2)+x}{(x-1)^2}.$$

XIV.

Miscellen.

Die durch grosse Gelehrsamkeit, namentlich auch in philologischen Dingen, ausgezeichnete Schrift: Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen am 23–25. Aug. 1843 im Namen der vereinigten Universität Halle und Wittenberg dargebracht von Dr. J. S. C. Schweigger, Professor der Naturwissenschaft in Halle. (Ueber naturwissenschaftliche Mysterien in ihrem Verhältniss zur Litteratur des Alterthums.) Halle. 4. enthält auch manche für die Geschichte der Mathematik interessante Bemerkungen, und verdient daher in dieser Beziehung um so mehr hier empfohlen und in Erinnerung gebracht zu werden, weil solche Gelegenheitschriften oft weniger Beachtung finden, als sie verdienen. Ich werde daher hier und gelegentlich wieder in den folgenden Heften des Archivs Einiges aus derselben ausheben, wünsche aber, dass dadurch Niemand abgehalten werden möge, sich mit dem ganzen Inhalte dieser gewiss recht sehr Beachtung verdienenden Schrift des würdigen Herrn Verfassers und anderer, eine ähnliche Tendenz habender Schriften desselben näher bekannt zu machen, was insbesondere auch den Herren Philologen anzurathen sein möchte.

Ich hebe für diesmal die folgende, das berühmte Problem von der Verdoppelung des Würfels betreffende Stelle mit einer ausführlichen Note zu derselben heraus, die sich S. 12 und 13 und S. 44 und 45 finden, und hoffe, dass beides für sich verständlich sein wird, indem ich nur noch bemerke, dass die Note sich hauptsächlich auf die im Texte mit Cursivschrift gedruckten Worte bezieht.

G.

„Wenn *Aristoteles*, da wo er in seiner Physik vom *Raum* redet, die ungeschriebenen Lehrsätze (*ἄγραφα δόγματα*) des Plato erwähnt, so ist es klar, dass man sich dabei nicht ein eigenes, dogmatisch geordnetes philosophisches System zu denken habe, wie *Tennemann* meint, eben so wenig aber, wie neuerdings *Hermann* annimmt, „eine weitere Entwickelung der Sokratischen Keime unter dem Einfluss anderer Philosophien oder eigener Erfahrungen“, was auf spätere, von der schriftlichen Mittheilung verschiedene Zusätze hinauslaufen würde, von denen jedoch schwer zu

beweisen wäre, dass sie lediglich eine weitere Entwickelung Sokratischer Keime waren, also der Hauptsache nach auf Moralphilosophie sich bezogen. Eher das Gegentheil lässt sich wahrscheinlich machen mit Beziehung auf eine Andeutung *Cicero's*, der ausdrücklich hervorhebt, dass Plato sich von ägyptischen Priestern in astronomischen und mathematischen Dingen habe unterrichten lassen, auch die Pythagoräer aufgesucht, um sich über Dinge zu belehren, welche *Sokrates verschmähte.* Und man darf nur einen Blick werfen auf die Geschichte der Mathematik, um sich zu überzeugen, dass Plato und seine Schule auch in mathematischer Beziehung einen bedeutenden Ruf habe. Von Aufgaben ganz anderer Art handelt es sich hier, als diejenigen sind, worauf wohl zuweilen in den Platonischen Schriften angespielt wird. Im mathematischen Fache müssen wir also ganz entschieden ungeschriebene Platonische Lehrsätze annehmen. Selbst mit einem Ausspruche des Delphischen Gottes hängt Platos Ruf als Mathematiker zusammen, indem er das geometrische Problem gelöst haben soll, wovon das Delphische Orakel das Aufhören der Pest in Athen abhängig machte. Was man auch halten mag von dieser Sage oder Fabel: auf alle Fälle ist ihre Entstehung nur unter der Voraussetzung denkbar, dass nicht bloss im Orient, sondern auch in Griechenland, und namentlich in dem durch seine Eleusinischen Mysterien berühmten Athen, mathematische und religiöse Beziehungen in engerer Verbindung standen, als man gewöhnlich sich vorstellt. Wie aber, aus ganz guten, wissenschaftlichen sowohl als moralischen Gründen, wir lieber gar keine Mathematik und Naturwissenschaft werden haben wollen, als eine solche traditionelle, welche noch heut zu Tage bei den Brahminen in Ostindien religiös sich geltend macht: so konnte dasselbe auch bei *Sokrates* der Fall sein, welcher eben darum bloss auf Moralphilosophie sich einliess, die ihrer Natur nach entgegengesetzt ist jedem falschen Mysticismus."

13. „*Cicero* de finibus V. 29. — Die übrigen hierher gehörigen, auf *Plato's* mathematische nur mündlich, nicht in seinen Schriften vorgetragene Lehrsätze sich beziehenden Beweisstellen, findet man gesammelt in *Montucla's* Geschichte der Mathematik, B. I. S. 163—185, wo umständlich die Rede ist von den bedeutenden Verdiensten Plato's und der Platonischen Schule um Mathematik. — So wie aber der Ruhm des *Sokrates* mit dem Ausspruche des *Delphischen Gottes*, der ihn für den weisesten erklärte, zusammenhängt: so reiht eine Sage den Ruhm *Plato's als Mathematikers* an den Ausspruch desselben Gottes an. Um sogleich zu verstehn, dass von dem sogenannten *Delischen Problem*, die *Verdoppelung des Cubus* betreffend, die Rede sei, lese man S. 13. Z. 12 (— oben Z. 18. — G.) statt „das *Delphische* Orakel" vielmehr „das *Delische* Orakel", obwohl der Orakel gebende Gott derselbe ist, nämlich *Apollo.* Apollo soll die Verdoppelung der Masse seines cubischen Altars, gemäss den von *Montucla* angeführten Zeugnissen, zur Bedingung des Aufhörens einer Pest in Attica gemacht haben. Natürlich darf man nicht an jene berühmte Pest denken, welche den Perikles hinwegraffte, sondern muss eine spätere Rückkehr der Seuche annehmen, sofern nämlich *Plato* das Problem gelöst haben soll, obwohl *Montucla* gezeigt hat, dass es schon vor ihm gelöst war. Uebrigens giebt es noch eine ganz andere, hinsichtlich auf Namen und Localität verschiedene Erzählungsart der Entstehung dieses Problems. Und eben darum, weil von einer ganz schwankenden und ihrer Natur nach nicht an eine bestimmte Localität zu bindenden Fabel die Rede ist: so kann man (wie *Hutton* es that und eben so auch *Bar-*

Digitized by Google

low, jeder in seinem mathematical and philosophical dictionary,) das *Delische Problem* bloss als *Appollinisches Problem* auffassen, da Apollo auch *Delius* heisst; und mag dann, wie es gleichfalls von *Hutton* und *Barlow* geschah, auch *Delphisches* Orakel schreiben, statt *Delisches Orakel*. Letzteres aber müsste nach der *Plutarchi*schen Erzählung (de genio Sokratis c. 7.) genannt werden, obwohl Plutarch in derselben Stelle uns schon auf eine *viel allgemeinere Auffassung der Erzählung* hinleitete. — Schon erwähnt nämlich wurde, wie günstig sich das Delphische Orakel über Sokrates aussprach, was in der *Platonischen Apologie* als ein Aufruf des Gottes dargestellt wird zu einer den Forschungsgeist anregenden Lehrweise. Und gerade aus demselben Gesichtspunkte fasst *Plato* das geometrische Problem desselben Gottes auf. Es erzählt nämlich *Plutarch*, dass Plato, über Lösung dieses Problems befragt, sich an etwas erinnert habe, was bei seinem Aufenthalt in Aegypten sich ereignet hatte. Es sei nämlich eine Nachzeichnung einer ägyptischen Aufschrift, welche in einem Grabmal der *Alkmene*, der Mutter des *Herkules*, auf einer Tafel gefunden wurde, nach Aegypten gesandt und diese Aufschrift von *Chonuphis*, dem Propheten wie er genannt wird, erklärt worden in folgender Weise: die Griechen würden zu einem ruhigen und friedlichen Leben ermahnt, sie sollten der *Philosophie* (d. h. im alten Sinne des Wortes *Naturwissenschaft*) sich befleissigen und mit Gründen statt mit Waffen ihre Streitigkeiten entscheiden. — In diesem Sinne nun habe *Plato* geantwortet: Apollo wolle, indem er ein geometrisches Problem vorlege, die Griechen wegen ihrer Unwissenheit verhöhnen und sie erinnern, dass sie fleissiger *Geometrie* treiben möchten. Der Gott verlange gar nicht die Verdoppelung der Masse seines cubischen Altars, sondern befehle den Griechen das Unheil des Krieges zu vermeiden, sich den Musen zu widmen, und freundlich mit einander zu verkehren, nachdem sie durch *Wissenschaften* und namentlich *Mathematik* die Leidenschaften besänftiget (*διὰ λόγων καὶ διὰ μαθημάτων τὰ πάθη κατεπραΰνοντας*). — Vergleicht man damit eine Stelle des *Plutarch* in dem Leben des Nikias c. 23.: so wird man mit Verwunderung erfüllt, zu sehen, wie viele Mühe es kostete und wie künstliche Umwege man wählen musste, um der Mathematik und den Naturwissenschaften zunächst nur Duldung wenigstens im Leben und endlich allgemeinere Verbreitung zu verschaffen, wobei man dann getrost der still wirkenden Kraft der Wahrheit vertrauen konnte. Selbst Orakelsprüche mussten in dieser Beziehung zur Hülfe genommen werden. Das lange Sprechen des Sokrates in der Platonischen Apologie über den ihn betreffenden Ausspruch des Delphischen Orakels erscheint in diesem Zusammenhang in einem ganz anderen Lichte. Zugleich merkt man, dass bei den Orakeln des Apollo wohl mehr unterrichtete Priester in Thätigkeit mögen gewesen sein, als jene erblichen waren in den Eleusinischen Mysterien aus der Familie der Eumolpiden. — Ueberhaupt hatten die Mysterien vorzugsweise die Traditionen der alten Zeit, die Orakel aber die Gegenwart und Zukunft im Auge; theilweise eben darum den durch die Mysterien veranlassten Hemmungen entgegengesetzt. Als diese ihren Einfluss verloren und namentlich die mathematischen Wissenschaften Gemeingut der Menschheit wurden, schwiegen bald auch die Orakel und mussten schweigen.“

Ueber Dezimalbrüche.

Von Herrn **Simon Spitzer** zu Wien.

(Von Herrn Director v. **Littrow** dem Herausgeber zur Aufnahme in das Archiv gütigst mitgetheilt.)

Bei Abfassung des gegenwärtigen Aufsatzes war es nicht meine Absicht, die Anzahl der bestehenden Rechnungs-Vortheile

Digitized by Google

um Einen zu vermehren, da ich weiss, dass sie selten weiter als in der engen Sphäre der Schule ihre Anwendung finden; es war bloss meine Absicht, auf die zahlreichen Gesetze aufmerksam zu machen, die in den Dezimalen herrschen, die wie aus einer unausschöpfbaren Quelle jedem darüber Denkenden von selbst auffallen.

Die Verwandlung mehrerer gemeiner Brüche in Dezimalen ist das erste, was ich hier betrachte. Es wird gewiss Jeden überraschen, wenn ich behaupte, ja selbst durch die That zeige, dass ich gemeine Brüche, deren Nenner 19, 29, 39, 49, u. s. w. sind, so schnell in Dezimalbrüche verwandle, dass kaum Jemand das Resultat so schnell abschreiben könnte, als ich es ausrechne.

Ich will zuerst den eigentlichen Rechnungsmechanismus durch mehrere Beispiele erläutern und dann die Richtigkeit des Verfahrens durch einen einfachen Beweis bestätigen. Es sei $\frac{16}{19}$ das gewählte Beispiel, so sage ich: 2 in 16 geht 8mal (der Quotient wird jedesmal aufgeschrieben und als neuer Dividend betrachtet), 2 in 8 geht 4mal, 2 in 4 geht 2mal, 2 in 2 geht 1mal, 2 in 1 geht 0mal, bleibt 1 (der Rest wird immer verzehnfacht), 2 in 10 geht 5mal, 2 in 5 geht 2mal, bleibt 1 (1 als Rest wird verzehnfacht und der Quotient 2 dazu addirt), 2 in 12 geht 6mal, 2 in 6 geht 3mal, 2 in 3 geht 1mal, bleibt 1, 2 in 11 geht 5mal u. s. f., so dass man hat $\frac{16}{19} = 0{\cdot}84210526315....$

Zweites Beispiel. $\frac{9}{29}$. Hier ist der beständige Divisor 3; also 3 in 9 geht 3mal, 3 in 3 geht 1mal, 3 in 1 geht 0mal, 3 in 10 geht 3mal, bleibt 1, 3 in 13 geht 4mal, bleibt 1, 3 in 14 geht 4mal, bleibt 2, 3 in 24 geht 8mal, 3 in 8 geht 2mal, bleibt 2, 3 in 22 geht 7mal, bleibt 1, 3 in 17 geht 5mal, bleibt 2, 3 in 25 geht 8mal, bleibt 1 u. s. w.; daher $\frac{9}{29} = 0{\cdot}31034482758....$

Drittes Beispiel. $\frac{1}{49}$. Hier sage ich 5 in 1 geht 0mal, 5 in 10 geht 2mal, 5 in 2 geht 0mal, 5 in 20 geht 4mal, 5 in 4 geht 0mal, 5 in 40 geht 8mal, 5 in 8 geht 1mal, bleibt 3, 5 in 31 geht 6mal, bleibt 1, 5 in 16 geht 3mal, bleibt 1, 5 in 13 geht 2mal, bleibt 3, 5 in 32 geht 6mal, bleibt 2, 5 in 26 geht 5mal, u. s. w., so dass $\frac{1}{49} = 0{\cdot}020408163265....$

Wer sich die Mühe nimmt, diese angeführten Beispiele aufmerksam durchzulesen, sie selbst auf dem Papier zu arbeiten und sich durch drei bis vier Stunden in mehreren ähnlichen Beispielen übt, wird sich gewiss überzeugen, dass ich vorher nichts Uebertriebenes behauptete.

Jetzt zum Beweis. Es sei Z der Zähler und $10N-1$ der Nenner, so heisst der Bruch $\frac{Z}{10N-1}$, und wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, findet man:

$$\frac{Z}{10N-1}=\frac{Z}{10N}+\frac{Z}{10^2N^2}+\frac{Z}{10^3N^3}+\frac{Z}{10^4N^4}+\ldots,$$

d. h. es entsteht eine unendliche Reihe, deren 1stes Glied 10tel, deren 2tes Glied 100tel, 3tes Glied 1000tel u. s. w. enthält. Ferner sieht man aus der Reihe: man findet die 1ste Dezimalziffer, wenn man Z durch N dividirt, die 2te Ziffer erhält man aus der ersten, wenn man diese durch N dividirt, eben so erhält man die 3te aus der 2ten, wenn man diese durch N dividirt u. s. f. Dass man den jedesmaligen Rest verzehnfacht, folgt ebenfalls aus der Betrachtung der Reihe oder auch unmittelbar aus dem Geiste des dekadischen Zahlensystems.

Fast noch einfacher lässt sich der Satz beweisen durch Anwendung der Fourierschen Divisions-Methode, die ich hier als bekannt voraussetze. Ich bezeichne der Einfachheit wegen 79 mit $8\dot{1}$, 29 mit $3\dot{1}$, so dass der Punkt über dem Einer minus bedeutet; es ist auf diese Art z. B.

$\frac{5}{79} = 5\cdot0 : 8\dot{1} = 0\cdot0632913$	$\frac{8}{59} = 8 : 6\dot{1} = 0\,135593$
26	21
23	33
72	35
9	55
11	19
31	13
u. s. w.	u. s. w.

Dass die jedesmalige Verbesserung nicht abgezogen, sondern hinzuaddirt wird, folgt daraus, weil die Einheit im Dividend nicht positiv, wie bei der gewöhnlichen Fourierschen, sondern negativ ist, daher sich die Subtraction in eine Addition verwandelt.

Bei der Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche stiessen mir oft solche Perioden auf, deren Gesetz in der Zifferfolge ganz jenem der arithmetischen Reihen glich, z. B.

0·24 27 30 33 36 39 42 45 48 51... oder 0·105 110 115 120 125 130 135 140...

Sie nach der gewöhnlichen Methode in gemeine Brüche zu verwandeln, ist gewiss unausführbar und ausserordentlich zeitraubend. Ein bedeutend einfacherer Weg dürfte der folgende sein:

$$S = 0{\cdot}24\ 27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ldots;$$

multiplicirt man diese Gleichung mit 100 und zieht man die Gegebene von der so erhaltenen ab, so ist

$$100\,S = 24\cdot27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45\ 48\ldots,$$

folglich

$$99\,S = 24\cdot0303030303030303\ldots$$

oder

Digitized by Google

$$99\,S = 24 + \frac{3}{99} = \frac{2379}{99}\text{, daher } S = \frac{2379}{99^2} = \frac{2379}{9810}.$$

Eben so erhält man aus

$$\begin{array}{rl} S = & 0 \cdot 105\,110\,115\,120\,125 \ldots \\ 1000\,S = & 105 \cdot 110\,115\,120\,125\,130 \ldots \\ \hline 999\,S = & 105 \cdot 005\,005\,005\,005\,005 \ldots = 105 + \frac{5}{999} = \frac{104900}{999}; \end{array}$$

daher

$$S = \frac{104900}{999^2} = \frac{104900}{998001}.$$

Nachdem ich diese Aufgabe so einfach gelöst, versuchte ich Perioden, deren Ziffern in arithmetischen Reihen höherer Grade fortschritten, in gemeine Brüche zu verwandeln, welches mir auch eben so leicht gelang. Es ist z. B.

$$\begin{array}{rl} S = & 0 \cdot 01\,04\,09\,16\,25\,36\,49 \ldots \\ 100\,S = & 1 \cdot 04\,09\,16\,25\,36\,49\,64 \ldots \\ \hline 99\,S = & 1 \cdot 03\,05\,07\,09\,11\,13\,15 \ldots \end{array}$$

Dadurch reduzirt sich die Aufgabe auf die frühere, weil die Ziffern nach arithmetischen Reihen des 1sten Grades fortschreiten; man hat nämlich

$$9900\,S = 103 \cdot 05\,07\,09\,11\,13\,15\,17 \ldots;$$

daher

$$9900\,S - 99\,S = 102 . 02\,02\,02\,02\,02\,02\,02 \ldots = 102 + \frac{2}{99} = \frac{10100}{99};$$

$$99\,S(100-1) = \frac{10100}{99}\text{, daher } S = \frac{10100}{99^3} = \frac{10100}{970299}.$$

Es sei

$$\begin{array}{rl} S = & 0 \cdot 001008027064125216 \ldots \\ 1000\,S = & 1 \cdot 008027064125216343 \ldots \\ \hline 999\,S = & 1 \cdot 007019037061091127 \ldots \end{array}$$

Die Ziffern dieser Reihe sind nach einer arithmetischen Reihe des zweiten Grades gebildet; daher reducirt sich diese Auflösung wieder auf die nächstvorhergehende. Aus den wenigen Beispielen kann man den Schluss ziehen: Alle gemeinen Brüche, deren Nenner Potenzen von 9, 99, 999, 9999, u. s. w. sind, geben, in Dezimalbrüche verwandelt, Perioden, deren Ziffern nach arithmetischen Reihen des so vielten Grades gebildet sind, als der um 1 vergrösserte Exponent anzeigt.

Ich ende hier mit diesem meinen ersten Aufsatze mit der Hoffnung, dass er den geneigten Leser nicht ganz unbefriedigt gelassen.

Digitized by Google

XV.

Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit.

Von

Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger

an der Universität zu Halle.

Einleitung.

Es giebt dreierlei Anwendungen der fortschreitenden Naturwissenschaft, unter denen die älteste die auf Medicin ist. Diese wurde in neuester Zeit dadurch beschränkt, dass die Medicin sich abgetrennt (auf unsern Universitäten sogar der Facultät nach) von der Pharmacie, und die sich geltend machende Homöopathie, der alten Pharmacie Hohn sprechend, mehr einen zeitgemässen dunkeln mystischen, als einen heitern naturwissenschaftlichen Charakter angenommen hat. Erfreulicher ist es, hinzublicken auf die grossartigen Fortschritte, welche die Technik dem Einflusse fortschreitender Naturwissenschaft verdankt, wozu in England vorzugsweise die sogenannten Institutions beitragen, jene nachahmungswerthen praktisch naturwissenschaftlichen Bürgergesellschaften, welche den geistigen Mittelpunkt der Gewerbthätigkeit Englands bilden. Es giebt aber noch eine dritte Anwendung der fortschreitenden Naturwissenschaft, nämlich die zur Aufklärung der Dunkelheit des Alterthums, welche Dunkelheit durch Verbreitung nächtlicher Schatten von jeher nur allzu einflussreich war auf die neuere Zeit. Das vorliegende Archiv für Mathematik und Physik, auf allen gelehrten philologischen Schulen unsers deutschen Vaterlandes verbreitet, ist gegenwärtig die einzige Zeitschrift, worin es möglich, alterthümliche naturwissenschaftliche Dinge auf eine gründliche Weise zur Sprache zu bringen. Denn die philologischen

Journale mögen sich nicht auf naturwissenschaftliche, die naturwissenschaftlichen nicht auf philologische Gegenstände einlassen. So gab mir allerdings die Histoire de la Chimie depuis les temps les plus reculés par Dr. Ferdin. Höfer. Paris. 1842., wovon in einem chemischen Journal zu sprechen wenigstens zulässig scheinen musste, eine wohlgegründete Veranlassung im Journal für praktische Chemie. B. 34 S. 385. ff. vom Elektron der Alten wenigstens nebenbei zu sprechen in einer sich dem Hauptinhalte nach auf experimentelle naturwissenschaftliche Gegenstände beziehenden Abhandlung. Sehr gern würde ich mich mit dieser kurzen Mittheilung begnügt haben, wenn nicht Missverständnisse entstanden wären, deren Aufklärung im Interesse der Wissenschaft mir eine Ehrensache für dieses chemische Journal zu sein schien. Da aber die auf Missverstandnissen beruhenden Einwendungen in einer von demselben Verleger herausgegebenen Zeitschrift (in Poggendorff's Annalen der Physik. B. 65. S. 621—637.) mitgetheilt worden waren, und zwar in grosser Ausführlichkeit, wodurch es nöthig wurde, die Sache umständlicher und philologisch strenger zu behandeln: so war kein Raum mehr zur Fortsetzung der Abhandlung in derselben Zeitschrift, worin sie angefangen war. Für die entstandene unangenehme Verspätung in Publication der folgenden Mittheilungen giebt nun die vorliegende Zeitschrift reichlichen Ersatz. Denn es ist ein sehr günstiger Umstand, dass bei dem zunächst unsere höheren Lehranstalten ins Auge fassenden Archiv für Mathematik und Physik zugleich mathematisch und philologisch gebildete Leser vorausgesetzt werden können. Gern werden dieselben sich die umständlich darzulegenden Einzelnheiten gefallen lassen; aber sie werden nicht dabei stehen zu bleiben verlangen, wozu andere, sich in Einzelnheiten verlierende Disciplinen oft nur allzusehr, ja in dem Grade geneigt machen, dass man, um mit Göthe zu reden, „Unordnung und Wust als das wahre Element ansieht, in welchem das Wissen einzig gedeihen könne." Dagegen wird durch die mathematische Anschauung der rechte Sinn geweckt, eine lange Reihe von Gedanken zu verfolgen, Ueberblicke zu gewinnen und zerstreut liegende Bruchstücke geistig zu einem Ganzen zu vereinen, wodurch scheinbar Unbedeutendes erst Bedeutung gewinnt. Da aber nicht vorausgesetzt werden kann, dass die Leser dieses Archivs mit jener frühern in einem chemischen Journal mitgetheilten, wie gesagt, nur nebenbei vom Elektron der Alten sprechenden Abhandlung bekannt seien, so ist daraus einiges hervorzuheben, wozu wenige Nummern ausreichen werden.

1. Höfer sagt in der oben angeführten Histoire de la Chimie. p. 133.: Quant au métal que l'on rencontrait dans les mines d'or (elutia), et qui, après le lavage du minérai, se présentait sous la forme de calculs noirs, variés de taches blanches à peu près du même poids que l'or, et se trouvant pêle-mêle avec les sables aurifères au fond des corbeilles destinées à recueillir ce métal, ce n'est là certainement pas l'étain. Quel était alors ce métal blanc, et aussi pesant que l'or? — Ce métal ne pouvait être que le platine. D'ailleurs, il n'est pas étonnant que les anciens aient connu le platine, puisque ce métal se rencontre souvent dans les mines d'or, et qu'il se présente,

Digitized by Google

ainsi que l'or, avec l'aspect qui le charactérise. In der Note wird folgende Stelle des Plinius angeführt: Inveniuntur (eae arenae) et in aurariis metallis, quae elutia vocant, aqua immissa eluente calculos nigros paulum candore variatos, quibus eadem gravitas quae auro, et ideo in calathis, in quibus aurum colligitur, remanent cum eo. (Hist. nat. XXXIV. 16.) — Plinius nennt diese Körner von getrübtem weisslichen Schimmer (da niger sehr häufig blos das Dunkelfarbigere bezeichnet), eben ihrer Schwere und ihrer dem Blei näher als dem Silber stehenden Farbe wegen, plumbum album oder candidum, und beginnt den Abschnitt, welcher die verschiedenartigsten Notizen über plumbum album und nigrum zusammenstellt, sogleich mit Hindeutung auf fabelhafte, dieses plumbum album betreffende Angaben, sowie auf das hohe Alterthum desselben: plumbi duo genera, nigrum atque candidum; pretiosissimum candidum, a Graecis appellatum cassiteron, fabuloseque narratum in insulas maris atlantici peti. — Album habuit auctoritatem et Iliacis temporibus, teste Homero, cassiteron ab ipso dictum. Aus dem weissen Blei, sagt er, kann man kein Silber ausschmelzen, wohl aber aus dem schwarzen (non fit ex albo plumbo argentum, cum fiat ex nigro). Wenn aber dabei steht: plumbum nigrum cum argento nascitur mixtisque venis conflatur; ejus qui primus fluit in fornace liquor, stannum appellatur. qui secundus, argentum: so sieht man leicht, dass in dieser Stelle das Wort stannum keineswegs seine gewöhnliche Bedeutung habe, oder, den Angaben aller unserer Wörterbücher gemäss, durch Zinn übersetzt werden könne, sondern, wie schon Beckmann in einer gelehrten Abhandlung über Zinn (Beiträge zur Geschichte der Erfindungen. B. IV. S. 321—381.) hervorhebt, Plinius hier silberhaltiges Blei mit dem Ausdrucke stannum bezeichne. Ebenso wenig kann man an Zinn denken, wenn es von dem weissen Blei heisst: „Silber sei schmelzbarer als dieses weisse Blei und lasse sich eben deswegen damit nicht löthen; überhaupt sei dieses weisse Blei unvermischt mit andern Metallen zu nichts zu brauchen“ (albi plumbi natura plus aridi habet, contraque nigri tota humida est; ideo album nulli rei sine mixtura utile est; neque argentum ex eo plumbatur, quoniam prius liquescit argentum). Diess heisst doch offenbar, man fand grosse Schwierigkeit bei der Bearbeitung dieses sogenannten weissen Bleies, oder, nach Höfers naturgemässer Auffassungsweise, der im Flusssande neben Gold gefundenen Platinkörner, und konnte sie blos schmelzen durch Vermischung mit andern Metallen. In der That ist Platin, gleich reinem Eisen, wohl schweissbar, aber nicht schmelzbar in unseren Oefen.

2. Man sieht, dass in den angeführten Stellen des Plinius (woher er sie auch mag entnommen haben) von der ältesten Bedeutung des Wortes plumbum album oder candidum die Rede sei. In die fabelhafte trojanische Zeit werden wir zurückgeführt und auf den gleichgeltenden Homerischen Ausdruck κασσίτερος hingewiesen. Schneider, der einzige Philolog neuerer Zeit, der sich ernstlich mit Naturwissenschaften beschäftigte, sagt, um Einwendung zu machen gegen die Uebersetzung des Homerischen Kassiteros durch Zinn, in seinem bekannten Schullexikon: „Aus der angeführten Stelle erhellt, dass man den κασσίτερος im Feuer er-

Digitized by Google

weicht und mit dem Hammer zu Platten gearbeitet verbrauchte." Hephästos ist es, welcher zu Schienen für Achill den *κασσίτερος* ver arbeitet, „der schrecklich schallte vom Speer getroffen." Von einem klingenden Metall also ist die Rede. Uebrigens führt Homer sogar in eine vortrojanische Zeit bei seinem Kassiteros uns zurück, indem der Harnisch des Agamemnon, worauf Streifen von Gold und Kassiteros angebracht, als Gastgeschenk dargestellt wird, das ein Urenkel Phaethon's, der reiche Herrscher in Kypros, gegeben, welcher Paphos erbaut, wodurch wir in den berühmtesten Mythenkreis hineinkommen, dem auch Achill und Diomed angehören. Bei diesen drei Königen allein ist Kassiteros als Schmuck genannt und schon dadurch als grosse Seltenheit bezeichnet. Wie aber Kassiteros bei Homer stets neben Gold steht: so kommt es auch in der Natur nach Poseidonius (dessen Zeugniss Strabo anführt) neben Gold und Silber im Flusssande vor und wird zugleich mit diesen edlen Metallen ausgewaschen. Auch bei Strabo ist also dasselbe natürliche Vorkommen neben Gold bezeichnet, das Plinius hervorhebt. Und mit Recht legt Höfer eben hierauf das Hauptgewicht, wodurch zugleich der Beisatz eadem gravitas quae auro bedeutend wird. In dieser letzten Beziehung führte ich noch an, dass Herodot (I. 50.), wo er von den Geschenken des Krösus für den Delphischen Apollo redet, Platten nennt aus gelbem im Feuer geläuterten Golde und aus weissem Golde, welche. ganz gleich an Grösse, dem Gewichte nach sich verhielten wie 1,5 : 2 = 3 : 4. Und da gehämmertes Platin nach Brisson ein specifisches Gewicht von 20,336, gewalztes sogar von 22,069 hat, nach Mohs aber das natürlich in Geschieben vorkommende Gold von hochgelber Farbe ein specifisches Gewicht zeigt von 14,857: so kommen wir dadurch, je nachdem wir das Gold weniger oder mehr im Feuer geläutert voraussetzen, ungefähr auf die Zahlen 15:20 oder 16,5:22 = 3:4, wie das Verhältniss gleicher Platten gelben und weissen Goldes von Herodot bestimmt ist. Und wir können uns die Angabe 3:4 um so mehr gefallen lassen, da man sich die Goldplatten gegossen denken kann, die von Platin aber, nach der von Homer bezeichneten Bearbeitung des Kassiteros, in heftigster Glühhitze mit dem Hammer geschlagen sein mussten. Jedoch diese Stelle Herodot's wurde von den Philologen willkürlich corrigirt unter der Voraussetzung, dass bei weissem Golde man nothwendig an eine Mischung aus Gold und Silber denken müsse. Aber da, wo Herodot (III. 115.) von Elektron und Kassiteros redet, welche aus ihm ganz unbekannten westlichen Gegenden, aus Inseln kommen (wohin nach Strabo die Phönicier ihre Fahrt sehr geheim hielten), da fügt er am Schlusse bei: „Von dem äussersten Ende her kommt Kassiteros und Elektron. Auch dass im Norden Europas überaus viel Gold sei, ist offenbare Thatsache; wie es aber gewonnen wird, darüber weiss ich nichts zuverlässiges zu sagen." Wenn nun das Alterthum mit dem Gold im Norden Europas bekannt war, warum sollte die ebendaselbst vorkommende Platina durchaus unbekannt geblieben sein? Eben in Sibirien, das noch jetzt als ein heiliges Land den Indischen Brahminen gilt, finden wir die Ansicht Werner's bestätigt, dass vorzüglich im zerklüfteten Erdreich, wo die Natur im Grossen die Auswaschung vorgenommen, edle Metalle reichlich zu finden sind, folglich in geognostischer Beziehung allerdings ein

Digitized by Google

goldenes Zeitalter anzunehmen sei, wo edle Metalle in reichem Masse umherlagen auf der Erde. Eben darum schloss ich meine Abhandlung über Platina (im Journal für praktische Chemie. B. 34. S. 419.) mit folgenden Worten: „wenn wir zugeben müssen, dass Platina dem höheren Alterthume bekannt war, so ist kein vernünftiger Grund mehr vorhanden, welcher uns hindern könnte, in dem Zusammenhange, in welchem Homer sein Kyanos nennt, an das in der Natur gewöhnlich vereint mit Platina vorkommende Palladium zu denken. Man vergesse nämlich nicht, dass reines gediegenes Palladium in Körnern neben den Platinkörnern natürlich vorkommt. Wollaston suchte solche Palladiumkörner aus Brasilianischen Platinkörnern aus, indem das Ansehen der erstern wie faserig war und die Fasern von dem einen Ende aus zu divergiren schienen. Ein noch einfacheres Unterscheidungsmittel möchte die Erhitzung sein nach Bréant's Methode, wobei die Palladiumkörner durch die blaue Farbe sich kenntlich machen würden. Und diese Unterscheidungsmethode scheint eben durch den alterthümlichen Namen Kyanos angedeutet, in welcher Beziehung also selbst aus dem alten Homer, dem nächsten Zweck einer chemischen Zeitschrift gemäss, noch etwas zu lernen für praktische Chemie."

Jetzt ist es Zeit, auf das in der oben angeführten Stelle des Herodot neben Kassiteros genannte Elektron überzugehen und die Hauptstellen anzuführen aus dem dritten Abschnitt jener Abhandlung über Platina, welcher überschrieben: „Platina unter dem mystischen Namen Elektron (*ἤλεκτρον*)." Vorangestellt ist folgende Stelle aus Höfer's Geschichte der Chemie. S. 109.

3. L'électrum signifie chez les anciens deux choses bien differentes: d'abord l'électrum proprement dit, c'est à dire l'ambre jaune ou le succin, qui est une substance organique (espèce de résine fossile); en second lieu, une alliage d'or et d'argent, comme nous l'apprend Pausanias: *ἄλλο ἤλεκτρον ἀναμεμιγμένος ἐστὶν ἀργύρῳ χρυσός*, „il existe un autre electrum qui est une alliage d'or et d'argent." Comp. Plin. XXXIII. 4.: „Tout or est allié d'argent; la proportion en varie. C'est quelquefois la dixième, la neuvième, la huitième partie du poids. Lorsque la proportion de l'argent est d'un cinquième, l'or perd son nom et prend le nom d'électrum. Un auteur italien Cortinovis (opuscoli scelti sulle scienze etc. Milano. 1760. 4°.) chercha à prouver dans une savante dissertation, que le platine était connue des anciens sous le nom d'électrum. Les raisons, qu'il en donne, ne sont pas valables."

Es ist meine Absicht, mich an Cortinovis anzuschliessen, dessen Abhandlung ich übrigens noch nicht zu sehen bekam. Die gewöhnlich nur mit obigen Worten angeführte Stelle des Pausanias (lib. V. cap. 12. p. 406. ed. Casaub.) lautet nämlich im Zusammenhange gelesen nach wörtlich treuer Uebersetzung also: „Dieses Elektron, woraus die Bildsäule des Augustus gemacht und welches als Naturprodukt (*αὐτόματον*) sich findet im Sande des Eridanus, ist sehr selten, und steht daher in hohem Werthe bei den Menschen; das andere Elektron aber ist mit Silber gemischtes Gold." Pausanias setzt offenbar das Naturpro-

Digitized by Google

dukt dem Kunstprodukt entgegen. Man suchte also das im Sande des Eridanus (welcher Fluss, wie schon Herodot a. a. O. andeutet, dem noch unerforschten „äussersten Westen“ angehörte) vorkommende Naturprodukt (was unmöglich Bernstein sein konnte, woraus sich auch keine Statue machen lässt) durch Mischung von Gold und Silber nachzuahmen. Also muss jenes Naturprodukt nothwendig ein edles (wie Pausanias sagt, „sehr seltenes“) Metall gewesen sein, das auch an Werth dem Golde vergleichbar, nur von hellerer Farbe war. Dem natürlichen Vorkommen gemäss im Flusssande werden wir also nothwendig an Platin denken müssen. Ein Zeitgenosse des Augustus (von dessen Bildsäule aus Elektron in obiger Stelle des Pausanias die Rede ist), nämlich Virgil in seiner Aeneide (VIII. 624.), lässt Beinschienen aus Electrum und reinem Gold (ocreas electro auroque recocto) vom Vulcan für den Aeneas machen in offenbarer Nachahmung Homer's, der (Il. XVIII. 613.) Schienen für Achill vom Hephästos machen lässt aus Kassiteros. Virgil übersetzte also κασσίτερος durch electrum.

Nun aber wird es nöthig sein, vorzugsweise davon zu sprechen, wie das Homerische nach Plinius dem plumbum album gleichbedeutende κασσίτερος (d. h., dem Dargelegten gemäss, Platina) zu dem Namen electrum (ἤλεκτρον) kommen konnte? — Buttman in seiner Abhandlung über Elektron (im Mythologus. S. 337—363.) spricht als Grammatiker mit etymologischer Gründlichkeit von diesem Worte. Er rechtfertigt die Ableitung des Namens ἤλεκτρον von ἕλκειν, ziehen, nicht blos von grammatischer Seite vollkommen, sondern auch durch analoge Bezeichnungen des Bernsteins in andern Sprachen. In diesem auf Anziehungskraft sich beziehenden Sinne konnte die natürlich vorkommende Platina mit gutem Grund Elektron genannt werden, weil sie wegen ihres Eisengehaltes magnetisch ist, und zwar nicht blos vom Magnet angezogen wird, sondern selbst in grössern Stücken geradezu polarisch vorkommt. Da also die natürlich vorkommende Platina sich dem Magnet anschloss, so war sie schon dadurch im Alterthume der wissenschaftlichen Naturforschung entzogen und gehörte den Mysterien an, worin der Magnetismus eine so grosse Rolle spielte. Der Name Elektron für die natürlich vorkommende Platina ist also ein aus den Mysterien stammender, und war für die mit magnetischer Polarität begabten Platinastücke sehr verständig gewählt, wurde aber dann obwohl unpassend selbst übergetragen auf die Legirung aus Gold und Silber, womit man das Platin nachzuahmen suchte. Man sieht zugleich, dass der Ausdruck Kassiteros ein genereller, Elektron ein specieller, auf eine mysteriöse Eigenschaft hindeutender, also vorzugsweise oder wenigstens zunächst der polarischen Platina angehöriger ist. Wer den letzten, auf die Homerische Iliade sich beziehenden Abschnitt meines Buches über die samothracischen Mysterien (welches ich unter dem Titel einer Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkt der Naturwissenschaft herausgab) gelesen hat, kann nun leicht abnehmen, warum der (als Elektron polarisch vorkommende und daher den Mysterien sich anschliessende) Kassiteros in der Iliade allein mit den dioskurischen Wesen Achill und Diomed in Verbindung gebracht

Digitized by Google

wird, und selbst der von Agamemnon getragene Kassiteros dem verwandten kyprischen Mythenkreis angeschlossen ist. Da aber in der Iliade die mysteriösen Beziehungen blos den dunkeln Hintergrund bilden, worauf die Gestalten der Helden in so hellerem Glanze hervortreten: so vermeidet Homer den mysteriösen Ausdruck Elektron in der Iliade gänzlich. Aber in der Odyssee, welche die magischen Fabeln der Mysterien gewissermassen zur Schau trägt, kommt umgekehrt nie der Ausdruck Kassiteros vor, sondern statt des Kassiteros glänzt hier Elektron neben Gold. Was ich hier andeute mit Hinsicht auf den Gebrauch der Worte Kassiteros und Elektron, wo der eine Ausdruck derselben Sache allein der Iliade, der andere allein der Odyssee eigenthümlich ist, steht nicht so isolirt, als man vielleicht glauben möchte. Nur haben die Philologen den Wink unbeachtet gelassen, den ihnen Plinius gab, indem er sagt (Hist. nat. XXX. cap. 1. sect. 2.): „Es ist sehr beachtungswerth, dass Homer bei dem trojanischen Kriege so sehr stillschweigt von magischer Kunst, so sehr aber auf sie eingeht in den Irrreisen des Ulysses, dass fast das ganze Werk aus nichts anderem besteht.“ Plinius unterscheidet also die Ilias und die Odyssee durch die Art ihres Verhältnisses zu den Mysterien. Aber da die Philologen nicht einmal darauf achteten, wie beschränkt die Schriftsprache durch die Mysterien war: so gingen solche blos flüchtig hingeworfene Andeutungen, wie die eben angeführte des Plinius, gänzlich für sie verloren.

Aus meiner Abhandlung im Journal für praktische Chemie (B. 34. S. 385—420), welche überschrieben „über Platina, Altes und Neues“, war dieser kurze Auszug hier voranzustellen, damit die für dasselbe Journal ursprünglich bestimmte Fortsetzung so viel als möglich unverändert abgedruckt werden könne. — In der That bezog sich jene Abhandlung ihrem Hauptinhalte nach nicht auf alterthümliche, sondern auf neue, dem Platin sich anreihende Mittheilungen. Vorzugsweise von den merkwürdigen krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel handelte es sich, welche entstehen, wenn eine Ladungskette, namentlich aus Platin, mit der zuerst von Wach im Jahre 1829 (s. Jahrb. der Chem. u. Phys. für 1830 oder d. g. R. B. 58. S. 40—66.) construirten constanten galvanischen Kette verbunden wird. So schwach diese Kette ist in ihrer ursprünglichen Gestalt (da es zu galvanoplastischem Zwecke, oder wie man sich damals ausdrückte, zur Bildung figurirten Cämentkupfers und anderer zum Theil krystallinisch auftretender fester Metallvegetationen, auf Schwächung des constanten elektrischen Stromes ankam): so heftig können doch bei Einschiebung einer Ladungskette aus Platin jene krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel werden, welche mit der krystallinischen Bildung des festen Cämentkupfers zusammenhängen, und uns an die bei andern Krystallisationen zuweilen hervortretenden blitzartigen Lichterscheinungen erinnern. Von solchen dem Charakter eines chemischen Journals gemäss mitzutheilenden neuen Thatsachen handelte es sich dort. Nur nebenbei war von alterthümlichen Dingen die Rede,

Digitized by Google

wie gesagt, zunächst in der Absicht, um auf Höfer's Geschichte der Chemie aufmerksam zu machen. Im entgegengesetzten Sinn ist die Abhandlung geschrieben: Ueber die vermeintliche Kenntniss der Alten vom Platin, von E. L. Schubarth in Poggendorff's Annalen der Physik (1845. No. 8. S. 621. — 637.). Dieselbe ist dem Geiste nach eine philologische, auf kritische Emendationen sich beziehende. Jedoch dieses grammatisch kritische Princip reicht nicht aus bei allen naturwissenschaftlichen, mit den alten Mysterien zusammenhängenden Dingen. Denn mit Recht macht Höfer in seiner Geschichte der Chemie, wie ausdrücklich von mir hervorgehoben wurde, aufmerksam auf den innigen Zusammenhang der alten Religionen mit Naturwissenschaft, wodurch nothwendig über manche naturwissenschaftliche Dinge absichtlich ein mysteriöses Dunkel ausgegossen wurde. Und damit hing zum Theil auch die Doppelsinnigkeit bei dem Gebrauche mancher Worte zusammen. Aber Herr Professor Schubarth lässt sich gar nicht darauf ein, dass dasselbe Wort verschiedene Bedeutung haben könne, was doch selbst bei den Worten des gemeinen Lebens so häufig der Fall ist. Vielmehr behauptet er, Höfer und ich hätten abweichend von einer „seit Jahrhunderten angenommenen Meinung", dass das Plinianische plumbum candidum unser Zinn andeute, den Satz aufgestellt, dass darunter (wie bei einigen verwandten Ausdrücken) „nichts anderes als Platin zu verstehen sei." Jedoch sogleich auf der zweiten Seite meiner Abhandlung heisst es: „Bei der Chemie der Griechen und Römer beginnt Höfer den Abschnitt vom Zinn mit den Worten, dass eine grosse Dunkelheit in griechischen und römischen Schriftstellern herrsche hinsichtlich auf den Gebrauch der Worte stannum, plumbum album, plumbum argentarium, cassiteros, obwohl man gewöhnlich sich begnüge, diese Ausdrücke durch Zinn zu übersetzen. Nachdem er Stellen angeführt, die allerdings auf Zinn passen, sagt er Folgendes." Und nun sind die Stellen angeführt, welche nicht passen auf Zinn, wohl aber auf Platin, was auch Herr Professor Schubarth unbedingt zugeben muss. Um jedoch die Bedeutung Zinn festzuhalten, nimmt er nicht blos zu willkürlichen philologischen Conjecturen, sondern sogar zu der naturwidrigen Voraussetzung seine Zuflucht, dass im Alterthume Zinngraupen neben Gold vorgekommen und gemeinschaftlich ausgewaschen wurden aus dem Flusssande. „Allerdings," sagt er, „ist ein Zusammenvorkommen von Zinnerz mit Gold ungewöhnlich [1]), doch aber nicht unmöglich."

---

[1]) Statt „ungewöhnlich" sollte stehen „unerhört." Der Ausdruck „ungewöhnlich" aber könnte gerechtfertigt scheinen, weil der H. Verf, kurz zuvor gesagt: „Agricola (de re metallica Basil. 1657. p. 269.) führt unter den verschiedenen Methoden des Waschens von Gold und Zinnerz eine in Portugal seiner Zeit gebräuchliche an." — Man könnte sonach glauben, zu Agricola's Zeiten seien Gold und Zinnerz zusammen vorgekommen. Schlägt man aber die citirte Stelle nach, so heisst sie in wörtlicher Uebersetzung: „ich sprach bisher von den verschiedenen Arten den Goldsand auszuwaschen; nun will ich von der Auswaschungsweise der Materie sprechen, welche beigemischt den schwarzen Steinchen, woraus Zinn bereitet wird."

Digitized by Google

Diess ist es, was ich zur Rechtfertigung Höfer's in Auffassung der Plinianischen Stelle, bei welcher vorzugsweise sein Gegner verweilt, zu sagen habe. Denn was ich zur Bestätigung der Ansicht Höfer's über das, wie Plinius selbst sagt, dem plumbum album gleichbedeutende Homerische Kassiteros sagte, das mit Gold combinirt wird und nach Poseidonius gleichfalls natürlich vorkommt neben Gold, während Virgil dieses Homerische Kassiteros durch Elektron übersetzte, woraus man wieder sieht, dass von einem edlen Metalle die Rede sei; diess, sowie alles, was damit zusammenhängt, übergeht unser Gegner mit Stillschweigen. Unter solchen Umständen bleibt mir nichts übrig, als diese Veranlassung im allgemein wissenschaftlichen Interesse zur Beseitigung von Missverständnissen zu benutzen.

Zunächst ist über das naturwissenschaftliche Werk des Plinius ein Wort zu sprechen, da Herr Professor Schubarth Gewicht legt auf den Ausdruck „Plinianisches plumbum candidum", gleichsam als ob in der Stelle, von welcher er eine lange Uebersetzung mittheilt, Plinius die Absicht habe, seine durch Untersuchung gewonnenen Ansichten hinsichtlich auf das plumbum candidum mitzutheilen. Demnach scheint sowohl der Herr Verfasser als die Zeitschrift, worin jene schon von Beckmann als höchst verworren bezeichnete Stelle des Plinius in ganzer Ausführlichkeit Platz finden konnte, es vergessen zu haben, oder wenigstens unbeachtet zu lassen im vorliegenden Falle, dass die sogenannte historia naturalis des Plinius eine Encyklopädie sei, wie Plinius selbst sie nennt; eine Encyklopädie aus hundert der besten Schriftsteller und etwa zwei tausend, wegen des dunklen Inhalts (propter secretum materiae) von wenigen gelesenen Schriftrollen zusammengetragen. Unter solchen Umständen mag es daher ganz angemessen scheinen, daran zu erinnern, in welchem Sinne Böttiger die Naturforscher bei ihrer Versammlung in Dresden zur Bearbeitung jener alten naturwissenschaftlichen und technischen Encyklopädie des Plinius aufforderte. Es ist also zu sprechen:

I. Ueber die dem naturwissenschaftlichen Standpunkt unserer Zeit angemessene Benutzung der Plinianischen Encyklopädie.

Bei dem Charakter, welchen die Versammlungen deutscher Naturforscher und Aerzte im Gegensatze zu dem, was ursprünglich (bei dem Aufrufe dazu von der Academia naturae curiosorum) beabsichtigt war, seit einer Reihe von Jahren angenommen haben und welcher darin besteht, dass jede Jahresversammlung die unmittelbar vorhergehende in wissenschaftlicher Beziehung ignorirt [2]);

Nicht entfernt also ist angedeutet, dass diese schwarzen Steinchen, woraus Zinn bereitet wird, zugleich mit Gold irgendwo vorkommen.

[2]) Was darüber gesagt S. 40. meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen im Jahre 1843, wurde gedruckt unmittelbar vor der Versammlung in Gratz, wo ein erhabener Kenner und Freund der Naturwissenschaft mit den schönsten und kräftigsten Worten einen edleren, dem Geist einer freien (an keine Localität gebundenen) Akademie entsprechenden Sinn bei diesen, mit so viel Kostenaufwand verbundenen Jahresversammlungen der Naturforscher anzuregen suchte. Möchte dieser Geist doch endlich siegen über die Anhänglichkeit am Herkömmlichen.

Digitized by Google

bei dieser Lage der Verhältnisse ist es natürlich längst in Vergessenheit gekommen, dass einmal von einem Unternehmen die Rede war, welches ein Zusammenwirken mehrerer zugleich antiquarisch gebildeter Männer aus allen Theilen der Naturwissenschaft voraussetzt, nämlich von einer Sichtung des in der Plinianischen Encyklopädie verworren zusammengehäuften Materials. Dazu ermunterte der verewigte Böttiger bei der Versammlung der Naturforscher in Dresden im Jahre 1826. Sein Aufruf führte wirklich einige einleitende Schritte herbei, obwohl mehr im philologischen als naturwissenschaftlichen Sinne. Doch dieser Anfang war zugleich das Ende der bald in Vergessenheit gekommenen Sache. Mit Recht aber sagte Böttiger: „man hat nicht einmal die Vorrede zu diesem, encyklopädische Notizen aus zweitausend Schriftrollen enthaltenden Wunderschatz, die Zueignung an Vespasian, ruhig gelesen. Sonst würde man wissen was man fordern könne und solle. Zeitgeiz, sagt man, und Excerptensucht liessen den Compilator bei seinem Dictiren an ein Dutzend Geschwindschreiber, die ihn umringten, nie zur besonnenen Prüfung kommen. Daher strotzt sein Buch von missverstandenen Stellen [3]) anderer Schriftsteller, auch konnte er vieles gar nicht beurtheilen, er, der mit Staatsgeschäften stets überladene. Auf die meisten dieser Vorwürfe antwortet das von ihm mehrmals wiederholte Wort: „ut nihil, quod equidem noverim, praetermittam." Hierzu kommt, wie er selbst an Vespasian schreibt, dass diese Auszüge aus hundert Schriftstellern in abgerissenen Stunden zum Theile bei Nacht gemacht wurden. Hätte Plinius nur immer die einzelnen Schriftsteller da genannt, wo er sie ausschreibt. Aber ihre Namen (wenigstens die der berühmtesten) sind blos angeführt bei der Inhaltsanzeige der einzelnen Bücher, welche unmittelbar folgt nach der in Briefform an Vespasian geschriebenen Vorrede. Offenbar war also bei der (wie die Uebersetzung Schubarth's am besten beweist) so höchst verworrenen Stelle [4]) des Plinius

---

[3]) Meine Abhandlung „über den Einfluss der naturwissenschaftlichen Mysterien auf die Litteratur des Alterthums" führt jedoch auf neue Gesichtspunkte in Auffassung verworrener Stellen des Plinius. Wenn selbst ein Historiker wie Herodot absichtlich (was durch ein unverkennbares Beispiel nachgewiesen wurde) Verkehrtheiten schrieb, blos um räthselhafte Andeutungen den Mysterienkundigen über Dinge zu geben, welche der Schriftsprache unzugänglich waren: wie vielmehr konnte einem naturwissenschaftlichen Schriftsteller, wie Plinius war, ein solches Verfahren durch die akroamatischen (d. h. lediglich zur mündlichen Mittheilung bestimmten) Gegenstände jener naturwissenschaftlichen Mysterien nothwendig gemacht werden, propter secretum materiae, wie er in vorhin angeführter Stelle seiner Vorrede sich ausdrückt. Es wird sich nachher Gelegenheit finden, diesen Gesichtspunkt bei Erklärung des Plinius durch Beispiele zu erläutern.

[4]) Beckmann, der in seinen Beiträgen zur Geschichte der Erfindungen. B. 4. S. 321—381 über Zinn und Verzinnung schrieb, sagt S. 336. von dieser Plinianischen Stelle: „man muss eingestehen, dass sie bei keiner Erklärung ganz verständlich wird," und entschuldigt S. 360. sein Bestreben, einige Widersprüche, welche darin vorkommen, einigermassen wenigstens zu beseitigen, mit den Worten: „ich bitte um Vergebung, dass ich mich so tief in die Kritik gewagt habe." Unbegreif-

Digitized by Google

vom plumbum album das Verfahren Höfer's ganz das richtige, indem er von der Voraussetzung ausging, dass die verschiedenen von Plinius ausgezogenen Schriftsteller mit demselben Worte verschiedene Bedeutung verbanden. Denn will man der lexikalischen Einfachheit wegen, damit dasselbe Wort wenigstens im Munde des Plinius stets dasselbe bedeute, die verschiedenen von ihm ausgezogenen Schriftsteller in Harmonie bringen und in diesem Sinne conjecturiren und emendiren: so versündigt man sich nicht blos an den einzelnen in der Plinianischen Encyklopädie benutzten Schriftstellern [5]), sondern am Ende selbst an der Natur.

---

lich aber ist es, wie Herr Professor Schubarth sagen kann: „Beckmann habe nachzuweisen sich bemüht, dass das Plinianische plumbum candidum unser Zinn und κασσίτερος höchst wahrscheinlich dasselbe Metall andeute, und diese Meinung sehr glücklich gerechtfertigt;" Beckmann sagt vielmehr S. 346: „Nun komme ich zur Untersuchung desjenigen Metalles, welches die Griechen κασσίτερος, oder wie Plinius sagt cassiteron, und wie er ausdrücklich hinzusetzt, die Lateiner plumbum candidum, weisses Blei, genannt haben." — „Dass die Alten so früh, als wir bei ihnen das Wort κασσίτερος finden, schon unser Zinn gekannt haben, das kann ich mit nichts beweisen, und ich zweifle, dass irgend jemanden dieser Beweis möglich sein wird, vielmehr ist mir das Gegentheil wahrscheinlicher." Es ist ihm nämlich nach S. 348. wahrscheinlich, dass die Griechen in späterer Zeit „das wahre Zinn nur für eine Abart ihres alten Kassiteros oder des Stannums der Römer gehalten haben, so wie letztere das eine wie das andere für eine Abart des Bleies erklärten." S. 351. fügt er allerdings bei: „Es könnte doch sein, dass die Griechen sehr früh das wahre Zinn durch den Handel und mit ihm zugleich den ausländischen Namen, woraus κασσίτερος geworden, erhalten haben." — „Ueber die Frage, welche Meinung die meiste Wahrscheinlichkeit habe, will ich nicht streiten; nur dabei bleibe ich, dass für Homers und Herodots Zeitalter keine gewiss erwiesen werden kann." Man sieht, dass Beckmann geneigt ist, eine ältere und eine neuere Bedeutung des Wortes κασσίτερος (und also auch des nach Plinius dem Homerischen κασσίτερος gleichbedeutenden plumbum album oder candidum) anzunehmen. Für die neuere Zeit passt unstreitig die Uebersetzung durch Zinn, woran niemand noch gezweifelt hat. Aber als die frühere, in den alten Mysterien einheimische, nach Virgil's Uebersetzung dem Elektron gleichbedeutende Geltung des Wortes müssen wir, den von Höfer und von mir angeführten Gründen gemäss, Platin anerkennen.

[5]) So wollen wir dem Herrn Professor Schubarth gern zugeben, dass Plinius gewiss „nie eine Wägung angestellt" zur Bestimmung des specifischen Gewichts, was man einem so sehr beschäftigten Staatsmanne auch nicht zumuthen wird. Wir geben ferner zu, dass er wenigstens bei der nachlässig geschriebenen Stelle vom Grunde, warum Gold zu so hohem Werthe gelangt, „keine Ahnung vom wirklichen specifischen Gewichte des Goldes" gezeigt habe. Gilt aber nun sogleich dasselbe von allen den zahlreichen Schriftstellern, welche Plinius in seiner Encyklopädie benutzte, so dass man durchaus keine in der Plinianischen Encyklopädie auf das specifische Gewicht sich beziehende Stelle im strengen Sinne nehmen darf? Die genauen über das specifische Gewicht der Mischungen von Gold und Silber angestellten Untersuchungen eines Archimedes sind durch Hiero's Krone so berühmt geworden, dass man unmöglich glauben kann, niemand ausser Archimedes habe im Alterthum genaue Versuche der Art angestellt und der Ausdruck eadem gravitas quae auro sei, auch von Technikern und Metallurgen, deren Schriften Plinius anführt, stets nachlässig gebraucht worden.

Digitized by Google

Man sieht nun, in welchem Sinn allein eine neue Bearbeitung der Plinianischen Encyklopädie zu wünschen wäre, indem man nämlich, ganz so wie es Höfer bei der vorliegenden Stelle gemacht hat, aus dem verworren zusammengehäuften Material das Bedeutende heraussucht, wozu allerdings eine Gesellschaft von Männern aus den verschiedensten Theilen der Naturwissenschaft sich verbinden könnte. Ein Hauptgesichtspunkt aber wäre dabei noch zu beachten; nämlich die Beschränkung der schriftlichen Mittheilung über naturwissenschaftliche Dinge durch die Mysterien, worauf Plinius selbst [6]) in der Abhandlung vom Elektron mit einigen sehr starken Ausdrücken die Aufmerksamkeit hinlenkt. Denn eben weil man (wie schon vorhin erwähnt wurde) nicht schreiben durfte über die einflussreichsten naturwissenschaftlichen Dinge, welche die Mysterien in ihr Bereich gezogen, war man zur bildlichen Einkleidung für Mysterienkundige genöthigt. Und schon diese bildliche Einkleidung, die ersonnen werden musste, war eine Art von Poesie. Aus diesem Gesichtspunkte wird das, was Plinius von den wunderlichen, auf das Elektron sich beziehenden Fabeln der Poeten sagt, erst die rechte Bedeutung gewinnen. Und zum Theil auch darum mag es nun zweckmässig sein, in naturwissenschaftlicher Beziehung (ohne Furcht vor jenen Fabeln der Poeten, auf welche die starken Ausdrücke des Plinius nur unsere Aufmerksamkeit hinlenken zu wollen scheinen) ganz umständlich zu sprechen:

II. Ueber das Elektron der Alten.

Der dritte Abschnitt meiner Abhandlung über Platin handelte vom „Platin unter dem mystischen Namen Elektron" und ging von einer Stelle des Pausanias aus, worin derselbe das Elektron, welches als Naturprodukt (*αὐτόματον*) im Sande des Eridanus als ein (wie er ausdrücklich hervorhebt) „überaus seltenes Metall vorkommt, vom Kunstprodukt unterscheidet, das, gewöhnlich Elektron genannt, blos eine Mischung sei aus Gold und Silber [7]). Jedoch auf diese Stelle des Pausanias,

---

[6]) Die höchst beachtenswerthe Plinianische Stelle (in der h. n. XXXVII. c. 2. in fin.) bezeichnet die dem electrum angereihte Fabelmasse als einen Ausdruck der grössten Menschenverachtung. Und man glaube nicht, dass diese Aeusserung isolirt steht, sondern vergleiche damit die in meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft. S. 145—179. dargelegten Thatsachen, zu deren Zusammenstellung der Satz des Pausanias Veranlassung gab, dass die Mysterien in dem Grade höher standen als die Volksreligion, wie Götter höher sind als Heroen. In der That würde es abgeschmackt sein, sich in die durch die Mysterien herbeigeführte Verwirrung einzulassen, wenn nicht der verworrenen Schriftsprache eine ganz unzweideutige physikalische Zeichensprache (symbolische Hieroglyphensprache) zur Seite stände, deren Darlegung und Benutzung zum Zwecke der neuern Physik den Hauptinhalt ausmacht jener Einleitung in die Mythologie.

[7]) Virgil, welcher das Homerische *κασσίτερος* durch electrum übersetzt, lässt vom Vulcan für Aeneas Beinschienen machen, „ocreas electro auroque recocto", was doch niemand übersetzen wird: „aus unreinem (silberhaltigem) Golde, gemischt mit ganz reinem Golde." Vielmehr

worauf ich vorzugsweise Gewicht legte, eben weil sie, im Zusammenhange gelesen, so klar ist und dennoch die daraus gewöhnlich entnommenen einzelnen Worte stets missverstanden wurden, — auf diese so umständlich, mit Beziehung auf Buttmann's Auffassungsweise, von mir besprochene Stelle des Pausanias, liess Herr Professor Schubarth sich gar nicht ein; — stellt aber, was ich darüber gesagt, in der Art dar: „Schweigger behauptet, weil das Elektron im Sande der Flüsse vorgekommen, so könne man an kein anderes Fossil als an Platinerz denken.“ Dies wird ihm aber niemand glauben, selbst wer meine Abhandlung nicht gelesen hat. Während der Abschnitt vom Elektron mit einer Plinianischen in Höfers Uebersetzung von mir angeführten Stelle „tout or est allié d'argent u. s. w.“ begonnen wurde, nimmt diese eigenthümliche Widerlegungskunst keinen Anstand in der Art zu argumentiren, als ob der Satz, dass fast alles Waschgold der Flüsse silberhaltig sei, geläugnet worden wäre. Auch sogar über die Farbe des Platins glaubt mein gelehrter Gegner mich belehren zu müssen; „Platin“, sagt er, „hat eine stahlgraue Farbe, kann hinsichtlich der Farbe nie mit Bernstein verglichen werden.“ Denn ignorirt wird wieder alles, was ich gestützt auf Buttmann's Sprachableitung des Wortes ἤλεκτρον sagte, um nachzuweisen, wie das natürlich vorkommende eisenhaltige Platin durch die magnetische Polarität, welche es zuweilen zeigt, zu diesem Namen kommen und zugleich dadurch in den Kreis der Mysterien hineingezogen werden konnte.

Da übrigens eine der wichtigsten Lehren der neueren Physik ihren Namen vom Elektron erhalten hat und selbst der Charakter der neuern Chemie durch das Wort Elektrochemie bezeichnet wird: so kann es den Physikern und Chemikern nicht gleichgültig sein, über die alterthümliche Bedeutung des Wortes ἤλεκτρον gründlich aufgeklärt zu werden. Und dazu kommt noch ein specieller Grund, den ich im Vorworte zu den neuesten, auf den Zusammenhang der Lichtpolarisation mit elektrischer und magnetischer Polarität sich beziehenden Untersuchungen Faradays (im Journ. f. prakt. Chem. B. 36. S. 473.) nur mit einigen Worten in einer Note berührte. Getrost will ich daher dem, was über Elek-

---

eben darum, damit niemand an das gemeine nachgemachte Elektron denken möge, fügt der Dichter auro recocto hinzu, was beigesetzt wurde, weil das seltene Naturprodukt electrum (woraus, wie Pausanias in obiger Stelle erzählt, eine Statue des Augustus gemacht wurde) oder das Homerische (nach Plinius dem plumbum album gleichbedeutende) cassiteros, derselben Plinianischen Stelle gemäss, ohne Beimischung anderer Metalle nicht zu benutzen ist. Auch bei Homer wird κασσίτερος, wie schon Schneider (um die gewöhnliche Uebersetzung durch Zinn zu bestreiten) hervorhebt, im stärksten Feuer erweicht und auf dem Amboss mit dem Hammer verarbeitet. — Kurz zuvor liess Virgil den Vulcan mit Beziehung auf diese Waffen des Aeneas versprechen, alles zu leisten, quod fieri ferro liquidove potest electro, wobei die Combination, wie sonst mit dem Golde, nun auch mit dem in Farbe und Härte dem (als Platin aufgefassten) electrum nahestehenden Eisen nebenbei vielleicht einige Beachtung verdient, da eben der Eisengehalt des natürlich vorkommenden Platins die magnetische Anziehung und eben dadurch den Namen electrum herbeigeführt.

tron mitgetheilt wurde, noch einiges beifügen, um zu zeigen, dass es bei einer wohlbegründeten Wahrheit leicht sei, die Beweise dafür zu vermehren. Und diese Vermehrung der Beweise wird, unter den eben bezeichneten Nebenumständen, nun mehr an ihrer Stelle sein, als sie früher hätte sein können.

1. Buttmann erinnert in seiner von mir angeführten Abhandlung über Elektron: „Bei allen Lexikographen finden wir die Glosse *ἤλεκτρον ἀλλότυπον χρυσίον*, d. h. Gold in anderer Gestalt“ [8]).

---

[8]) Suidas sagt unter *χαλκολίβανον: εἶδος ἠλέκτρου τιμιώτερον χρυσοῦ ἔστι δὲ τὸ ἤλεκτρον ἀλλότυπον χρυσίον μεμιγμένον ὑέλῳ καὶ λιθείᾳ.* Hier ist ganz klar ausgesprochen, dass es eine Art Elektron gebe, die kostbarer sei als Gold, was also gewiss nicht Gold sein kann mit Silber gemischt. Höchst wunderlich wird der Zusatz scheinen, dass diese Abart des Goldes gemischt sei mit Krystall und Steinart. Erwägt man aber, dass ein Lexikograph, wie Suidas, auch mysteriöse Andeutungen abschrieb, so kann man auf die weibliche Form *ἡ λιθεία* Gewicht legen, indem (auf eine, wie wir nachher sehen werden, sinnige Weise), während der Stein überhaupt *ὁ λίθος* heisst, *ἡ λίθος* wo nicht geradezu den Magnet, doch stets einen durch seine Eigenschaften beachtungswerthen Stein bedeutet. Der natürlich vorkommenden eisenhaltigen Platina ist aber zuweilen etwas von der Natur jenes gleichsam mannweiblichen Steins, nämlich der *Ἡρακλεία λίθος*, d. h. des Magnets, beigemischt, indem sie polarische Eigenschaften zeigt, wodurch die Aufmerksamkeit der Mysterien erregt und die Benennung *ἤλεκτρον* herbeigeführt wurde. Auch der Zusatz *ὑέλῳ* stimmt zu dieser Auffassungsweise. Diess wird man schon daraus merken, dass Schneider, welcher naturwissenschaftlichen Gegenständen speciellere Aufmerksamkeit zugewandt, in seinem bekannten Schullexikon hervorhebt: „*ἡ ὕαλος* (sonst auch *ὕελος ὁ* und *ἡ*) bedeute in den ältesten Zeiten den Bernstein“ (soll heissen Electrum). Der Scholiast zu Aristophanes Wolken, worauf Schneider sich bezieht, macht nämlich ausdrücklich aufmerksam, dass *ὕαλος* in jener Aristophanischen Stelle in weiblicher Form gebraucht werde (welche allerdings Aristophanes besonders hervorhebt), und fügt dann bei, dass statt *ὕαλος* bei Homer und den Alten *ἤλεκτρος* vorkomme, *ὕαλος* aber in der ältern Zeit überhaupt nicht Glas, sondern Krystall bezeichnete. Und dazu stimmt eine Stelle des Plinius (Hist. nat. VIII. c. 38. sect. 57, XXXVII. c. 2. 3. 7. sect. 11. 13. und 29.), wo die Rede von Krystallen, die erwärmt an der Sonne leichte Körper anziehn. Einer, sagt er, der sogar auch Eisenfeile anziehe (was, wie er beifügt, Diokles und Theophrastus glauben) heisse lyncurion, und dieser werde von Damostratus als Electrum bezeichnet, wobei eine bestätigende Stelle des Strabo schon Harduin in seiner Ausgabe des Plinius angeführt, während auch Hesychius geradezu sagt: *λυγκούριον, τὸ ἤλεκτρον.* Die Indignation, womit Plinius über die dem lyncurion, den er als gemma bezeichnet, angereihten Fabeln redet, verräth, dass von einem mysteriös behandelten Krystall die Rede sei. Watson und Beckmann denken an unsern Turmalin (worüber die nöthigen Nachweisungen in meiner „Einleitung in die Mythologie“ etc. S. 156. und 366. zu finden). Diess wenigstens ist nicht zu leugnen, dass auch in neuerer Zeit der Turmalin durch seine Aschenanziehung (Aschentrecker und Ceylonischer Magnet darum genannt) selbst die roheste Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Unter diesen Umständen wird die Stelle des Scholiasten zu Aristophanes verständlich, gleichsam als Nachklang aus den Mysterien. Mit Beziehung darauf kommt auch Bochart, der im Hierozoicon (B. III. S. 876—900 ed. Rosenmülleri) eine sehr gelehrte Abhandlung über Elektron schrieb, zu dem Resultat: „ex his quae diximus conficitur, *ἤλεκτρον* apud veteres tria significasse, nempe 1) succinum

Digitized by Google

Auch fügt er die Bemerkung bei, dass der Ausdruck ἀλλοτύπου auf die blassere Farbe des mit Silber gemischten Goldes schwerlich bezogen werden könne. Offenbar ist, nach wörtlicher Uebersetzung, ein anderer Typus des Goldes, oder Gold von anderer Bildung, von anderer Art gemeint, wie man denn lange genug auch in neuerer Zeit Platin gleichsam als eine Abart des Goldes, als weisses Gold, bezeichnet hat.

2. Nun aber entsteht die Frage, ob dieses eigenthümliche Gold von anderer Bildung und Natur, oder ob der Bernstein zuerst als ἤλεκτρον bezeichnet worden sei. Da in einer Stelle bei Sophokles (Antigone v. 1019) das Elektron von Sardes (das berühmt als Residenz des Krösus und wobei der Scholiast an den Gold führenden Fluss Paktolus erinnert) mit dem indischen Golde combinirt, und auch bei Homer das Elektron zwischen Gold und Silber gestellt ist, dasselbe gleichfalls bei Hesiod im Schilde des Herakles (v. 142) neben Gold und Kyanos vorkommt, so bemerkt Buttmann mit Recht: „mich dünkt, wer bei jenen ältesten Dichtern unter Elektron ausschliessend das Metall versteht, giebt zugleich zu erkennen, dass diess der ältere Gebrauch des Namens sei.“ Aber Buttmann, der auch die Autorität des Plinius (hist. nat. XXXIII. c. 4. sec. 23.) dafür hätte anführen können, dass Homer das Metall meint, wenn er vom Elektron redet, wird verlegen durch die Mythologie gemacht, deren Autorität, wie er sagt, wenigstens neben der von Homers Gedichten steht. Da nämlich das Elektron aus den Thränen der in Pappeln verwandelten Schwestern Phaethon's gebildet, so glaubt er hierbei nothwendig an die aus Bäumen ausschwitzenden Harzthränen denken und in diesem Zusammenhang Elektron durch Bernstein übersetzen zu müssen. Jedoch die Pappeln gehören nicht zu den Harz ausschwitzenden Bäumen; sie werden also in ganz anderer Beziehung hier genannt sein. Ohnehin weinen die Schwestern des Phaethon (die Heliaden) am Eridanus, jenem fabelhaften Fluss, in welchen Phaethon stürzte; und in Flüssen (namentlich im mythischen Eridanus, der vorhin angeführten Stelle des Pausanias gemäss) kommt wohl Gold und goldartiges Elektron (in kleinen Körnern, die ausgewaschen wurden), keineswegs aber Bernstein vor. Buttmann hebt späterhin selbst hervor: „Hesychius hat bei dem Wort ἤλεκτρος die Erklärung μέταλλον χρυσίζον mit dem Zusatze, man sage, es seien“ (nämlich diese goldartigen Metallkörner seien) „die Thränen der Heliaden. Und Philostratus trägt kein Bedenken, die Elektronthränen jener mythischen Pappeln Gold zu nennen.“ — Und nun wird man auch verstehn,

---

2) metallum ex auro et argento conflatum, 3) lapidem crystallinum.“ Versteht man unter ἤλεκτρον, der Sprachableitung Buttmann's gemäss, einen mit Anziehungskraft begabten Körper: so weiss der Physiker aus der Stelle des Pausanias, welches (durch Mischung von Gold und Silber blos nachgebildete) natürlich neben Gold vorkommende seltene Metall, und durch die angeführte Stelle des Plinius, welche krystallinischen Steine ursprünglich in den Mysterien gemeint waren. Diese letzte von Bochart sehr richtig als eine dritte angeführte Bedeutung des Wortes ἤλεκτρον ist übrigens in neuerer Zeit, selbst in den griechischen Wörterbüchern, gänzlich unbeachtet geblieben.

Digitized by Google

warum Homer sein (von Virgil durch electrum übersetztes) κασσίτερος mit dem Mythenkreise von **Phaethon** in Verbindung bringt.

3. Betrachten wir die Namen dieser Schwestern des Phaethon, deren Anführung hier unnöthig ist, so beziehen sich alle auf Schimmer und Glanz. Wenn also die runden, graulich weiss glänzenden Körner im fabelhaften Eridanus, in welchem der glänzende Sohn des Helios, Phaethon, sein Grab fand, wenn diese unscheinbaren kleinen Körnchen, welche dennoch Gold sind von anderer Art, als Thränen dargestellt werden der Heliaden: so sieht man leicht, dass hierdurch auf eine mysteriöse Weise das **natürliche Vorkommen des Platins** bezeichnet und dasselbe als ein Gold, das seinen heitern Glanz abgelegt, gleichsam in Trauer gehüllt ist, dargestellt werden soll. Diess wird noch klarer, wenn wir auf eine andre Variante desselben Mythus Rücksicht nehmen, worin statt der Heliaden selbst **Apollo** [9]) genannt wird, der mit

---

[9]) Um solches nachzuweisen genügen hier abgeleitete Quellen, besonders darum, damit man sehe, dass die **Urgeschichte der Physik** wenigstens in früherer Zeit höher geachtet wurde, als gegenwärtig. Ich nenne in dieser Beziehung **Philippi Caesii a Zesen coelum astronomicum, poeticum sive mythologicum stellarum fixarum. Amstel. 1662.** Denn ist es nicht unanständig für Naturforscher, in der Astronomie sich der Mythologie bei Bezeichnung der Sterne zu bedienen, und doch die dem Naturforscher allein zugänglichen naturwissenschaftlichen Mysterien des Alterthums, womit diese Bezeichnung zusammenhängt, geflissentlich ignoriren zu wollen? In dem genannten gelehrten Werke werden bei dem Sternbild **Eridanus**, S. 228—245, eine Reihe gelehrter Nachweisungen gegeben, und es heisst, nachdem von den Heliaden die Stellen der Poeten angeführt waren, S. 231: nisi potius electrum apud **Celtas**, si **Artemidoro** credimus, ex lacrymis Apollinis natum dicas, ubi indignans patrem, quod filium suum Aesculapium de quo vidimus in Serpentario, fulmine percussisset, ad Hyperboreos moestus contendit. — Auch **Gesner** in seiner gelehrten Abhandlung **de electro** (in den commentariis societatis Gottingensis. tom. III. ad annum 1753) bezieht sich auf diese Variante des Mythus S. 72. mit folgenden Worten: nondum inveni, quo auctore **Phavorinus Camers** dicat, ipsius Apollinis, h. e. Solis, lacrimas esse electra, quas profuderit cum tristis ob Aesculapii mortem ad Hyperboreos a patre reprehensus abiret, aut cum servire ob interfectos Cyclopas iussus esset. Ponentur graeca, ut eo facilius inveniantur cuius sint. Und nun führt er die griechische Stelle an. — Besonders darum aber wünsche ich die Aufmerksamkeit der Physiker auf **Gesner's** gelehrte Abhandlung über das Elektron hinzulenken, weil derselbe zum Schlusse der angeführten Abhandlung von den Fortschritten neuerer Naturwissenschaft mit der edelsten Begeisterung spricht. Denn nachdem er zuletzt auf die im Alterthum sogenannte Dioskurenerscheinung, die leuchtenden Lanzen und andere in dem Buche des **Bartholinus de luce animalium** zusammengestellte wundervolle Lichtscheine, gekommen, schliesst er mit folgenden Worten seine Abhandlung: „Dergleichen alterthümliche Nachweisungen dienen dazu, in noch glänzenderm Lichte zu zeigen jene elektrischen Experimente, welche auch in dieser Stadt, ihr theuren Collegen, zu unserer grossen Verwunderung gezeigt habt; nicht aber dazu, dem gegenwärtigen Jahrhunderte den Ruhm zu schmälern, gleichsam eine neue Welt entdeckt zu haben. Dass solches während ich lebte gelang, darüber werde ich mich stets freuen.“ Möchten diejenigen, welche heut zu Tage die Forschungen über Urgeschichte der Physik zu unterdrücken streben, von einem **Gesner** lernen, dass der

Gold umhüllte (ein goldenes Schwert, goldene Rüstung tragende) Apollo, dem die Gold im Norden Europas bewachenden Greife geweiht sind. Aus seinen Thränen, heisst es, bei dem Tode seines Sohnes Aeskulap entstand Elektron, d. h. jenes in kleinen abgerundeten Körnern sich darstellende gleichsam durch Trauer entstellte Gold von anderer Art. Man sieht nun, warum neben dem goldenen Dreifuss im Tempel des Delphischen Apollo und anderen goldenen Weihgeschenken auch dieses durch geheime magnetische [10]) Beziehungen in den Mythenkreis hineingezogene Gold anderer Art (*ἀλλότυπον χρυσίον*) nicht fehlen durfte. Und Licht wird dadurch geworfen auf das in der Abhandlung über Platina besprochene Weihgeschenk des Krösus, dessen grosse innere (d. h. mysteriöse) Bedeutsamkeit vielleicht blos durch absichtlich übertriebene, auf Aeusserlichkeiten, nämlich die Grösse der Geschenke, sich beziehende Angaben hervorgehoben und der Beachtung der Mysterienkundigen empfohlen werden sollte.

Es giebt noch eine dritte Variante vom Vorkommen und der Gestalt jenes degenerirten, gleichsam in Thränenform sich darstellenden, graulich weiss glänzenden Goldes, welche, wie Plinius mit Indignation anführt (vergl. Note 3 und 6), auf die Thränen der in Vögel verwandelten Schwestern des Meleager [11]) sich bezieht. Wir sind hier mitten in dem zugleich die Mysterien des Herakles umfassenden dioskurischen Mythenkreise, wozu uns Pli-

---

Ruhm, eine neue physische Welt entdeckt zu haben, doppelt so gross, wenn dadurch zugleich eine neue geistige aufgeschlossen wird, die, verborgen in den Mysterien, so einflussreich war auf die alte Litteratur, womit die neue nur allzueng zusammenhängt und zwar in den auf das Leben einflussreichsten Gebieten. Höchst beachtungswerth in mehr als einer Beziehung ist daher dieser schöne Ausdruck naturwissenschaftlicher Begeisterung bei jenem alten Lexikographen. Wo ist sie hingekommen, möchte man hier fragen, diese allgemeine Begeisterung für Naturwissenschaft, wie sie noch da war zu Anfang dieses Jahrhunderts? Sie ist theologischen Streithändeln gewichen, und darum gewichen, weil das ängstliche Examinationswesen (zum Theil über Dinge, welche im späteren Leben vergessen zu haben man Gott dankt) den Theologen und Philologen auf Universitäten nicht mehr Zeit lässt zu freien Studien, um die über allen Streit erhabenen, fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur kennen zu lernen.

10) Möchte der Leser geneigt sein, im Register zu meiner Einleitung in die Mythologie das Wort Apollo aufzuschlagen und sich mit dem hierhergehörigen, dort erwähnten Bilderkreise zu befreunden.

11) Da die Localsage von Meleager sich dem dioskurischen Mythenkreise anschliesst, so tritt die Verwandlung in Vögel an die Stelle der im Mythenkreise des Herakles bedeutsamen Pappel (Silberpappel), in welcher Beziehung ich wieder nothwendig verweisen muss auf meine Einleitung in die Mythologie. S. 142, 234, 299, 333 und 345. Weisse Vögel spielen nämlich darum im dioskurischen Mythenkreis eine bedeutende Rolle, weil nach dem ganz naturgemässen Ausdrucke des Plinius „die Dioskuren auf den Masten der Schiffe erscheinen mit eigenthümlich tönendem Laute, wie Vögel hüpfend von Ort zu Ort.“ — Zugleich versteht man nun den Ausdruck Schwanengesang. Denn in diesem Sinne (als Symbol des Lichtes aufgefasst) singt der Schwan wirklich vor seinem Tode, und weissagend (von grosser Vorbedeutung) ist dieser Schwanengesang.

Digitized by Google

nius den Schlüssel gegeben durch einige flüchtig hingeworfene Worte über die Natur der Dioskuren und der Helena, welche ich meiner zweiten, auf diese naturwissenschaftlichen Mysterien sich beziehenden Abhandlung über Urgeschichte der Physik voranstellte (im Jahrbuch der Chemie und Physik. 1823. oder B. XXXVII. S. 250.). Sichern Schrittes konnte ich dann weiter gehn in Erforschung jener Geheimlehren, mit Beziehung auf welche Strabo geradezu sagt, er wolle wiedersprechende Dinge zusammenstellen, gleichsam als aufzulösende Räthsel, ob vielleicht einer „die Wahrheit errathe." Und dennoch derselbe Plinius, von dem man ohnehin nicht wird annehmen wollen, dass er der Samothracischen Mysterien ganz unkundig gewesen, stellt sich nun an, als ob er in allen auf das Elektron sich beziehenden mysteriösen Fabeln gar keinen Sinn finden könne, und als ob hier allein vom gemeinen, keineswegs, wie er beifügt, zu den Seltenheiten gehörigen Bernstein die Rede wäre. Ja, er geht so weit, den Eridanus, von dem er schon aus dem Sternbilde wissen musste, dass er dem Fabelland angehöre (oder, wie Herodot (III. 115.) sich ausdrückt, „dem äussersten Westen, worüber nichts Zuverlässiges zu sagen sei") als den Fluss Padus (Po) in Italien zu bezeichnen, mit dem Zusatze, dass Italien Zeugniss gebe für die Falschheit der dichterischen Angabe. Dass er aber mit so grosser Indignation von der Menschenverachtung spricht, welche in diesem, die Naturwissenschaft verschleiernden Fabelwesen liege, zeigt deutlich genug, dass er die Mysterien meine, als deren unkundig er vielleicht absichtlich erscheinen wollte, während früher auch Aeschylus, angeklagt, mysteriöse Andeutungen gegeben zu haben, blos durch die Entschuldigung seiner Unkunde sich retten konnte. Man vergesse doch nicht, dass Lucrez das Electrum nicht einmal zu nennen wagt, so grosse Veranlassung er auch hatte, auf seinem Standpunkte davon zu sprechen [12]. Ich hebe diess hervor, um den Geist zu bezeichnen, in welchem die Naturgeschichte des Plinius neu zu bearbeiten sein möchte. Die Verworrenheit der Zusammenstellungen kann mitunter (ganz so wie in der Physik des Aristoteles [13]) eine absichtliche sein, um tiefere Wahrheiten zu verbergen, die, weil sie nicht unmittelbar ausgesprochen werden durften, aus den verworrenen Andeutungen herauszusuchen sind.

---

[12]) Wie feindlich die Mysterien den Naturforschern waren, namentlich aus der Epikuräischen Schule, welcher Lucrez sich anschloss, solches habe ich durch angeführte Thatsachen, welche zugleich von Einfluss sind auf die Erklärungsweise des Lucrez, in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen S. 11. nachgewiesen. (Vergleiche auch Note 24. in vorliegender Abhandlung.)

[13]) Ich beziehe mich auf das, was in derselben Denkschrift S. 14. und 46. dem unzweideutigen Ausdrucke des Aristoteles selbst gemäss dargelegt wurde. Nebenbei bemerke ich, dass Plinius an einer andern Stelle (h. n. XXXVI. c. 4. n. 7.) bei den flüchtig hingeworfenen Worten: „Scopas fecit Venerem et Pothon et Phaethontem, qui Samothrace sanctissimis caerimoniis coluntur" sich vertraut zeigt mit den feinsten mysteriösen Beziehungen. Denn die Bedeutsamkeit dieser Combination wird man verstehn, wenn man die Idylle Claudians auf den Magnet liest, im Zusammenhange mit dem, was darüber gesagt in meiner Einleitung in die Mythologie S. 239 und 240, womit S. 218—220 zu verbinden.

Digitized by Google

Anmerkung. Aus dem eben bezeichneten Gesichtspunkt ist auch eine mysteriöse Sprachableitung des Wortes electrum aufzufassen, welche Plinius recht absichtlich hervorhebt, und wobei er sich auf die Autorität beruft einer Reihe alter Dichter, mit dem Zusatze, dass hier von Poeten des ersten Ranges die Rede sei; nämlich electrum appellatum quoniam Sol vocatus sit elector. Einleuchtend ist es, dass zur Vergleichung mit der Sonne keine der geltend gewordenen Bedeutungen des Wortes electrum passt, man mag an Bernstein, dessen harzartiges Ansehen doch wahrlich nicht an Sonnenglanz erinnern kann, oder an das aus Gold und Silber, sei es von der Natur oder durch Kunst gemischte Metall denken, weil statt an unreines, vielmehr an reines Gold der Sonnenglanz erinnert. Denkt man aber daran, dass die grössten Dichter des Alterthums immer die mysteriöse Bilderwelt[14] *(d. h. symbolische Hieroglyphen) vor Augen hatten, so zeigt uns die auf Tafel II. Fig. 13. meiner Einleitung in die Mythologie abgebildete streng naturwissenschaftliche, auf einer Münze von Chios vorkommende alte Hieroglyphe den Zusammenhang zwischen elector als Sonne und electrum im Sinne der Buttmannischen Sprachableitung aufgefasst. Denn obwohl bildlich, doch ganz scharf spricht diese symbolische Hieroglyphe den Satz aus, dass die Sonne mit derselben herkulischen (d. h. magnetischen) Kraft leuchte, wodurch die neben Gold vorkommende eisenhaltige Platina zu einem Gegenstande der Mysterien geworden. Die sprachliche Verbindung der Worte electrum und elector ist also eine mysteriöse. Man muss aber jene Hieroglyphe im Zusammenhang auffassen mit dem ganzen Mythen- und Bilderkreise, worin sie in jener Einleitung in die Mythologie dargestellt ist. Dann wird man zugleich verstehn, dass diese mysteriöse Sprachableitung dasselbe ausspricht, was mythisch angedeutet durch die Verwandlung der glänzenden Tochter des Helios in Pappeln, wenn man nämlich an die dem Herkules sehr sinnig geweihte Silberpappel denkt. Eben aber, weil es sich im Geiste der symbolischen Hieroglyphik nie von einzelnen isolirt stehenden Bildern, sondern von ganzen Bil*

---

[14]) Hierüber wäre, namentlich mit Beziehung auf den samothracischen Bilderkreis, vieles zu sagen nachträglich zu dem, was in meiner Einleitung in die Mythologie schon dargelegt ist, was sich aber zum Theile von selbst ergeben würde durch eine sinnige Zusammenstellung dieses Bilderkreises. Darum meinte ich, dass dieselbe den Freunden alterthümlicher Poesie willkommen sein müsse, und wünschte, dass ein Alterthumsforscher, welcher in einer Stadt lebt, wo die geeigneten Sammlungen dazu vorhanden, sich zur Herausgabe dieses Bilderkreises mit mir verbinden möge. Alle Versuche, diess zu erreichen, misslangen. Und wie viele Schriften sind seit zwanzig Jahren z. B. über Helena oder andere samothracische Wesen erschienen, ohne dass man Notiz nahm auch nur von einer möglichen streng naturwissenschaftlichen Auffassung dieses im ganzen Alterthum als naturwissenschaftlich bezeichneten Mythenkreises, geschweige von einer vorliegenden wirklich vorhandenen. — Und obwohl schon Wolf es ausgesprochen, wie wünschenswerth es wäre, die mysteriösen Beziehungen in Homer's Gedichten (worauf die berühmte Schule des Krates sich bezog) kennen zu lernen, mag nun, nachdem in diesem Geiste durch alterthümliche Nachweisung die verkannte poetische Einheit der Iliade klar dargelegt wurde, kein Philolog nur auf Prüfung der Sache sich einlassen.

derkreisen handelt (indem, wie bei jeder andern Sprache, auch bei dieser Symbolsprache alles auf den Umfang ankommt, worin man sie auffasst): so kann ich hier unmöglich ins Einzelne gehn, obwohl die Bedeutsamkeit, mit welcher Plinius jene Sprachableitung hervorhebt, es mir unmöglich machte, dieselbe ganz unberührt zu lassen. Nur diese Bemerkung ist noch anzureihen, dass dergleichen mysteriöse Wortableitungen sehr häufig, besonders bei alten griechischen Schriftstellern vorkommen. Die Wunderlichkeit derselben veranlasste die neuern Philologen zu dem Glauben, den etymologischen Theil der griechischen Grammatik besser zu verstehn, als die vorzüglichsten griechischen Schriftsteller ihn verstanden. Man übersah, dass man durch wunderliche Sprachableitungen mitunter Andeutungen den Mysterienkundigen hinsichtlich auf die der Schriftsprache unzugänglichen Dinge geben wollte. — Aber in diesem grammatischen Sinn habe ich hier auch noch etwas beizufügen zur Ergänzung einer vorhergehenden Anmerkung (Note 8), worin die Rede war von der weiblichen Form des Wortes λίθος, die stets mit Bedeutsamkeit gebraucht wird. Vorausgesetzt, dass die vorhistorische Zeit (deren Ueberlieferungen die alte Priesterschaft in Mysterien einschloss, worin noch jetzt die indische Astronomie eingeschlossen) mit dem Polaritätsgesetze [15]) bekannt war, muss es beachtungswerth scheinen, dass der Stein als Stein männlichen Geschlechtes ist (ὁ λίθος genannt); als Magnetstein aber weiblichen Geschlechtes (ἡ λίθος mit dem Zusatz Ἡρακλεία). Es ist dadurch bezeichnet, dass dieser Herkulische oder magnetische Stein männliches und weibliches Princip in sich vereine. Darum zogen in den Mysterien des Herakles Männer Frauenkleider an, womit noch andere (in dem auf Herkules sich beziehenden Abschnitte meiner naturwissenschaftlichen Mythologie S. 237 angeführte) sinnige Andeutungen zusammenhängen. Und in diesem Zusammenhange wollen wir einen Blick werfen auf den, gleich dem Magnet Polarität zeigenden, als ἤλεκτρον bezeichneten Krystall, woron Note 8. die Rede war. Denn auf analoge Weise kommt, wie Buttmann zeigt, ἤλεκτρον, was ein Neutrum ist,

---

[15]) In dieser Beziehung stellte ich schon in meiner ersten, im Jahrbuch der Chemie und Physik von 1821 publicirten Abhandlung über Urgeschichte der Physik (welche auch in besondern Abdrücken erschien) die Zeugnisse griechischer Philosophen zusammen, woraus eine alterthümliche Kenntniss des Polaritätsgesetzes hervorgeht, und machte besonders auf die den Aegyptiern zugeschriebene Unterscheidung eines männlichen und weiblichen Feuers aufmerksam. Späterhin bot in analoger Beziehung sich die Bemerkung dar, dass die vorherrschende weibliche Form der auf das Feuer in den orientalischen Sprachen sich beziehenden Worte die Aufmerksamkeit der Grammatiker erregt (s. Journal für Chemie und Physik. B. 37. S. 314.). Entscheidend war die Zusammenstellung des dioskurischen Bilderkreises, um den Beweis zu vollenden jener Bekanntschaft des Alterthums mit dem Polaritätsgesetze. Zugleich erschienen die mannweiblichen Gottheiten, welche den Philologen und Alterthumsforschern so grossen Anstoss gegeben, mit einem Mal aus einem ganz andern Gesichtspunkte, in welcher Hinsicht ich mich auf S. 260. ff. meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft beziehe. Vergl. auch die im Register unter Magnetismus und Elektricität zusammengestellten Nachweisungen.

Digitized by Google

gleichfalls in männlicher Form, und, obwohl seltener, auch in weiblicher vor, wie z. B. Sophokles *in der vorhin angeführten Stelle der Antigone* ὁ ἤλεκτρος *schreibt. Noch sinnvoller wird nun die schon früher umständlich besprochene Buttmannische Ableitung des Wortes von* ἕλκειν. *Denn nun erscheint selbst die dritte neutrale Form in solcher Combination bedeutsamer, gleichsam als Vereinigung des männlichen und weiblichen Princips. Und ebenso sahen wir in der auf* χαλκολίβανον *sich beziehenden Anmerkung (Note 8), dass der Scholiast Gewicht legt auf die weibliche Form des Wortes* ὕαλος, *in sofern es in dieser* weiblichen *Form alterthümlich gleichbedeutend sei dem* ἤλεκτρος, *wobei er die* männliche *(jedoch auch* weiblich *vorkommende) Form gebraucht. Man sieht, wie bei der Beschränkung der Schriftsprache durch die Mysterien sogar grammatische Dinge mysteriöse Bedeutung gewinnen können. Ja selbst der Ausdruck* χαλκολίβανον [16] *(welcher wörtlich* Erzweihrauch *bezeichnet) kündigt sich sogleich als ein mysteriöser an. Die Sprachableitung führt uns auf ein Stammwort zurück, welches* tröpfeln *bedeutet* (λίβω); *also* Erztropfen, metallische Tropfen *sind gemeint. Was die Fabel von den Thränen des Apollo, oder der Heliaden, oder der Meleagrischen Vögel sagt, ist durch dieses Wort ausgesprochen, welches auf die* kleinen thränenartigen Metallkörner *hindeutet, die neben Gold im Flusssande sich finden, gleichsam als Gold anderer Art, das nach* Pausanias *ein äusserst seltenes Metall ist, während* Suidas *jenes Chalkolibanon ein* Elektron *nennt,* kostbarer als Gold. *Auf eine im Zusammenhange mit dem, was vorhin von der Form* ἤλεκτρος *angeführt wurde, beachtungswerthe Weise kommt auch der Ausdruck* χαλκολίβανος *vor, und zwar so, dass auf diese männliche Form Gewicht gelegt wird, indem es heisst:* ὁ μὲν ἄῤῥην ὀνομάζεται χαλκολίβανος ἡλιοειδής [17]. *Der Zusatz* ἡλιοειδής *(sonnenar-*

[16]) In neutraler Form wird dieser Ausdruck von Suidas vielleicht darum gebraucht, weil er ihn durch *ἤλεκτρον* erklärt, obwohl der Weihrauch *λίβανος* heisst und, wie wir nachher sehen werden, auch die Form *χαλκολίβανος* vorkommt.

[17]) Die ganze Stelle, welche angeführt in Salmasii exercitat. Plinian. T. II. p. 810. ist so wunderlich, dass sie mit den Worten des Salmasius hieher gesetzt werden muss: observabamus ex Graeco quodam scriptore, *χαλκολίβανον* genus esse thuris flavi et colore aureo, quem masculum alii nuncupant: *καὶ ὁ μὲν ἄῤῥην ὀνομάζεται χαλκολίβανος ἡλιοειδὴς καὶ πυῤῥὸς ἤγουν ξανθός.* Quae profecto mira sunt. Nam alii thus masculum definiunt *στρογγύλον καὶ λευκόν.* At auctor ille candidum thus vocat *ἀργυρολίβανος* et foemininum esse vult. Da, wie Salmasius selbst anmerkt, dieser Erzweihrauch von Suidas als *ἤλεκτρον* bezeichnet wird: so ist auf so wunderliche Weise ausgedrückt, was oben als eine grammatische Bemerkung Buttmanns angeführt wurde, dass neben der neutralen Form auch *ἤλεκτρος* vorkomme, sowohl im männlichen als weiblichen Geschlechte gebraucht. — Man sieht wie unklar und verworren die mysteriösen Nachklänge werden können, während die Grundidee sinnig war. Und selbst grammatische Beziehungen rufen also die Philologen auf, sich mehr mit Naturwissenschaft zu befreunden, als es neuerdings Sitte geworden. Nebenbei verdient es vielleicht (als ein geflissentlicher Ausdruck der Vernachlässigung) einige Aufmerksamkeit, dass Plinius in der verworrenen Stelle, welche sich auf das dem Homerischen *κασσίτερος* gleich-

Digitized by Google

tig) erinnert an die von ***Plinius*** *der Beachtung empfohlene Vergleichung der Worte* ***electrum*** *und* ***elector****. Und wenn man auf den bei* ***chalcolibanon*** *hervorgehobenen hellen Glanz im Feuer Rücksicht nimmt, so scheint auch in dieser Beziehung die Vergleichung mit dem Sonnenglanze nicht unpassend. Zu leugnen ist ohnehin nicht, dass, soferne wir bei jenem Elektron, das kostbarer war als Gold, an Platin denken, dann allerdings von einem Metalle die Rede sei, welches durch hellen Glanz, Unschmelzbarkeit und Unzerstörbarkeit im Feuer sich auszeichnet.*

4. Da in der vorhergehenden Abhandlung, wozu hier Nachträge zu liefern sind, die Synonymität der Worte plumbum album, cassiteros, electrum in ihrer ältesten (den Mysterien angehörigen) Bedeutung nachgewiesen wurde, und nun das, wie wir eben sahen, gleichfalls mysteriöse chalcolibanon hinzukam, so wollen wir noch bei einem andern, nach Bochart's schon vorhin (Note 8.) erwähnten, auf das Electrum sich beziehenden gelehrten Untersuchungen diesem chalcolibanon gleichbedeutenden Metalle verweilen. Der hebräische Ausdruck bei Ezechiel für ein Metall, das durch ausdauerndes helles Leuchten im Feuer sich auszeichnet, Chasmal genannt, was die Alexandrinischen Interpreten durch ἤλεκτρον übersetzen, bedeutet nämlich nach Bochart's Sprachableitung soviel als Golderz oder aurichalcum, durch welchen Ausdruck Hieronymus das in der Apokalypse vorkommende, durch gleiche Eigenschaft des vorzüglichen Glanzes im Feuer sich auszeichnende χαλκολίβανον übersetzte. Hesiod aber im Schilde des Herakles V. 122. nennt als ein Wundergeschenk des Hephästos Schienen von glänzendem Orichalkos [18]), während sie von demselben Hephästos bei Homer aus Kassiteros und bei Virgil aus Electrum gemacht werden. Der Scholiast des Hesiod hebt ausdrücklich hervor, dieses Orichalkos sei ein weisses Erz (λευκὸν χάλκωμα), mit dem Zusatze,

---

bedeutende plumbum album bezieht, selbst die Wortform verwirrt. Da nämlich, wo er von den angereihten fabelhaften Erzählungen spricht, schreibt er cassiteron und wiederholt diese falsche Wortform selbst mit Beziehung auf Homer, wo sie nie vorkommt. Er thut diess sogleich einleitungsweise, gleichsam als wolle er schon in den ersten Zeilen, wo er anfängt von diesem Homerischen plumbum album (oder cassiteros) zu sprechen, es hervorheben, dass er den mysteriösen Fabelkreis berühre, der ihm verhasst ist.

[18]) Ὀρείχαλκος heisst eigentlich Bergerz; indem aber Hesychius zur Erklärung des Wortes beifügt χαλκὸς χρυσῷ ἐοικώς: so sieht man, dass der Hauptidee nach wirklich aurichalcum und orichalcum (was synonym auch von lateinischen Schriftstellern gebraucht wird) gleichbedeutend seien. Die Pyrenäen sollen nach Diodor von Sicilien (lib. IV. c. 35.) von einem die edlen Metalle ausschmelzenden Brand ihren Namen haben. Man sieht, dass dieselbe Beobachtung über das Vorkommen der edlen Metalle, welche neuerdings besonders bei dem Gold auf der Insel Aruba (s. Reinwardt's schöne Abhandlung über die geographische Beschaffenheit der Insel Aruba im Jahrb. der Chemie und Physik. 1827. der ganzen Reihe B. 51. S. 330 ff.) und bei Gold und Platina in Sibirien sich darbot, auch dem Alterthume nicht entgangen war. In geognostischer Beziehung (worauf im Sinne der Wernerschen Theorie schon vorhin in der Einleitung aufmerksam gemacht wurde) gab es also wirklich ein goldenes Zeitalter.

Digitized by Google

dass einige sagen, es sei eine metallische Materie, kostbarer als Erz, welche nun nicht mehr gefunden werde. Und auch Plato im Kritias (Steph. ed. S. 114. e.) spricht es vom Naturprodukt Orichalkos aus, dass es blos dem Namen nach bekannt sei, vormals aber auf der (nur dem Namen nach bekannten) Insel Atlantis gefunden wurde, und dort, mit Ausnahme des Goldes, das kostbarste gewesen sei unter allen Metallen. Plato unterscheidet also bei dem Orichalkos das ältere Naturprodukt vom späteren Kunstprodukte, ganz so wie Pausanias mit Beziehung auf Elektron es that in der Stelle, von welcher wir ausgingen. Dieses ältere Naturprodukt hatte offenbar auch Virgil im Sinne, indem er (Aen. XII. 87.) das album orichalcum an Gold anreiht. — Bekannt genug aber ist es, dass man späterhin ein dem Golde wenigstens in der Farbe ähnliches Metallgemisch im Messing dargestellt, und dieses Messing *ὀρείχαλκος* oder aurichalcum genannt. Es ist also auch hier wieder, wie bei cassiteros und plumbum album, eine ältere mysteriöse und eine spätere profane Bedeutung des Wortes zu unterscheiden. Besonders beachtungswerth ist daher die Stelle des Scholiasten zu Apollonii Argonaut. IV. 973, welche wörtlich übersetzt also lautet: „Aristoteles sagt, in den Mysterien werde Orichalkos weder mehr genannt noch gezeigt; andere sagen, es werde wohl genannt, sei aber nicht mehr vorhanden. Aber zu den eitlen Angaben gehört auch diese; denn die mehr Unterrichteten sagen, es sei vorhanden“ [19]).

5. Fassen wir das bisher Dargelegte zusammen, so geht daraus hervor (was man auch schon ausgesprochen findet in der neuen Ausgabe des Thesaurus ling. gr. von Stephanus unter *χαλκολίβανον*), dass jenes alte Naturprodukt Orichalkos, welches als weisses Erz bezeichnet wird, gleichbedeutend sei dem Chalkolibanon. Von diesem aber sagt Suidas, es sei ein Elektron, kostbarer als Gold, während Plato, zu dessen Zeiten jenes alte Naturprodukt nicht mehr zu haben war, angiebt, dasselbe sei in der verlorenen Atlantis (worunter einige unser Amerika verstehn) vorgekommen, und habe dort den nächsten Preis nach Gold gehabt. Statt der Atlantis nennt Herodot III. 115.) den noch unerforschsten „äussersten Westen“ als

---

[19]) Diese Stelle wird den Physikern interessant sein, indem sie einen Beweis liefert, dass es sich von naturwissenschaftlichen Dingen in den alten Mysterien handelte. Beckmann, der in seinen Beiträgen zu Geschichte der Erfindungen B. II. S. 364—391 über die Geschichte der Naturaliensammlungen schrieb, lässt nicht unerwähnt, dass die alterthümlichen Tempel auch zur Aufbewahrung von Naturmerkwürdigkeiten benutzt wurden. Ganz nahe lag ihm also der Gedanke, dass dergleichen in Tempeln niedergelegte Sammlungen von Naturmerkwürdigkeiten nicht ohne Beziehung bleiben konnten zu den Mysterien, was in obiger Stelle des Scholiasten deutlich ausgesprochen, die ihm jedoch entgangen Auch Lobeck in seinem Buch über die Mysterien übergeht diese Stelle, was um so weniger zu billigen, da Bochart in der Abhandlung über Elektron (Hierozoicon nach Rosenmüller's Ausg. S. 892.) sie anführt. Eben darum scheint es zweckmässig, sie im Original hieher zu setzen: *Ἀριστοτέλης δὲ ἐν τελεταῖς φησὶ, μηδὲ ὑπάρχειν τὸ ὄνομα, μηδὲ τὸ τούτου εἶδος· τὸ ὀρείχαλκον ἔνιοι ὑπολαμβάνουσι λέγεσθαι μὲν, μὴ εἶναι δέ· τῶν δὲ εἰκῆ διδομένων καὶ τοῦτο· οἱ γὰρ πολυπραγμονέστεροι φασὶν αὐτὸν ὑπάρχειν.*

Digitized by Google

Fundort des Elektrons. Origenes [20]) aber sagt, ebenso wie Suidas, dieses Elektron sei noch kostbarer als Gold. Und vom verschwenderischen Kaiser Elagabal erzählt sein Geschichtschreiber Lampridius: „er bestreute seinen Porticus mit Staub von Gold und Silber, bedauernd, dass er es nicht auch könne mit dem von Elektron (scobe auri porticum stravit et argenti, dolens quod non posset et electri).“ Offenbar kann auch in dieser letzten Stelle niemand bei Elektron an die Mischung aus Gold und Silber denken, weder an die natürlich vorkommende noch an die künstlich gebildete. Das seltene in Tempelmuseen aufbewahrte Gold anderer Art ist hier also gemeint, welches seiner magnetischen Eigenschaften wegen Elektron hiess, und eben darum (gleich dem in alten ägyptischen Tempeln eine bedeutende Rolle spielenden Magnet) als Gegenstand der Mysterien behandelt und wirklich noch in späterer Zeit, wie der Scholiast des Apollonius ausdrücklich sagt, den mehr unterrichteten Eingeweihten gezeigt wurde.

6. Wollen wir zum Schlusse noch einen Ueberblick über die Gründe geben, welche, wie eben bemerkt, dafür sprechen, dass vorzüglich die magnetischen Eigenschaften jenes Goldes anderer Art (oder der natürlich vorkommenden Platina) die Aufmerksamkeit der Mysterien auf sich gezogen haben. Dafür spricht, wie gesagt, schon der Name Elektron, welcher sonst keinen Sinn haben würde, obwohl er, für das ursprüngliche Naturprodukt passend, späterhin auch dem Kunstprodukt angereiht werden konnte. Mit Beziehung auf diese Polarität (Mannweiblichkeit der *Ἡρακλεία λίθος*) erscheint es sinnig, dass auch *ἤλεκτρος* (in männlicher und weiblicher Form) vorkommt, was gleichfalls gilt von dem ihm gleichbedeutenden *χαλκολίβανον* (Erztropfen kostbarer als Gold). Eben dieselbe magnetische Beziehung ist angedeutet durch den vorhin (Note 8.) besprochenen mysteriösen Ausdruck des Suidas [21]), dass diesem Gold anderer Art, oder Elektron, etwas beigemischt sei vom (magnetischen) Stein und (elektrischen) Krystall. Klarer ist dasselbe ausgedrückt durch die von Plinius mit Beziehung auf das Zeugniss der ersten Dichter hervorgehobene Vergleichung der Worte electrum und elector (Sonne), wenn wir nämlich daran denken, dass Herkules als Sonnensymbol galt, und dass die S. 139. erwähnte symbolische Hieroglyphe es ganz klar ausspricht, dass eine herkulische (d. h. magnetische) Kraft in der Sonne leuchte. Neben diesen und andern, schon vorhin auch mit Beziehung auf die Verwandlung der Heliaden in Pappeln (die dem Herkules geweiht) umständlicher besprochenen mysteriösen Bezeichnungen der magnetischen Eigenschaft jenes Elektrons, das seltener und kostbarer war als Gold, ist aber auch eine unverkennbare

[20]) Origenes Homil. XI. (ed. Delarue tom. III. p. 191): *λέγεται τὸ ἤλεκτρον χρύσου εἶναι τιμαλφέστερον.* Bochart sagt a. a. O. S. 883: Origenes atque Hieronymus electrum non solum argento, sed et auro pretiosius esse volunt. Ich gestehe, dass ich einen so klaren Ausspruch, wie der vorliegende des Origines ist, bei Hieronymus nicht finden konnte, während bei Bochart das Citat fehlt. Aber nach so vielen Zeugnissen kommt auf eines mehr oder weniger nichts an.

[21]) Buttmann geht, um seine vorausgesetzte (nur uns, wie er sagt, widersinnig scheinende) alterthümliche Vergleichung des Bernsteins mit dem Golde festzuhalten, bei dieser Stelle des Suidas so weit in sei-

Hindeutung auf denselben Magnetismus nicht zu übersehn, welche in der magischen Kette des gallischen Herkules liegt. Lucian widmete diesem gallischen Herkules eine besondere kleine Schrift und hebt dabéi die zarte Kette aus Gold und Elektron hervor, womit derselbe eine Menge Volks nach sich zieht, das ihm willig und heiter, ja ihm entgegeneilend, folgt. Die Nebenbeziehungen zeigen, dass Herkules (der bekanntlich auch im griechischen Mythus dem Hermes verwandt) hier als Gott der Beredsamkeit aufgefasst sei. Und wenn Plato in einer schönen Stelle seines Ion die ergreifende Kraft der begeisterten Rede mit der ergreifenden des Magnets vergleicht, welcher nicht blos an sich zieht, sondern (wie bei den samothracischen eisernen Ringen) dem Angezogenen auch die Kraft giebt, auf gleiche Weise anziehend fortzuwirken: so drückt jene magische Kette aus Gold und Elektron offenbar dasselbe aus. Die magnetische Kraft jenes Goldes anderer Art, das in jener Kette mit dem gemeinen Golde combinirt, ist also hier, wenn gleich durch ein mysteriöses Symbol, doch in der That deutlich genug bezeichnet.

7. Dass ausser der magnetischen Eigenschaft jenes, als seltenes Naturprodukt vorkommenden Goldes anderer Art (welche Ansicht des Platins auch in neuerer Zeit den Namen des weissen Goldes herbeigeführt) selbst das specifische Gewicht desselben bei einem Weihgeschenke des Krösus für den delphischen Apollo ganz annähernd so bezeichnet sei, wie es das Platin im Verhältnisse zu Gold wirklich zeigt, davon war schon in der Einleitung und umständlicher in der frühern Abhandlung die Rede, woran die gegenwärtige sich anschliesst. Man glaubte, jene Stelle des Herodot corrigiren zu müssen, in der vorgefassten Meinung, bei weissem Golde habe man im Alterthume lediglich an eine Mischung aus Gold und Silber gedacht. Dann aber wäre es höchst überflüssig gewesen, dieselbe Mischung auch mit dem Namen Elektron zu bezeichnen, auf eine ganz bedeutungslose Weise. Aber wenn man eine Mischung aus Gold und Silber weisses Gold nannte: so kann man unmöglich zweifeln, dass auch das seltene goldartige Metall, welches man, wie Pausanias sagt, durch diese Mischung aus Gold und Silber nachzuahmen suchte, den Namen des weissen Goldes wird erhalten haben. Letzteres gehörte, wie nachgewiesen wurde, den Mysterien an, und wurde aufbewahrt in Tempelmuseen, und noch in späterer Zeit den Eingeweihteren gezeigt (Note 19). Dass aber bei einem Weihgeschenke für den Tempel des Delphischen Apollo mysteriöse Beziehungen nicht fehlen konnten, und also schon darum, wenn weisses Gold auf eine so bedeutsame Weise, wie es von Krösus geschehn ist, geweiht wurde, an jenes mysteriöse weisse Gold (oder Elektron) zu denken sei, solches wird man wohl zugeben, besonders wenn man erwägt, dass die Fabel von der Entstehung jenes kostbaren Elektrons (zur Bezeichnung der Art seines Vorkommens) sich an die Thränen der Heliaden, ja des Apollo selbst anschloss.

---

nen willkürlichen Annahmen, dass er sagt: „nämlich durch solche Zumischung anderer Naturen, gleichsam durch eine Art Vererzung, erklärte man sich die von dem wirklichen Gold abweichenden (dem unwissenschaftlichen Menschen zufälligen) Eigenschaften, wie die Gebrechlichkeit, die Leichtigkeit, die Durchsichtigkeit.“

Digitized by Google

Erwägt man nun, dass Herodot auch in anderen Fällen Unglaubliches recht absichtlich erzählt, blos um auf eine mysteriöse Beziehung die Aufmerksamkeit der Mysterienkundigen (für welche man zunächst schrieb) hinzulenken [22]): so erhält die schon vorhin ausgesprochene Vermuthung Wahrscheinlichkeit, dass in der absoluten Zahlbestimmung, welche Herodot angiebt, eine absichtliche Uebertreibung liege, um durch Uebertreibung von Aeusserlichkeiten auf die innere mysteriöse Bedeutung des Weihgeschenkes aufmerksam zu machen. Zu der hervorzuhebenden mysteriösen Beziehung gehörte aber das relative Gewicht des weissen Goldes, wodurch eben das mysteriöse weisse Gold von der profanen Nachahmung sich wesentlich unterschied. Dankeswerth ist es, dass Herr Professor Schubarth durch Rechnung nachgewiesen, es werde nicht einmal weisses Gold, sondern vielmehr grün gefärbtes erhalten, wenn man den Herodot so corrigirt, wie Matthiä ihn corrigirte. Um so mehr ist diese Correctur nun wieder hinwegzustreichen aus allen neueren Ausgaben, in welche sie sämmtlich übergegangen. Gewiss aber wird nun kein Philolog mehr geneigt sein, eine neue willkürliche Conjectur an die Stelle zu setzen.

8. Erwägen wir, dass Gold und Platin vorzugsweise vorkommen im zerklüfteten Erdreich, wo von der Natur die Ausschmelzung und Auswaschung im Grossen vorgenommen: so wird, wie schon einleitungsweise erwähnt, als sehr wohlbegründet die Ansicht Werner's erscheinen, dass es in geognostischer Hinsicht wirklich ein goldenes Zeitalter gab, wo in bedeutender Menge die verschwenderisch verbrauchten edlen Metalle (als Orichalkos) umherlagen auf der Erde. Höchst wahrscheinlich also muss es schon darum scheinen, dass die Alten nicht einzig und allein auf die Kenntniss von Gold und Silber beschränkt waren, sondern noch andere gediegen vorkommende Metalle, wie Platin und Palladium, kennen gelernt. Mit Beziehung auf Palladium habe ich diess, wie in der Einleitung angeführt wurde, in jener frühern Abhandlung, woran die gegenwärtige sich anschliesst, wahrscheinlich gemacht; hinsichtlich auf Platin aber ist solches nun durch die dargelegten alterthümlichen Zeugnisse vollkommen erwiesen. Diese dargelegten Zeugnisse gestatten zugleich einen Blick in den Geist der alten naturwissenschaftlichen Mysterien. Schon in der Abhandlung Gesner's über Elektron findet man es nicht ohne Befremden des Verfassers hervorgehoben, dass in allen Schriften Cicero's nicht einmal das Wort electrum vorkommt, ohnerachtet die Tempelräubereien des Verres vielleicht hätten Veranlassung geben können zur Erwähnung desselben. Eben so wenig, fügt Gesner bei, ist vom Electrum die Rede bei Lucrez, obwohl er da, wo er vom

[22]) Ein unleugbares Beispiel der Art, nämlich einer bis ins Sinnlose gehenden Uebertreibung, welche Herodot sich erlaubt, um eine nun auch uns verständliche mysteriöse Andeutung hinsichtlich auf den Grund der Katzenverehrung in Aegypten zu geben (da in der Schriftsprache mit Klarheit davon zu sprechen die Tyrannei der Mysterien unmöglich machte) ist umständlich dargelegt in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen (S. 35. und 54.), welche eben auf diese Beschränkung der Schriftsprache bei allen mysteriösen Dingen sich bezieht; eine Beschränkung, die so weit ging, dass die schriftliche, auf Mysterien sich beziehende Ueberlieferung uns blos verwirrt, während allein die symbolische Hieroglyphe Aufklärung giebt. (Vergl. die vorhergehende Note 6.)

Digitized by Google

Magnet sprach, eigentlich nicht wohl davon schweigen konnte (vergleiche Note 12); und auch bei Seneca, dessen quaestiones naturales Gelegenheit genug darboten, kommt nichts vom Electrum vor. Was bei den Griechen zu finden, sind mysteriöse Fabeln. Plinius wirrt diese sogenannten dichterischen Fabeln mit dem Ausdrucke der Indignation zusammen, zufrieden, wie es scheint, unter dem Gewirre mitunter ein bedeutendes Wort verstecken zu können [23]). Da aber Plinius von medicinischer Wirksamkeit des

---

[23]) Ein Beispiel der Art ist in meiner Einleitung in die Mythologie S. 141. und 364. angeführt. Gesner nahm auf dem Standpunkte der Physik seiner Zeit besonderes Interesse an folgender Stelle des Plinius (h. n. XXXIII. c. 4. sect. 23.): nativum electrum venena deprehendit; namque discurrunt in calicibus arcus coelestibus similes cum igneo stridore. Diese letzten Worte hatten in der Periode jener neuen Wunderwelt der Reibungselectricität die Aufmerksamkeit des berühmten Philologen auf sich gezogen. Und in der That könnte man damit in Verbindung bringen, was Plinius gleichfalls nur flüchtig hinwirft: Philemon ait flammam reddi ab electro, und was in der angeführten Stelle meiner Einleitung in die Mythologie schon im Zusammenhange aufgefasst mit einer Angabe des Festus vom Reiben einer sogenannten felix materia im Tempel der Vesta, und von der Erregung eines plötzlichen Bebens (Panischen Schreckens) am ganzen Körper in demselben Tempel, gemäss einer Erzählung des Tacitus (wovon ebendas. S. 167. die Rede). Und in solchem Zusammenhange könnte es scheinen (da venenum auch Zauberei bezeichnet), der geheime Sinn jener angeführten Stelle des Plinius sei: Electrum (dessen Anziehungskraft, wie derselbe Plinius sagt, schon die syrischen Frauen bei ihren damit gezierten Spindeln beobachtet) entdecke Zauberei (nämlich die im Tempel der Vesta) durch mit Geräusch überspringende, selbst farbig leuchtende Funken, welche Funken ganz entschieden im Alterthum an Katzen u. s. w. beobachtet wurden, worüber a. a. O. S. 313. f. Nachweisungen zu finden. Liest man jedoch jene oben angeführte Stelle des Plinius im Zusammenhange: so sieht man, dass dort nicht einmal vom Bernstein, sondern vom Metall Electrum die Rede ist, welches Plinius als eine Mischung aus Gold und Silber bezeichnet, obwohl mit Anreihung mysteriöser, ein Weihgeschenk der Helena betreffender Beziehungen, denen die oben angeführte Stelle sich anschliesst, wodurch offenbar das nativum electrum als wesentlich verschieden von dem künstlich gebildeten bezeichnet ist. Man müsste also, und diess war vielleicht Gesner's Meinung, gemäss der Art, wie man die Compilationen des Plinius auffasst, an ein gänzliches Missverstehen denken von Seiten des Plinius entweder oder eines seiner Freigelassenen, den er vielleicht bei seinen Compilationen benützte. Und zu so groben Missverständnissen konnte wohl ein gleich der Physik des Aristoteles absichtlich dunkel geschriebenes Buch Veranlassung geben; wenn man nicht sagen will, Plinius sei mitunter von demselben Princip ausgegangen, wie Aristoteles in seiner Physik, oder der durch seine Dunkelheit im Alterthume berühmte Herakleitos, und habe sich namentlich in obiger Stelle so benommen, wie Herodot in einem analogen Falle, wovon in vorhergehender Note 22. die Rede war. — Dann aber muss man eingestehn (was eben in dort erwähnter Denkschrift nachgewiesen), dass die ganze schriftliche Ueberlieferung bei allen mysteriösen Dingen keine Erkenntnissquelle sei. Wenigstens kein Physiker könnte auf das Gewirre von Missverständnissen und Fabeln sich einlassen, wenn nicht die ganz scharf bezeichnende symbolische Hieroglyphe einen interessanten Weg der Untersuchung darböte, worauf man sichern Schrittes fortgehn kann. Man vergesse aber nicht, dass selbst die grosse Pyramide zu Memphis in symbolischer Hieroglyphensprache zu uns redet, indem Jomard nachgewiesen, dass in den Dimensionen derselben eine vor-

Digitized by Google

Electrums spricht, so war für Gesner auch dies besonders befremdend, dass selbst die Aerzte, wie Celsus, Scribonius, Galen, das Electrum gar nicht einmal nennen, während Dioskorides so flüchtig darüber hingeht, und so verwirrt sich ausdrückt, dass er, wie Gesner sagt, in der ersten Hälfte des Perioden vom Metall Electrum, in der letztern vom Bernstein zu reden scheint [24]).

(Fortsetzung folgt.)

---

historische Gradmessung niedergelegt sei. Jedoch in unserer alexandrinisch grammatischen Zeit ignorirt man eben darum den ganzen siebenten Band der Déscription de l'Egypte, welcher einzig und allein diese eben so mathematisch streng als philologisch gelehrt geschriebene Abhandlung enthält. Wenn man aber in allen Schulen lehrt und auf alle Karten der alten Geographie schreibt, dass 600 ägyptische (oder olympische) Fuss ein Stadion, und 600 Stadien einen Erdgrad betragen, folglich der ägyptische Fuss ein aliquoter Theil des Erdgrades ist, und zwar der 360000ste: so sagt man im Grunde dasselbe, was Jomard nachgewiesen durch die genauesten Messungen der grossen Pyramide von Memphis; aber nicht dieser allein (vgl. Einleitung in die Mythologie. S. 362). Nebenbei ist nicht zu übersehen, was schon Bailly in der Geschichte der alten Sternkunde. B. 2. S. 50—52 von der grossen astronomischen Bedeutsamkeit der Zahl 600 mit Beziehung auf die Rechnungen des Dominicus Cassini anführt. — Und nun frage man sich, was da liegt in einer Gradmessung, welche an Genauigkeit die aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts übertrifft, ja ganz streng gilt für den mittlern ägyptischen Erdgrad. — Und diess ist die mathematische Basis der physikalischen Hieroglyphen, worauf allein eine Urgeschichte der Physik sich gründen lässt, während die schriftlichen Ueberlieferungen dabei blos von untergeordneter, secundärer Bedeutung. — Von vorhistorischen Dingen handelt es sich hier, wie bei den ägyptischen Pyramiden, wesswegen Plato auf zehntausend Jahre zurückgehn zu müssen glaubt, vom Urtypus der ägyptischen Bilderwelt sprechend (s. Einl. in d. Mythol. S. 126.); und Herodot (II. 43.) bei Aufsuchung der Grundidee des Herakles sogar auf 17000 Jahre zurückkommt, d. h. jede historische Forschung ausschliesst. Und erwägt man, dass jede wahre Religion nicht dem Zeitlichen, sondern dem Ewigen nachstrebt, sich daher bezieht auf ewige Wahrheiten, wozu auch die unendliche Offenbarung Gottes in der Natur gehört: so muss es höchst erfreulich sein, die Weisen des Alterthums sich erheben zu sehn über die den Naturwahrheiten in der Volksreligion traditionell untergeschobenen historischen Beziehungen.

[24]) Ebenso beachtungswerth ist das Schweigen aller Naturforscher des Alterthums von Meteorsteinen, deren Herabfallen (wovon die Historiker Zeugniss geben), so wenig ein Mensch damals bezweifelte, dass sogar Tempel gebaut wurden, wo sie herabgefallen waren, während man Götterbilder darauf zu finden glaubte. Umständlicher ist davon die Rede in der Einleitung in die Mythol. auf d. Standp. d. Naturwissensch. S. 150. Auch Chladni's Aufmerksamkeit hatte es schon erregt, dass vom Bilde der Göttermutter bei drei Meteorsteinen die Rede, welche er anführt (siehe Chladni über Feuermeteore. S. 181. Note). — Und blickt man die als Nachtrag zu Chladni's Werk erschienenen Meteorsteinabbildungen von Schreibers an: so sieht man, dass die rasche Schmelzung der Oberfläche jener Meteormassen allerdings Zeichnungen von Pflanzen, ja von Thier- und Menschen-ähnlichen Gestalten veranlasste, und man begreift, wie man durch diesen Meteorcultus zur Nachbildung von Ungestalten, ja zu Thier- und Pflanzen-Verehrung veranlasst werden konnte, welche bekanntlich von localer Bedeutung war.

Digitized by Google

XVI.

Ueber quadrirbare Figuren auf cylindrischen Flächen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Cylindrische Flächen heissen bekanntlich diejenigen Flächen, welche eine Gerade beschreibt, wenn sie über irgend eine gerade oder krumme Linie im Raume (die Direktrix) so hingleitet, dass sie während dieser Bewegung immer in einer und derselben Richtung, oder, was auf das Nämliche hinauskommt, einer gegebenen Geraden im Raume parallel bleibt. Wir können dabei, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, immer voraussetzen, dass die Direktrix eine Curve einfacher Krümmung und die Richtung der gleitenden Geraden senkrecht auf der Ebene der Direktrix sei; denn wenn diess auch ursprünglich nicht der Fall sein sollte, so kann man die Cylinderfläche mit einer auf ihrem Mantel (d. h. der Richtung der gleitenden Geraden) senkrechten Ebene durchschneiden und jetzt die entstandene Durchschnittscurve, die immer einfacher Krümmung ist, als neue Direktrix ansehen. Legt man in die Ebene dieser Direktrix zwei sich rechtwinklich schneidende Coordinatenachsen und stellt in den so bestimmten Anfangspunkt der Coordinaten die dritte Coordinatenachse senkrecht auf die Ebene der Direktrix, so fällt die Richtung dieser Achse mit der Richtung der gleitenden Geraden zusammen und zugleich nimmt die Gleichung der Cylinderfläche eine Form an, deren Einfachheit die Basis der nachherigen Untersuchung bildet.

Seien in Taf. IV. Fig. 1. OX, OY, OZ die drei rechtwinklichen Coordinatenachsen und stelle XQZ die Direktrix vor, so muss zuerst die Natur derselben durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $OM=x$, $MQ=z$ bestimmt sein, welche in dem allgemeinen Schema

$$z=f(x) \qquad (1)$$

enthalten ist. Ziehen wir von Q aus eine Gerade $QP \parallel OY$, so

liegt dieselbe nach den vorhin gemachten Voraussetzungen ganz in der Cylinderfläche, und wenn wir von dem beliebigen Punkte P das Perpendikel PN herablassen, so sind jetzt $OM=x$, $MN=y$, $NP=MQ=z$ die drei Coordinaten von P. Eine Relation zwischen denselben (die Gleichung der Cylinderfläche) besteht hier in der blosen Bemerkung, dass wie früher $z=f(x)$ sein muss, ausserdem aber y ganz willkührlich genommen werden darf; die Gleichung der fraglichen Fläche:

$$z=f(x),\ y \text{ ad libitum}$$

unterscheidet sich also von der Gleichung der Direktrix nur durch den Zusatz, dass noch eine dritte, aber willkührliche, Coordinate vorhanden ist. Dieser Umstand bringt eine grosse Erleichterung in die Quadratur solcher Flächen, welche nach der allgemeinen Formel

$$S=\iint \partial x\,\partial y \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

zu bewerkstelligen wäre, worin $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ die partiellen Differenzialquotienten sind, welche man durch Differenziation der Gleichung $z=F(x,y)$ der zu quadrirenden Fläche erhält. Da nämlich in unserem Falle z zwar von x, aber nicht von y abhängt, so wird für die cylindrischen Flächen

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(x),\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

und mithin einfacher

$$S=\iint \partial x\,\partial y\,\sqrt{1+[f'(x)]^2}. \qquad (2)$$

Man übersieht auf der Stelle, dass sich hier die Integration nach y sogleich ausführen lässt, weil in dieser Beziehung nur ∂y zu integriren ist, was y giebt, und dass sich folglich die doppelte Integration auf eine einfache reduzirt; doch bevor wir diess genauer ansehen, wollen wir die Gränzen der Integrationen nach x und y bestimmen. Denken wir uns in der Ebene XY zwei beliebige gerade oder krumme Linien FRH und GSK, und ausserdem von zwei beliebigen Punkten A und B der Achse OX aus Gerade $\parallel OY$ gezogen, so bestimmen diese vier Linien in der Coordinatenebene XY eine viereckige Figur $FGKH$; von jedem Punkte ihrer Peripherie aus lassen wir eine Gerade $\parallel OZ$ aufsteigen, alle diese Geraden durchschneiden die Cylinderfläche, und die so entstehenden Durchschnittspunkte bilden in ihrer Continuität auf der Cylinderfläche wieder eine Art Viereck $TUWV$, von welchem das erstgenannte $FGKH$ die Projektion ist. Die Fläche $TUWV$ sei nun diejenige Figur, welche mittelst der Formel (2) quadrirt werden soll, was offenbar wegen der Unbestimmtheit der Curven FRH und GSK die allgemeinste Voraussetzung ist. Was nun die Integrationsgränzen für x und y betrifft, so erhellt, dass es blos darauf ankommt, x und y so zu wählen, dass der Punkt N (die Pro-

jektion von P) keine anderen Stellen der Ebene XY betreten kann als diejenigen, welche in der Figur $FGKH$ (der Projektion von $TUWV$) enthalten sind. Der Spielraum des Punktes M ist aber offenbar die Strecke AB und folglich sind $x = OA$ und $x = OB$ die Gränzen für x, wobei zur Abkürzung $OA = \alpha$ und $OB = \beta$ sein möge. Da ferner der Punkt N immer zwischen den Curven FH und GK bleiben muss, so sind MR und MS die Gränzen für $y(MN)$. Wenn aber die Aufgabe bestimmt sein soll, so müssen die Curven FRH und GSK ihrer Natur nach bekannt, also ihre Gleichungen gegeben sein; nennen wir ξ und η die rechtwinklichen Coordinaten eines Punktes der Curve FRH, wobei die ξ von O aus auf OX gezählt werden, so sei $\eta = \varphi(\xi)$ die Gleichung der Linie FRH, ebenso $\eta' = \psi(\xi)$ die von GSK, wenn η' das für letztere Curve ist, was η für die erstere. Setzen wir an die Stelle des beliebigen ξ die Linie $OM = x$, so folgt $\eta = MR = \varphi(x)$ und $\eta' = MS = \psi(x)$, und demnach sind $\eta = \varphi(x)$ und $\eta' = \psi(x)$ die Gränzen für y. Durch Substitution der Gränzen für x und y wird jetzt nach Formel (2)

$$S = \int_\alpha^\beta \partial x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \int_\eta^{\eta'} \partial y,$$

oder, weil

$$\int_\eta^{\eta'} \partial y = \eta' - \eta = \psi(x) - \varphi(x)$$

ist:

$$S = \int_\alpha^\beta \partial x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \{\psi(x) - \varphi(x)\}, \qquad (3)$$

wobei also

$z = f(x)$ die Gleichung der Direktrix XQZ,
$y = \varphi(x)$ „ „ „ Curve FRH,
$y = \psi(x)$ „ „ „ „ GSK,
$\alpha = OA$, $\beta = OB$, $S = TUWV$

ist. Da das Integral in (3) ein einfaches ist, so wird es immer möglich sein, den Werth desselben zu finden, sei es durch Reduktion auf eine bekannte Funktion oder durch Verwandelung in eine unendliche Reihe. In den Fällen aber, wo sich unser Integral auf eine von denjenigen Funktionen bringen lässt, für welche man Tafeln besitzt, wollen wir die Figur $TUWV$ eine quadrirbare nennen und nun einige Spezialisirungen der Art betrachten.

I. Sei $z = \frac{c}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, also der Cylinder ein elliptischer, dessen Achsen a und c in den Coordinatenachsen OX und OZ liegen, so wird

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^4 - (a^2 - c^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$

und folglich nach no. (3)

Digitized by Google

$$S=\frac{1}{a}\int_{\alpha}^{\beta}\partial x\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}}\{\psi(x)-\varphi(x)\}. \quad (4)$$

Unter den verschiedenen Suppositionen nun, welche man hier für $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ machen kann, heben wir die folgenden als bemerkenswerth heraus.

a. Der einfachste Gedanke ist offenbar, $\varphi(x)=Ax^\mu$ und $\psi(x)=Bx^\mu$ zu nehmen, wobei μ eine ganze Zahl bedeuten möge. Diess gäbe dann

$$S=\frac{B-A}{a}\int_{\alpha}^{\beta}x^\mu\partial x\sqrt{\frac{a^4-(a^2-c^2)x^2}{a^2-x^2}} \quad (5)$$

und hier sind zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich μ gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle kann durch Rationalmachen des Zählers in der Differenzialformel das Integral auf die Form

$$\int\frac{x^\mu[a^4-(a^2-c^2)x^2]\partial x}{\sqrt{[a^2-x^2][a^4-(a^2-c^2)x^2]}},$$

also überhaupt auf Integrale folgender Gestalt

$$\int\frac{x^\nu\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)(h^2-k^2x^2)}}$$

gebracht werden, wobei ν eine gerade Zahl ist. Das vorliegende Integral lässt sich aber nach bekannten Reduktionsformeln auf elliptische Funktionen zurückbringen *). Anders dagegen wird die Sache, wenn in no. (5) μ eine ungerade, folglich $\frac{\mu-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Denn in diesem Falle kann man dem Integrale folgende Gestalt geben:

$$S=\frac{B-A}{2a}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{x^{\mu-1}2x\partial x[a^4-(a^2-c^2)x^2]}{\sqrt{(a^2-x^2)[a^4-(a^2-c^2)x^2]}};$$

und setzt man hier $x^2=a^2u$, so wird $2x\partial x=a^2\partial u$, $x^{\mu-1}=a^{\mu-1}u^{\frac{\mu-1}{2}}$; wenn ferner $x=\alpha$ und $x=\beta$ geworden ist, so hat u die Werthe

$$u=\frac{\alpha^2}{a^2}=\alpha',\ u=\frac{\beta^2}{a^2}=\beta' \quad (6)$$

angenommen, wobei α' und β' zur Abkürzung gebraucht worden sind. Durch diese Substitutionen geht unsere Gleichung in die folgende über:

---

*) Legendre traité des fonctions elliptiques Chap. I. — Supplemente zu Klügels math. Wörterb. Band II. S. 84—87.

Digitized by Google

$$S=\frac{(B-A)a^\mu}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{u^{\frac{\mu-1}{2}}\partial u\,[a^2-(a^2-c^2)u]}{\sqrt{(1-u)[a^2-(a^2-c^2)u]}},$$

oder wenn man berücksichtigt, dass

$$a^2-(a^2-c^2)u=a^2\{1-(1-\frac{c^2}{a^2})u\}$$

ist, und zur Abkürzung

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\varepsilon \tag{7}$$

setzt:

$$S=\frac{(B-A)a^{\mu+1}}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{(1-\varepsilon u)u^{\frac{\mu-1}{2}}\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{8}$$

Da nun $\frac{\mu-1}{2}$ hier ganz ausfällt, so reduzirt sich dieses Integral auf zwei andere von der Form

$$\int\frac{u^\nu\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}},\ \nu \text{ eine ganze Zahl;}$$

und kann dann immer durch Kreisbögen oder Logarithmen dargestellt werden. So hat man z. B. für $\mu=+1$, $A=\tan\vartheta$, $B=\tan\omega$:

$$S=\frac{(\tan\omega-\tan\vartheta)a^2}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{9}$$

Hierzu gehört Taf. IV. Fig. 2. Die Gleichungen der in der Ebene XY gezeichneten Curven sind hier $y=\varphi(x)=x\tan\vartheta$, $y=\psi(x)=x\tan\omega$, also die Curven selbst zwei Gerade, welche durch den Punkt O gehen und mit OX die Winkel $XOH=\vartheta$ und $XOK=\omega$ machen. Zugleich ist wieder $OA=\alpha$, $OB=\beta$, also $FGKH$ die Projektion von $TUWV$ und die Fläche dieser Figur obiges S. Sind nun $OX=a$ und $OZ=c$ die Achsen des elliptischen Cylinders, so bildet die Curve XZ einen Quadranten der Direktrix und der ganze Cylinder ein Tonnengewölbe, wovon die Figur nur die Hälfte zeigt. Nehmen wir noch $OA=\alpha=0$, $OB=\beta=a=OX$, so geht das Viereck $FGKH$ in das Dreieck ODE und die Fläche $TUWV$ in ZDE über; zugleich wird nach (6) $\alpha'=0$, $\beta'=1$ und folglich

$$S=\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2}\int_0^1\frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}. \tag{10}$$

Nun ist aber $XD=OX\tan XOD=a\tan\vartheta$, $XE=OX\tan XOE=a\tan\omega$, mithin

$$XE - XD = DE = a(\tan\omega - \tan\vartheta).$$

Hieraus findet sich der Inhalt des Dreiecks ODE, der F heissen möge, nämlich

$$F = \frac{OX.DE}{2} = \frac{a^2(\tan\omega - \tan\vartheta)}{2};$$

wenn wir also das in (10) vorkommende Integral k nennen, so findet hier die bemerkenswerthe Relation

$$S = kF$$

statt, welche schon Herr Dr. Wittstein im 7ten Theile des Archivs S. 445. angegeben hat *). Für k findet man leicht, wenn $a > c$, also ε positiv ist:

$$k = 1 + \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\, l\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right);$$

wenn $a = c$, also $\varepsilon = 0$ ist:

$$k = 2;$$

und wenn $a < c$, also ε negativ ist:

$$k = 1 + \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{-1}}\,\text{Arctan}\,\sqrt{-\varepsilon};$$

womit diese spezielle Aufgabe gelöst ist.

Nimmt man in der Formel (8) $A = 0$, $\mu = -1$ und setzt b für B, so wird

$$S = \frac{b}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{(1-\varepsilon u)\partial u}{u\sqrt{1-(1+\varepsilon)u+\varepsilon u^2}}.$$

Die beiden Curven in der Ebene XY sind hier die Achse der x (wegen $y = \varphi(x) = 0$) und eine gleichseitige Hyperbel mit der Achse b (wegen $\psi(x) = \frac{b}{x}$), von der die Coordinatenachsen OX und OY die Asymptoten sind (Taf. IV. Fig. 3.). S ist die Fläche $TUWV$ und die Curve UW kann hier als Durchschnitt eines elliptischen und hyperbolischen Cylinders angesehen werden. Man hat übrigens

$$S = \frac{b}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\partial u}{u\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^2}}$$
$$-\frac{b\varepsilon}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^2}},$$

---

*) In den Buchstaben findet nur der Unterschied statt, dass hier c steht, wo Herr Dr. Wittstein b hat.

Digitized by Google

und wenn man im ersten Integrale $u=\frac{1}{v}$ setzt:

$$S=\frac{b}{2}\int_{\frac{1}{\beta'}}^{\frac{1}{\alpha'}}\frac{\partial v}{\sqrt{v^2-(1+\varepsilon)v+\varepsilon}}$$

$$-\frac{b\varepsilon}{2}\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{\partial u}{\sqrt{1-(1+\varepsilon)u^2+\varepsilon u^2}},$$

wo nun der Werth jedes Integrales sehr leicht zu entwickeln ist.

6. Eine andere gute Substitution für die auf den elliptischen Cylinder passende Formel (4) ist $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$; die Curven in der Ebene XY sind dann die Coordinatenachse OX und eine Ellipse, deren Achsen a und b in den Linien OX und OY liegen. Sei daher in Taf. IV. Fig. 4. $OX=a$, $OY=b$, $OZ=c$, $OA=\alpha$, $OB=\beta$, so ist $S=TUWV$ und die Curve UW kann als Durchschnitt zweier elliptischen Cylinder angesehen werden. Zugleich ist nach no. (4)

$$S=\frac{b}{a^2}\int_{\alpha}^{\beta}\partial x\sqrt{a^4-(a^2-c^2)x^2};$$

und wenn wir $x=at$ setzen, so werden die Gränzen für t:

$$t=\frac{\beta}{a}=\beta',\ t=\frac{\alpha}{a}=\alpha' \qquad (11)$$

und folglich

$$S=b\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial t\sqrt{a^2-(a^2-c^2)t^2},$$

oder für

$$1-\frac{c^2}{a^2}=\varepsilon: \qquad (12)$$

$$S=ab\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}. \qquad (13)$$

Nehmen wir spezieller $\alpha=OA=0$ und $\beta=OB=OX=a$, so wird $\alpha'=0$, $\beta'=1$ und S bedeutet jetzt die Fläche ZXQ. Für dieselbe ist

$$S=ab\int_0^1\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}.$$

Berücksichtigt man hier, dass $\frac{1}{4}ab\pi$ die Fläche der Projektion OXY als eines elliptischen Quadranten darstellt, bezeichnet dieselbe mit F und setzt

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1\partial t\sqrt{1-\varepsilon t^2}=k,$$

Digitized by Google

so ist nach dem Vorigen

$$S = kF,$$

worin sich, weil k nur von dem Achsenverhältnisse $\frac{c}{a}$ des elliptischen Cylinders abhängt, ein dem Wittstein'schen ganz analoger Satz ausspricht.

II. Besonders einfach und elegant ist die Quadratur solcher Figuren, welche auf einem cykloidalischen Cylinder gezeichnet sind. In Taf. IV. Fig. 5. ist ein solcher abgebildet, worin OZ' die halbe Basis der Cykloide $= r\pi$, O ihren Scheitel und OX ihre Höhe $= 2r$ darstellt, wenn r den Radius des beschreibenden Kreises bedeutet. Nähmen wir wie gewöhnlich den Anfang der Bewegung des rollenden Kreises zum Anfangspunkte der Coordinaten, die Abscissen ξ von Z' nach O zu und die Ordinaten darauf senkrecht, so wäre die Gleichung der Cykloide

$$\xi = r(\varphi - \sin\varphi), \quad \eta = r(1 - \cos\varphi)$$

worin φ den Wälzungswinkel bezeichnet. Wollen wir diese Coordinaten in die bisherigen x und z verwandeln, so müssen wir $\xi = OZ' - z = r\pi - z$ und $\eta = OX - x = 2r - x$ setzen, so dass wir erhalten

$$z = r\pi - r(\varphi - \sin\varphi), \quad x = 2r - r(1 - \cos\varphi) = r(1 + \cos\varphi).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = -r(1 - \cos\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial\varphi} = -r\sin\varphi$$

und

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \cos\varphi}{\sin\varphi} = \tan\frac{1}{2}\varphi.$$

Mithin haben wir weiter

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \tan^2\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1 + \cos\varphi}},$$

d. i. weil nach dem Früheren $1 + \cos\varphi = \frac{x}{r}$ ist:

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{\frac{2r}{x}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}},$$

wenn wir den Durchmesser $2r$ des erzeugenden Kreises mit a bezeichnen. Nach Formel (3) wird jetzt

Digitized by Google

$$S=\sqrt{a}\int_\alpha^\beta \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\{\psi(x)-\varphi(x)\}, \qquad (14)$$

und diese Formel ist so einfach, dass sie sich für eine Unzahl von Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ integriren lässt. Die einfachsten Fälle sind folgende.

a. Für $\varphi(x)=x\tan\vartheta$, $\psi(x)=x\tan\omega$ wird

$$S=\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)\int_\alpha^\beta x^{\frac{1}{2}}\partial x$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)(\beta^{\frac{3}{2}}-\alpha^{\frac{3}{2}}),$$

und dies wäre der Inhalt von $TUWV$ in der Figur, wobei $FGKH$ die Projektion von $TUWV$, $\angle XOF=\vartheta$, $\angle XOG=\omega$ ist. Nehmen wir $\alpha=0$, $\beta=a=OX$, so geht die Fläche $TUWV$ in die grössere OPQ über, deren Grösse

$$S=\frac{2}{3}\sqrt{a}(\tan\omega-\tan\vartheta)\sqrt{a^3}$$
$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2}$$

ist. Bezeichnen wir aber, wie schon früher einmal, die Fläche des Dreiecks ODE mit F, so ist

$$F=\frac{a^2(\tan\omega-\tan\vartheta)}{2},$$

und mithin haben wir die sehr bemerkenswerthe Relation

$$S=\frac{4}{3}F.$$

b. Für $\varphi(x)=\sqrt{px}$, $\psi(x)=\sqrt{qx}$ bilden die in der Ebene XY gezeichneten Curven zwei Parabeln, deren Parameter p und q sind und deren gemeinschaftliche Achse OX ist. Man erhält sehr einfach für die Fläche $TUWV$ (Taf. IV. Fig. 6.)

$$S=\sqrt{a}(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\beta-\alpha),$$

und für $p=0$, $\alpha=0$, $\beta=a$, in welchem Falle S die Fläche $OZ'Q$ bedeutet,

$$S=a\sqrt{aq}$$

oder, weil nach der Gleichung $y=\sqrt{qx}$ die Gerade $XD=\sqrt{aq}$ ist, S gleich dem Rechtecke aus OX und DX. Bezeichnen wir die Fläche der Projektion $OXEKG$ mit F, so ist der Inhalt derselben bekanntlich $=\frac{2}{3}OX.DX$, folglich

Digitized by Google

$$S=\frac{3}{2}F,$$

ein ebenfalls überraschend einfaches Resultat.

Herr Dr. Wittstein hat sehr richtig bemerkt, dass die spezielle, von ihm gestellte Aufgabe wegen ihres praktischen Interesses als Rechnungsbeispiel in technischen Anstalten dienen könne; man darf diese Bemerkung vielleicht auch auf die hier mitgetheilte allgemeinere Betrachtung ausdehnen, da sie keinerlei Schwierigkeiten des Calcüls darbietet und demjenigen, der die graphische Darstellung der quadrirten Flächenstücke mit Hülfe der descriptiven Geometrie versuchen will, zu mancher netten Zeichnung Gelegenheit giebt.

XVII.

Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erster Theil.

Die folgenden Betrachtungen bezwecken die Auflösung der Aufgabe: Durch 9 beliebig gegebene Punkte oder an 9 beliebig gegebene Ebenen mittels des Lineals allein eine Fläche des zweiten Grades zu legen, eine Aufgabe, welche mit der wiederholentlich vorgelegten Frage nach dem geometrischen Gesetze, welches zwischen 10 beliebigen Punkten einer Fläche des zweiten Grades stattfindet, wo nicht zusammenfällt, doch in sehr naher Verbindung steht. Die Vorbereitung hierzu ist grossentheils im zweiten Theile meiner Abhandlung über die geometrischen Verwandtschaften gegeben; doch wird es nöthig sein, einmal besondere Fälle einiger dort aufgestellter Lehrsätze noch ins Auge zu fassen, und sodann zu den Eigenschaften der

Digitized by Google

collinearen und reciproken Ebenen die der collinearen und reciproken räumlichen Strahlbüschel hinzuzufügen. Im Grunde sind letztere den ersteren coordinirt; denn denkt man sich im Raume zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, deren Achsen sich in einem Punkte D schneiden, oder aber zwei ebene Strahlbüschel B, B', deren Mittelpunkte in einem Punkte D liegen, so bestimmt einerseits ein jeder Strahl a des Punktes D zwei Ebenen α, α' von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, andererseits eine jede durch D gehende Ebene α zwei Strahlen a, a' von B, B', und umgekehrt; gibt man sich also

1) in einer Ebene $\mathfrak{E}$ zwei Strahlbüschel B, B' und in einem räumlichen Strahlbüschel D_1 zwei mit ersteren projektivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$;

2) in $\mathfrak{E}$ zwei Strahlbüschel B, B' und in D_1 zwei mit ersteren projektivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1'$;

3) in $\mathfrak{E}$ zwei Gerade A, A' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$;

4) in $\mathfrak{E}$ zwei Gerade A, A' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_1'$;

5) in einem räumlichen Strahlbüschel D zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und in einem zweiten räumlichen Strahlbüschel D_1 zwei mit ihnen projektivische Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$;

6) in D zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel B_1, B_1';

7) endlich in D zwei ebene Strahlbüschel B, B' und in D_1 zwei mit ihnen projektivische ebene Strahlbüschel B_1, B_1'; so erhält man ausser den früher behandelten drei Beziehungs-Systemen noch sieben neue, wo bezüglich

1) jedem Punkte von $\mathfrak{E}$ ein Strahl von D_1;
2) jedem Punkte von $\mathfrak{E}$ eine Ebene von D_1;
3) jeder Geraden von $\mathfrak{E}$ ein Strahl von D_1;
4) jeder Geraden von $\mathfrak{E}$ eine Ebene von D_1;
5) jedem Strahle von D ein Strahl von D_1;
6) jedem Strahle von D eine Ebene von D_1;
7) jeder Ebene von D eine Ebene von D_1

entspricht, und wo in demselben Sinne, wie dort, höhere und niedere Grade der Verwandtschaft zu unterscheiden sind.

Man kann aber auch die Verwandtschaften räumlicher Strahlbüschel mittels Projektion aus denen der Ebenen ableiten, und dieser Weg soll hier, wo er am Kürzesten zum Ziele führt, eingeschlagen werden.

Digitized by Google

§. 1.

Aufeinandergelegte reciproke und involutorische Ebenen.

Im achten Theile des Archivs S. 42. ist gezeigt worden, dass zwei beliebige reciproke Ebenen sich immer so aufeinander legen lassen, dass einem jeden Punkte derselben eine und dieselbe Gerade in doppeltem Sinne, und umgekehrt, entspricht, und so, dass bald gar keine, bald unzählige Punkte, welche bald eine Ellipse, bald eine Hyperbel bilden, auf ihren entsprechenden Geraden liegen, und man wird sogleich gesehen haben, dass nur in dem Falle, wenn die Mittelpunkte beider Ebenen unendlich entfernt sind, die Parabel hervortritt. Sowie nun früher zwei aufeinander gelegte projekt. Gerade, deren Durchschnitte der Parallelstrahlen, und zwei concentrische projekt Strahlbüschel, deren ungleichnamige Schenkel der entsprechenden rechten Winkel coincidiren, involutorisch genannt worden sind, so sollen auch zwei aufeinandergelegte reciproke Ebenen, deren Mittelpunkte sich decken und deren zug. Durchmesser eine Involution bilden, weil hier, wie dort, je zwei Elemente sich in doppeltem Sinne entsprechen, zwei **involutorische Ebenen** heissen; auch werden von jetzt an die vereinigten Mittelpunkte derselben der **Mittelpunkt**, die Achsen jener Involution die **Achsen** der Ebenen selbst, jeder Punkt derselben der **harmonische Pol** der ihm entsprechenden Geraden und letztere die **harmonische Polare** des ersteren, je zwei zug. Punkte einer Geraden und je zwei zug. Strahlen eines Punktes bezüglich **zugeordnete harmonische Pole und Polaren** dieser letzteren genannt, und diese Ausdrücke auch im allgemeinen Falle reciproker Ebenen, jedoch ohne das Beiwort „harmonisch" gebraucht werden.

Lehrsatz 1.

Zwei aufeinander gelegte reciproke Ebenen sind involutorisch, wenn irgend zwei Punkte, welche nicht, oder wenn irgend drei Punkte, welche auf ihren Polaren, aber nicht in gerader Linie, liegen, denselben in doppeltem Sinne entsprechen.

Beweis. Denn jede Gerade, welche durch einen jener beiden Punkte geht, schneidet dessen Polare in einem Punkte, welcher in doppeltem Sinne der zug. Pol des ersteren ist; also gilt das nämliche von je zwei zug. Polen dieser Geraden. Wird nun ein beliebiger Punkt a der Ebene mit jenen zwei Punkten durch zwei Gerade verbunden, so schneiden die beiden Polaren von a eine jede dieser Geraden in einerlei Punkte, fallen also zusammen. Und verbindet man die drei Punkte des Satzes durch zwei Gerade, so müssen diese zwei Durchschnitten der drei Polaren in doppeltem Sinne entsprechen, und es liegen nun diese zwei Durchschnitte nicht auf ihren Polaren.

Digitized by Google

Lehrsatz 2.

Werden zwei beliebige reciproke Ebenen involutorisch und zwar so gelegt, dass sie eine Ellipse erzeugen, und wird nun die eine dieser Ebenen um irgend einen Punkt der Ellipse, als festen Punkt, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herumgedreht, so gibt es ausser diesem Punkte keinen zweiten, welcher auf seiner Polare liegt, und die Ebenen sind dann nicht involutorisch; doch ist es nicht umgekehrt richtig, dass zwei reciproke Ebenen, welche diese letztere Lage zu einander haben, allemal durch Umdrehung in jene involutorische Lage gebracht werden können.

Beweis. Liegen die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ involutorisch und erzeugen eine Ellipse, und man legt durch einen beliebigen Punkt (ee_1) derselben die Tangente (ee_1) und ausserdem eine beliebige Gerade (AA_1), so ist erstere die harmonische Polare von (ee_1), letztere hat nothwendig mit der Ellipse einen zweiten Punkt ($\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1$) von endlicher Entfernung gemein, und die harmonische Polare (pp_1) ihres unendlich entfernten Punktes ($\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1$) hälftet die Strecke ef in einem Punkte ($\mathfrak{q}\mathfrak{q}_1$). Wird nun die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um den Punkt (ee_1) um zwei Rechte herumgedreht, so fällt e_1 wieder auf e, und A_1 wieder auf A, aber der Punkt (ee_1) liegt jetzt in der Mitte sowohl zwischen den Punkten $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, als auch zwischen $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}_1$. Die zug. Pole der Geraden (AA_1) bilden also zwei gleichliegende projektivische Gerade, zwischen deren Durchschnitten $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{q}_1$ der Parallelstrahlen mitteninne sich zwei solche Pole e, e_1 vereinigen; also können sich längs (AA_1) kein zweites Paar zug. Pole vereinigen, d. h. kein zweiter Punkt auf seiner Polare liegen; und da jeder Punkt der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ einem Strahle des Punktes (ee_1) angehört, so gibt es in denselben überhaupt keinen zweiten solchen Punkt. Setzt man dagegen statt der Ellipse eine Hyperbel oder Parabel, so bilden die zug. harm. Pole derjenigen Geraden, welche mit den Asymptoten oder mit der Achse der Parabel parallel laufen, ungleichliegende projektivisch-gleiche Gerade, und man erhält durch die Umdrehung zwei und bezüglich eine Gerade, deren sämmtliche Punkte auf ihren Polaren liegen.

Umgekehrt: enthalten zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ nur einen Punkt (ee_1), welcher auf seiner Polare liegt, so kann derselbe nicht zwei verschiedene Polaren besitzen, weil sonst einer jeden dieser letzteren, in anderem Sinne genommen, ein zweiter auf ihr liegender Punkt entsprechen müsste Entweder nun hat der unendlich entfernte Punkt der Geraden (ee_1) einerlei oder verschiedene Polaren. Im ersten Falle liegen die Mittelpunkte der Ebenen auf dieser Polare gleichweit von (ee_1) entfernt und fallen nach der Umdrehung zusammen, und da zugleich ein Paar zugeordnete Durchmesser sich in doppeltem Sinne entsprechen müssen, so bilden sämmtliche zug. Durchmesser eine Involution, und folglich sind die Ebenen involutorisch und erzeugen eine Ellipse. Im zweiten Falle dagegen fallen nach der Umdrehung die Mittelpunkte der Ebenen nicht zusammen, sondern in eine mit (ee_1) parallele Gerade; die zug. Pole eines jeden Strahles von (ee_1) bilden eine Involution von Punkten, und wird also (ee_1) der Berührungspol zweier sich os-

Digitized by Google

kulirender Kegelschnitte, von denen der eine diejenigen Geraden zu Tangenten hat, deren Pole auf ihnen und auf dem anderen Kegelschnitte liegen. Ueberhaupt lässt sich zeigen, dass zwei reciproke Ebenen auf unzählige Arten in diese letztere Lage gebracht werden können.

Dass endlich in den beiden gedachten Fällen die Ebenen nicht involutorisch sein können, geht einfach daraus hervor, dass ihre Mittelpunkte im ersten Falle erst nach der Umdrehung sich vereinigen, und im zweiten schon anfangs getrennt gewesen sind.

Lehrsatz 3.

Zwei reciproke Ebenen lassen sich immer so aufeinander legen, dass *a*) alle Punkte, welche auf ihre Polaren fallen, zwei geraden Linien, und ihre Polaren zwei Strahlbüscheln angehören, deren Mittelpunkte mit dem Durchschnitt dieser Linien in gerader Linie liegen; und dass *b*) alle jene Punkte einer einzigen Geraden, und ihre Polaren einem einzigen Strahlbüschel angehören; und zwar sind in beiden Fällen die Ebenen nicht involutorisch.

Beweis. *a*) Denn da eine Gerade und ein ebener Strahlbüschel, welche projektivisch sind, allemal perspektivisch gelegt werden können, so kann man die eine Ebene $\mathfrak{E}_1$ allemal so auf $\mathfrak{E}$ legen, dass die Punkte einer beliebigen Geraden A_1 auf ihre Polaren fallen. Es sei B der Pol von A_1, nach welchem diese Polaren gehen, so werden die Polaren aller Punkte derjenigen Geraden A, welche sich mit A_1 vereinigt, im Allgemeinen einen anderen Strahlbüschel B_1 bilden und durch diese Punkte gehen; und wiederum werden die Pole aller Strahlen des Punktes B_1', welcher mit B vereinigt ist, in einer neuen Geraden A' und ein jeder auf seiner Polare liegen, und die mit A' vereinigte Gerade A_1' muss dem mit B_1 vereinigten Punkte B' entsprechen. Die beiden Polaren des Durchschnittes von (AA_1) und $(A'A_1')$ gehen eine jede sowohl durch diesen Punkt, als auch durch die beiden Punkte (BB_1') und $(B'B_1)$, fallen also zusammen.

b) Man denke sich die Ebenen involutorisch und zwar so gelegt, dass sie eine Hyperbel erzeugen; so lässt sich allemal eine, ja, wenn dieselbe nicht gleichseitig ist, vier Tangenten ziehen, welche auf einer Asymptote senkrecht stehen. Durch den Berührungspunkt $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$ einer solchen Tangente lege man eine Gerade (AA_1) mit jener Asymptote parallel; so ist der Punkt (BB_1), in welchem die Tangente und Asymptote sich schneiden, der harmonische Pol von (AA_1), und die zug. harm. Pole dieser Geraden haben paarweise gleiche Abstände vom Punkte $(\mathfrak{e}\mathfrak{e}_1)$. Wendet man nun die Ebene $\mathfrak{E}_1$ um jene Tangente herum, so behaupten diese letztere, die Gerade A_1 und die Punkte $\mathfrak{e}_1$, B_1 nebst dem unendlich entfernten von A_1 ihre Stelle, alle übrigen Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$.... dieser letzteren aber fallen auf ihre zug. Pole $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.... und also auch auf ihre Polaren $B\mathfrak{a}$, $B\mathfrak{b}$, $B\mathfrak{c}$...., mit welchen gleichzeitig auch die Polaren $B_1\mathfrak{a}_1$, $B_1\mathfrak{b}_1$, $B_1\mathfrak{c}_1$.... von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.... sich vereinigen. Die Gerade (AA_1) entspricht also auch jetzt noch dem Punkte (BB_1) in doppeltem Sinne, zugleich aber auch jeder

Digitized by Google

Punkt ($\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$).... dem ihn treffenden Strahle von (BB_1). Ist nun $\mathfrak{p}$ irgend ein ausserhalb (AA_1) liegender Punkt, a der nach ihm gehende Strahl von (BB_1) und $\mathfrak{a}$ der Durchschnitt von a und (AA_1), so gehen die Polaren von $\mathfrak{p}$ beide durch $\mathfrak{a}$, können also nicht durch $\mathfrak{p}$ gehen, weil sie sonst mit a, und folglich $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}$ sich vereinigen müssten. Also liegen nur die Punkte von (AA_1) auf ihren Polaren. Denkt man sich endlich, dass die Ebenen auf irgend eine Weise die Lage *b*) erhalten haben, so überzeugt man sich mittels des ersten Theiles von Lehrsatz 1. sogleich, dass sie durch gehörige Umwendung involutorisch werden, dass die Gerade (AA_1) einer Asymptote der so entstehenden Hyperbel parallel wird, und daher die nun vereinigten Mittelpunkte der Ebenen vorher nicht vereinigt, die Ebenen also auch nicht involutorisch gewesen sein können.

Lehrsatz 4.

In zwei aufeinander gelegten reciproken Ebenen können nicht bloss zwei oder irgend eine grössere, aber beschränkte Anzahl von Punkten auf ihren Polaren liegen.

Beweis. Hat irgend ein solcher Punkt zwei besondere Polaren, so hat jede der letzteren, in anderem Sinne genommen, einen zweiten auf ihr liegenden Pol, dieser eine zweite Polare, diese einen neuen Pol und so ins Unendliche fort; es kann also höchstens von solchen Punkten die Rede sein, denen einerlei Gerade in doppeltem Sinne entspricht. Liegen nun drei derselben in gerader Linie, so müssen alle Punkte dieser Linie auf ihren Polaren liegen — und findet jenes nicht statt, so sind die Ebenen nach Lehrsatz 1. involutorisch und auf jeder durch einen dieser Punkte gehenden Geraden müssen sich zwei zug. harm. Pole derselben in einem neuen Punkte vereinigen, so dass also die Ebenen unzählige Punkte besitzen, die auf ihren Polaren liegen. Es erübrigt also nur noch der Fall von zwei solchen Punkten. Man denke sich durch diese Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, deren Verbindungslinie A sei, zwei Parallelen a, b gezogen; so werden die zug. Polare von a, und ebenso die von b, zwei gleichliegende projektivische Gerade bilden, weil nur in solchen es sich ereignen kann, dass ein einziges Paar entsprechende Punkte sich in $\mathfrak{a}$ ($\mathfrak{b}$) vereinigen, und nur in einem Falle, wenn a mit der Polare von $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, tritt der Umstand ein, dass alle Punkte der einen Geraden dem einzigen Punkte $\mathfrak{a}$ entsprechen. In allen anderen Fällen wird $\mathfrak{a}$, und ebenso $\mathfrak{b}$, in der Mitte zwischen den Durchschnitten der Parallelstrahlen, d. h. der Polaren des unendlich entfernten Punktes von a und b liegen, diese Polaren also in einem Punkte $\mathfrak{p}$ von A convergiren müssen. Nun aber haben die Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ein jeder nur eine einzige Polare, also die Gerade A auch nur einen einzigen Pol B; die beiden Polaren von $\mathfrak{p}$ gehen sowohl durch B, als auch nach dem unendlich entfernten Punkte von a, b; sie fallen also in eine einzige p zusammen. Die Ebenen besitzen also zwei Punkte B und $\mathfrak{p}$, welche nicht auf ihren Polaren liegen und denselben in doppeltem Sinne entsprechen, sind also nach Lehrs. 1. involutorisch und besitzen unzählige Punkte wie $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$.

Digitized by Google

Aus den drei letzten Lehrsätzen ergiebt sich nun mit aller Strenge:

Lehrsatz 5.

In zwei aufeinandergelegten reciproken Ebenen gibt es entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte, welche auf ihren Polaren liegen; und diese Punkte bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder eine einzige Gerade.

Lehrsatz 6.

In zwei involutorischen Ebenen gibt es entweder keinen oder unzählige Punkte, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Punkte bilden allemal einen Kegelschnitt, dessen Tangenten ihre Polaren sind.

Die im vierten Theile des Archivs S. 273 und 276 enthaltenen Sätze gelten auch von den zug. Durchmessern, Achsenpunkten und den Brennpunkten zweier involutorischer Ebenen, und zwar nicht bloss, wenn sie einen Kegelschnitt erzeugen, sondern auch wenn dieses nicht der Fall ist. Da dieselben später zur Entwickelung ganz ähnlicher Eigenschaften der reciproken Stahlbüschel dienen sollen, welche letzteren für die Theorie der Flächen des zweiten Grades von äusserster Wichtigkeit sind, so soll hier der Beweis für den noch nicht betrachteten Fall nachgeholt werden.

Es sei in Taf. V. Fig. 1. M der Mittelpunkt der beiden Ebenen; $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}_1$ seien diejenigen zwei zug. harm. Pole (ideale Scheitel) der einen Achse, welche gleichen Abstand vom Mittelpunkte M der Involution haben; so ist $M\mathfrak{s}=A$ die halbe Länge dieser Achse, und es sei B die auf ähnliche Weise zu nehmende halbe Länge der anderen Achse; die im Punkte $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ senkrechte Gerade s ist die harm. Polare des anderen Punktes $\mathfrak{s}_1$. Sind nun $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ irgend zwei zug. Durchmesser der Ebenen, welche die s in $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ schneiden, so geht die harm. Polare von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{s}_1$ und ist mit $M\mathfrak{a}_1$ parallel, und die harm. Polare von $\mathfrak{a}_1$ geht auch durch $\mathfrak{s}_1$ und ist mit $M\mathfrak{a}$ parallel; erstere schneide die $M\mathfrak{a}$ in α_1 und die andere Achse in $\mathfrak{b}_1$, letztere die $M\mathfrak{a}_1$ in α und dieselbe Achse in $\mathfrak{b}$; so ist $M\mathfrak{b} \# \mathfrak{s}\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{b}_1 \# \mathfrak{s}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$; und da die harm. Polare von $\mathfrak{b}_1$ durch $\mathfrak{a}$ gehen und senkrecht auf $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$ stehen muss, so sind $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$ zug. harm. Pole der anderen Achse, und folglich $M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1=B^2$. Sind endlich A_1, B_1 die halben Längen der Durchmesser $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$, d. h. der gegenseitigen Abstände derjenigen zug. harm. Pole dieser Durchmesser, welche vom Punkte M gleichweit entfernt sind, so ist, weil $\mathfrak{a}$, α_1 und $\mathfrak{a}_1$, α zug. harm. Pole derselben sind, $M\mathfrak{a}.M\alpha_1=A_1{}^2$, $M\mathfrak{a}_1.M\alpha=B_1{}^2$. Aus den Proportionen

$$M\mathfrak{a}:M\alpha_1=\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1:M\mathfrak{b}_1 \text{ und } M\mathfrak{a}_1:M\alpha=\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1:M\mathfrak{b}$$

ergibt sich nun

$$M\mathfrak{a}.M\alpha_1=A_1{}^2=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1};\quad M\mathfrak{a}_1.M\alpha=B_1{}^2=\frac{M\mathfrak{a}_1{}^2.M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1};\quad (1)$$

Digitized by Google

also ist

$$A_1^2+B_1^2=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{b}_1+M\mathfrak{a}_1^2.M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{(M\mathfrak{s}^2+\mathfrak{a}\mathfrak{s}^2)M\mathfrak{b}_1+(M\mathfrak{s}^2+\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}^2)M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}$$

$$=\frac{M\mathfrak{s}^2(M\mathfrak{b}_1+M\mathfrak{b})+M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1(M\mathfrak{b}+M\mathfrak{b}_1)}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=M\mathfrak{s}^2+M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1,$$

oder

$$A_1^2+B_1^2=A^2+B^2. \qquad (2)$$

Sind α, α_1, φ die Winkel, welche $M\mathfrak{a}$, $M\mathfrak{a}_1$ mit $M\mathfrak{s}$ und mit einander bilden, so ist

$$M\mathfrak{s}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.\sin\varphi \text{ und } A_1^2.B_1^2=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{a}_1^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^2}.M\mathfrak{b}.M\mathfrak{b}_1$$

$$=\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{a}_1^2.B^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1^2};\text{ also } A_1.B_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.B$$

$$=\frac{M\mathfrak{s}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1.B}{\sin\varphi};\ A_1.B_1.\sin\varphi=A.B; \qquad (3)$$

$$\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}}.\frac{M\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}}:\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}_1}.\frac{M\mathfrak{s}}{M\mathfrak{a}_1}=\sin\alpha.\cos\alpha:\sin\alpha_1.\cos\alpha_1=$$

$$\sin 2\alpha:\sin 2\alpha_1=\frac{M\mathfrak{a}_1^2}{M\mathfrak{a}^2}.\frac{\mathfrak{a}\mathfrak{s}}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{s}}=\frac{M\mathfrak{a}_1^2.M\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}:\frac{M\mathfrak{a}^2.M\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=B_1^2:A_1^2,$$

also

$$A_1^2:B_1^2=\sin 2\alpha_1:\sin 2\alpha. \qquad (4)$$

In Taf. V. Fig. 2. seien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ irgend zwei zug. harm. Pole (Achsenpunkte) der Achse $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$; a_1 die harm. Polare von $\mathfrak{a}$; $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_1$ die vom Mittelpunkte M gleichweit entfernten zug. harm. Pole der anderen Achse; t_1 die harm. Polare von $\mathfrak{t}$, welche a_1 in $\mathfrak{b}_1$ schneidet: b, b_1 die von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}_1$ gehenden Geraden, und α, α_1 die Winkel, welche sie mit $\mathfrak{s}\mathfrak{s}_1$ bilden; so liegt der harm. Pol von b auf den harm. Polaren von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{t}$, also in $\mathfrak{b}_1$; folglich sind b, b_1 zwei zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$. Nennt man endlich denjenigen Winkel, welchen die gleichweit von $M\mathfrak{s}$ abstehenden zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$ einschliessen, den diesem Punkte zugehörigen Achsenpunktwinkel, bezeichnet die Hälfte desselben mit A_1 und die des dem Punkte $\mathfrak{a}_1$ zugehörigen mit B_1, so ist

$$\operatorname{tng}\alpha.\operatorname{tng}\alpha_1=\operatorname{tng}^2 A_1=\frac{MA}{M\mathfrak{a}}.\frac{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{B^2}{M\mathfrak{a}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1},$$

und ebenso

$$\operatorname{tng}^2 B_1=\frac{B^2}{M\mathfrak{a}_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}; \qquad (1)$$

also

$$\operatorname{tng}^2 A_1+\operatorname{tng}^2 B_1=\frac{B^2}{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}\left(\frac{1}{M\mathfrak{a}}+\frac{1}{M\mathfrak{a}_1}\right)=\frac{B^2.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}{M\mathfrak{a}.M\mathfrak{a}_1.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}=\frac{B^2}{A^2}; \qquad (2)$$

Digitized by Google

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \,.\, \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{B^2 . B^2}{M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2} = \frac{B^2 . B^2}{A^2 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1{}^2};$$

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \frac{B^2}{A}; \qquad (3)$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 ; \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{B^2}{M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} : \frac{B^2}{M\mathfrak{a}_1 . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1} = M\mathfrak{a}_1 : M\mathfrak{a}. \qquad (4)$$

Setzt man in (1) $\operatorname{tng} A_1 = 1$ oder $A_1 = 45^0$, so ist

$$M\mathfrak{a} . \mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = B^2 = M\mathfrak{a}^2 + M\mathfrak{a} . M\mathfrak{a}_1 = M\mathfrak{a}^2 + A^2,$$

also

$$M\mathfrak{a}^2 = B^2 - A^2. \qquad (5)$$

In diesem Falle aber bilden die zug. harm. Polaren des Punktes $\mathfrak{a}$ eine Involution der rechten Winkel, und $\mathfrak{a}$ heisst dann ein Brennpunkt der involutorischen Ebenen; also besitzen die letzteren auch, wenn sie keinen Kegelschnitt erzeugen, zwei Brennpunkte, welche aber der kleineren Achse angehören, u. s. w.

§. 2.

Projektivische Ebenen und räumliche Strahlbüschel.

Sind im Raume irgend eine Ebene $\mathfrak{E}$ und ein Punkt D gegeben, so geht nach jedem Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.... von $\mathfrak{E}$ ein bestimmter Strahl a, b, c, d.... von D, und nach jeder Geraden a, b, c, d.... von $\mathfrak{E}$ eine bestimmte Ebene $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.... von D (insbesondere nach der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}$ eine Parallelebene von D), und man erhält so einen räumlichen Strahlbüschel D, worin jeder ebene Strahlbüschel $\mathfrak{B}$ mit einer Geraden A, und jeder Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ mit einem ebenen Strahlbüschel B von $\mathfrak{E}$, in Ansehung der sich treffenden Elementenpaare, perspektivisch ist. Ein solcher Strahlbüschel D heisst daher selbst mit der Ebene $\mathfrak{E}$, in Ansehung jener Elementenpaare, perspektivisch, und es sollen auch zwei Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$, welche mit einerlei räumlichen Strahlbüschel D, und andererseits zwei räumliche Strahlbüschel D, D_1, welche mit einerlei Ebene $\mathfrak{E}$ perspektivisch sind, unter sich, in Ansehung der sich entsprechenden Elementenpaare, perspektivisch heissen und diese Eigenschaft durch

$$\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) \equiv D(a, b, c, d....) \text{ oder}$$
$$\mathfrak{E}(a, b, c, d....) \equiv D(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) \text{ oder}$$
$$\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}.... a, b....) \equiv D(a, b.... \alpha, \beta);$$
$$\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) \equiv \mathfrak{E}_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) \text{ und so fort}$$

bezeichnet werden.

In zwei perspektivischen Ebenen $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1$ heissen diejenigen zwei Geraden r, q_1, welche den unendlich entfernten Geraden r_1, q

Digitized by Google

von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ entsprechen, die Durchschnitte der Parallelebenen oder auch die Achsen beider Ebenen. Im Durchschnitte (ee_1) zweier perspektivischen Ebenen sind allemal zwei entsprechende projektivisch-gleiche Gerade vereinigt, und je zwei entsprechende Gerade, welche mit (ee_1) parallel sind, sind projektivisch-ähnlich, ausgenommen ein einziges Paar, welche ebenfalls gleich, aber ungleichliegend sind, nämlich diejenigen, in deren Mitte der Projektionspunkt D liegt. Diejenige Ebene von D, welche auf (ee_1) senkrecht ist, schneidet $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in zwei Geraden, welche auf (ee_1) senkrecht stehen, und derjenige Strahl s von D, welcher diese Geraden unter gleichen inneren Winkeln schneidet, bestimmt in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ zwei Punkte, deren entsprechende Strahlenpaare zwei projektivisch-gleiche Strahlbüschel bilden. Es gibt zwei Strahlen s und folglich auch zwei Paar solche Strahlbüschel u. s. w. (vergl. Arch. Thl. 8. S. 10.). Ueberhaupt geht unmittelbar aus der Erklärung der Collineation hervor, dass zwei perspektivische Ebenen jedesmal auch collinear sind. Liegt ihr Projektionspunkt unendlich entfernt, so sind sie affin und insbesondere gleich, wenn zugleich die mit (ee_1) parallelen Projektionsebenen die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ unter gleichen inneren Flächenwinkeln schneiden; ähnlich dagegen, wenn der Projektionspunkt eine endliche Entfernung und die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ eine parallele Lage haben; und endlich congruent, wenn letztere parallel und ersterer entweder unendlich entfernt ist oder zwischen beiden Ebenen mitteninne liegt.

Aber auch umgekehrt lässt sich behaupten:

Lehrsatz 7.

Zwei collineare Ebenen lassen sich allemal auf unzählige Weisen in perspektivische Lage bringen.

Beweis. Denn legt man sie so im Raume, dass das eine Paar ihrer entsprechenden projektivisch-gleichen Geraden und deren entsprechende Punkte sich vereinigen, und sind B, B_1 irgend zwei andere entsprechende Punkte, so schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen dieser Punkte im Durchschnitte der Ebenen, sie sind also perspektivisch, d. h. alle diesen Strahlen angehörige entsprechenden Punktenpaare liegen mit einerlei Punkte der Geraden BB_1 in gerader Linie. Folglich convergiren sämmtliche Verbindungslinien entsprechender Punktenpaare beider zunächst schaarenweise in besonderen Punkten von BB_1; aus demselben Grunde aber auch in den Punkten jeder anderen Geraden, welche zwei entsprechende Punkte verbindet; also convergiren alle in einem und demselben Punkte D.

Weit schwieriger wird sich der Beweis für den analogen Fall räumlicher Strahlbüschel zu Stande bringen lassen, und diess hat seinen Grund darin, dass vier gegeneinander feste Strahlen eines Punktes D im Raume sich nicht allemal so legen lassen, dass sie vier beliebig gegebene Punkte einer Ebene $\mathfrak{E}$ treffen.

Lehrsatz 8.

In zwei perspektivischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal entweder zwei Paar entsprechende pro-

Digitized by Google

jektivisch-gleiche ebene Strahlbüschel und zwei Paar entsprechende projektivisch-gleiche Ebenenbüschel, oder es gibt von beiden Arten nur eines oder unzählige Paare.

Beweis. *a*) Steht der gemeinschaftliche Strahl von D, D_1 schief auf dem perspektivischen Durchschnitte $\mathfrak{E}$, so wird das eine Paar der ersten Art von den beiden Parallelebenen gebildet, das andere von denjenigen zwei Ebenen, welche man erhält, wenn man senkrecht auf den gem. Strahl in der Mitte desselben eine Ebene errichtet und nach der Geraden, worin diese Ebene die $\mathfrak{E}$ schneidet, durch D, D_1 zwei Ebenen legt, was sich aus der Congruenz ebener Dreiecke ergibt. Das eine Paar der anderen Art wird von den gemeinschaftlichen Ebenen beider Strahlbüschel gebildet, und die Achsen des anderen erhält man, wenn man aus D, D_1 zwei Senkrechte DA, D_1A_1 auf $\mathfrak{E}$ fällt, den Abstand AA_1 ihrer Fusspunkte im Verhältniss von $DA:D_1A_1$ in einem Punkte M theilt, und die Geraden DM, D_1M zieht. Denn ist BMB_1 irgend ein in $\mathfrak{E}$ liegender Strahl des Punktes M, dessen Theile MB, MB_1 auf verschiedenen Seiten der Linie AA_1 liegen, so sind in den rechtwinkligen Dreikanten $M(DAB)$ und $M(D_1A_1B_1)$ die Winkel $DMA = D_1M_1A_1$, weil $\frac{DA}{MA} = \frac{D_1A_1}{MA_1}$; ferner die Scheitelwinkel $AMB = A_1MB_1$; also sind auch die Flächenwinkel $A(MD)B = A_1(MD_1)B_1$ u. s. w. *b*) Steht der gem. Strahl senkrecht auf $\mathfrak{E}$, so fallen die zweiten Paare mit den ersten zusammen; und *c*) liegt ausserdem die Ebene $\mathfrak{E}$ in der Mitte zwischen D und D_1, oder ist dieselbe unendlich entfernt, so gibt es unzählige Paare von beiden Arten.

Lehrsatz 9.

In zwei perspektivischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder nur ein einziges Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. wo drei zueinander senkrechten Strahlen des einen drei ebensolche Strahlen des anderen entsprechen, oder es gibt unzählige solche Paare, welche eine Kante gemein haben, oder es gibt unzählige beliebige, d. h. jedem normalen gleichseitigen Dreikant des einen entspricht ein ebensolches des anderen Strahlbüschels.

Beweis. *a*) Der gem. Strahl DD_1 stehe schief auf $\mathfrak{E}$. Legt man durch D, D_1 eine Ebene senkrecht auf $\mathfrak{E}$, so liegen in dieser Ebene zwei entsprechende ebene Strahlbüschel; die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel dieser letzteren bilden zwei Paar entsprechende Kanten r, r_1; t, t_1, und diejenigen zwei Strahlen s, s_1, welche auf jener Ebene senkrecht stehen, bilden das dritte Paar Kanten der in Rede stehenden Dreikante. Denkt man sich nun, die Kanten a, b, c und a_1, b_1, c_1 eines neuen Paares entsprechender normaler gleichseitiger Dreikante schnitten die Ebene $\mathfrak{E}$ in den Punkten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, so seien γ, β, α, M die Mittelpunkte der Strecken $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{ac}$, $\mathfrak{bc}$, DD_1; weil nun Winkel $\mathfrak{a}D\mathfrak{b} = \mathfrak{a}D_1\mathfrak{b} = R$, so wäre die Strecke $D\gamma = \mathfrak{a}\gamma = \mathfrak{b}\gamma = D_1\gamma$, also $M\gamma$, und aus demselben Grunde auch $M\beta$, $M\alpha$, senkrecht auf

Digitized by Google

DD_1; folglich müssten $M\gamma$, $M\beta$, $M\alpha$ in einer Ebene, und die Punkte γ, β, α in einer Geraden liegen, was nur dann möglich ist, wenn einer der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, z. B. $\mathfrak{c}$, unendlich entfernt ist. Dann aber wäre $c \parallel c_1$, die Ebenen $D\mathfrak{ab}$, $D_1\mathfrak{ab}$, beide senkrecht auf $\mathfrak{E}$, würden also, da durch DD_1 nur eine senkrechte Ebene auf $\mathfrak{E}$ gefällt werden kann, mit der vorhin gedachten Ebene, und die neuen Dreikante mit den früheren zusammenfallen. *b*) Steht DD_1 senkrecht auf $\mathfrak{E}$, so bilden je zwei rechtwinklige und mit $\mathfrak{E}$ parallele Strahlen nebst DD_1 ein normales gleichseitiges Dreikant, welchem ein gleiches im anderen Strahlbüschel entspricht; und *c*) liegt $\mathfrak{E}$ mitteninne zwischen D, D_1 oder ist unendlich entfernt, so gibt es unzählige beliebige solche Dreikante.

Erklärungen.

Eine Ebene und ein räumlicher Strahlbüschel heissen collinear oder reciprok, wenn eine zweite Ebene mit der ersteren bezüglich collinear oder reciprok und mit dem letzteren (in Ansehung der betreffenden Elementenpaare) perspektivisch ist.

Zwei räumliche Strahlbüschel heissen collinear oder reciprok, wenn bezüglich entweder beide mit derselben Ebene collinear oder beide reciprok, oder aber der eine mit einer Ebene collinear, der andere mit derselben Ebene reciprok ist.

Ohne weitere Erläuterung wird man nun die folgenden Sätze für richtig befinden.

Lehrsatz 10.

In zwei collinearen räumlichen Strahlbüscheln entspricht jedem ebenen Strahlbüschel des einen ein demselben projektivischer ebener Strahlbüschel des anderen, und jedem Ebenenbüschel des ersten ein demselben projektivischer Ebenenbüschel des letzten; und umgekehrt.

Zusatz. Zwei räumliche Strahlbüschel, deren Strahlen paarweise gleiche Winkel einschliessen, sind collinear, und jenachdem dieselben congruent oder symmetrisch sind, sollen sie gleichliegend oder ungleichliegend gleich heissen.

Lehrsatz 11.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln entspricht einem jeden ebenen Strahlbüschel des einen ein demselben projektivischer Ebenenbüschel des anderen, und einem jeden Ebenenbüschel des ersten ein demselben projektivischer ebener Strahlbüschel des letzten; und umgekehrt.

Zusatz. Können zwei räumliche Strahlbüschel so gelegt werden, dass einem jeden Strahle des einen eine gegen ihn senkrechte Ebene des anderen entspricht, so gilt dasselbe auch gegenseitig, und jedem ebenen Strahlbüschel des einen entspricht ein demselben projektivisch-gleicher Ebenenbüschel des anderen; dieselben sind

Digitized by Google

daher in jeder beliebigen Lage reciprok, und zwar sollen sie gleiche reciproke räumliche Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 12.

Ist bei irgend einer Anzahl n Gebilden — Ebenen und räumliche Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, der Reihe nach jedes Gebilde mit dem darauf folgenden collinear oder reciprok, so ist jedes mit jedem und namentlich auch das erste mit dem letzten collinear oder reciprok.

Lehrsatz 13.

In zwei concentrischen collinearen räumlichen Strahlbüscheln müssen sich allemal wenigstens ein Paar entsprechende Strahlen und ein Paar entsprechende Ebenen vereinigen.

Beweis nach Seite 25, 1. des 8ten Thls. des Archivs mittels zweier aufeinandergelegten Ebenen, deren eine mit dem einen, die andere mit dem anderen räumlichen Strahlbüschel perspektivisch ist.

Lehrsatz 14.

In zwei beliebig liegenden collinearen räumlichen Strahlbüscheln sind wenigstens ein Paar entsprechende Strahlen und ein Paar entsprechende Ebenen parallel.

Beweis nach dem vorigen Satze mittels eines dritten Strahlbüschels, welcher mit dem einen concentrisch ist und dessen Strahlen denen des anderen parallel sind.

Lehrsatz 15.

In zwei collinearen räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal ein Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. drei zu einander rechtwinkligen Strahlen des einen entsprechen drei eben solche Strahlen im anderen.

Beweis. Es seien D, D_1 irgend zwei collineare räumliche Strahlbüschel, nämlich

$$D(a, b, c, d....) = D_2(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

man denke sich einen mit D_1 concentrischen räumlichen Strahlbüschel D_2, dessen Ebenen α_2. β_2, γ_2, δ_2.... auf den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... des ersteren senkrecht stehen; rechne jetzt diese Ebenen auch zu D_1 und denke sich die denselben in D entsprechenden Ebenen α, β, γ, δ....; endlich denke man sich einen mit D concentrischen Strahlbüschel D', dessen Strahlen a', b', c', d'.... auf den Ebenen α, β, γ, δ.... senkrecht stehen; so ist, weil nach Lehrsatz 11. Zusatz. die Strahlbüschel D_1 und D_2, D und D' reciprok sind:

Digitized by Google

$$D(a, b, c, d....) = D_1(a_1, b_1, c_1, d_1....) = D_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2....) = D_1(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2....) = D(\alpha, \beta, \gamma, \delta.....) = D'(a', b', c', d'.....),$$

also auch

$$D(a, b, c, d....) = D'(a', b', c', d'....).$$

So oft nun in diesen letzten Strahlbüscheln D, D' zwei entsprechende Strahlen e, e' sich vereinigen, muss die zu D gehörige, auf (ee') senkrechte Ebene ε in D_1 einer Ebene ε_2 entsprechen, welche auf einem Strahle e_1 dieses Strahlbüschels senkrecht steht, der seinerseits wieder jenem ersten Strahle e oder (ee') von D entspricht. Nun aber gibt es nach Lehrsatz 13. allemal ein Paar solche Strahlen e, e'; also gibt es in den Strahlbüscheln D, D_1 auch allemal zwei sich entsprechende Strahlen, welche auf zwei Ebenen senkrecht stehen, die sich ebenfalls entsprechen. Die diesen Ebenen angehörigen entsprechenden projektivischen Strahlbüschel aber enthalten allemal zwei entsprechende rechte Winkel; also bilden die Schenkel des einen dieser Winkel mit dem auf ihrer Ebene senkrechten Strahle ein normales gleichseitiges Dreikant, welchem ein ebensolches Dreikant im anderen Strahlbüschel entspricht.

Die entsprechenden Kanten und Seiten dieser beiden Dreikante sollen die entsprechenden drei Paar Normalstrahlen und die entsprechenden drei Paar Normalebenen der collinearen räumlichen Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 16.

Zwei collineare räumliche Strahlbüschel lassen sich allemal und zwar auf unzählige Weisen in perspektivische Lage bringen; doch fallen in jeder dieser Lagen immer nur ein bestimmtes Paar entsprechende Normalebenen aufeinander.

Beweis. Es seien D, D_1 (Taf. V. Fig. 3.) irgend zwei collineare räumliche Strahlbüschel, deren Mittelpunkte eine beliebig gewählte feste Lage haben; r, r_1; s, s_1; t, t_1 seien die entsprechenden drei Paar Normalstrahlen; und ϱ, ϱ_1; σ, σ_1; τ, τ_1 die denselben gegenüberliegenden entsprechenden drei Paar Normalebenen. Man denke sich beide Strahlbüschel so gedreht, dass ein Paar dieser Ebenen, z. B. ϱ, ϱ_1, sich vereinigen, und sodann wieder den einen der in $(\varrho\varrho_1)$ liegenden entsprechenden ebenen Strahlbüschel dergestalt um seinen festen Mittelpunkt D_1 gedreht, dass irgend zwei entsprechende Strahlen r', r_1' derselben mit der Verbindungslinie der festen Punkte D, D_1 zusammenfallen. Diess vorausgesetzt, so müssen diese ebenen Strahlbüschel perspektivisch sein, und sämmtliche entsprechende Ebenenpaare von D, D_1, welche durch die parallelen Strahlen r, r_1 gehen, werden sich in lauter mit r, r_1 parallelen Geraden, welche auf dem perspektivischen Durchschnitt jener ebenen Strahlbüschel, also in einer Ebene $\mathfrak{E}$ liegen, durchschneiden. Kann man nun zeigen, dass ausser r, r_1 noch irgend ein zweites Paar entsprechende Strahlen, welche nicht auf der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ liegen, sich in einem Punkte schneiden, oder dass ausser den Ebenen $r'r$ und $r_1'r_1$, ϱ und ϱ_1

Digitized by Google

noch irgend ein Paar entsprechende sich vereinigen, so werden, da zwei proj. Ebenenbüschel durch drei Paar entsprechende Ebenen bestimmt sind, je zwei entsprechende Ebenen, welche durch den Strahl DD_1 gehen, sich vereinigen, und demnach je zwei entsprechende Strahlen von D, D_1 sich in der Ebene 𝕰 schneiden müssen.

Zu dieſem Behufe denke man sich durch den Strahl r' eine Ebene gelegt, welche die Ebenen σ, τ in den Strahlen s', t' schneidet, und durch r_1' die der ersteren entsprechende Ebene, welche die Ebenen σ_1, τ_1 in den entsprechenden Strahlen s_1', t_1' schneidet. Jetzt bestimme man auf der Geraden DD_1 zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ dergestalt, dass

$$\frac{D\mathfrak{p}}{D_1\mathfrak{p}}=\frac{D\mathfrak{q}}{D_1\mathfrak{q}}=\frac{\cot sr'}{\cot s_1r_1'},$$

und errichte in diesen Punkten in der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ auf DD_1 zwei Senkrechte p, q. Ferner bestimme man auf DD_1 zwei andere Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ so, dass

$$\frac{D\mathfrak{m}}{D_1\mathfrak{m}}=\frac{D\mathfrak{n}}{D_1\mathfrak{n}}=\frac{\cot st'}{\cot s_1t_1'},$$

und beschreibe in der Ebene $(\varrho\varrho_1)$ über der Strecke $\mathfrak{mn}$ als Durchmesser einen Kreis K. Es sind nun bloss drei Fälle möglich: *a*) die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ schliessen die Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ ein, und die Geraden p, q schneiden den Kreis K; *b*) die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ werden von den Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ eingeschlossen, und die Geraden p, q schneiden K nicht; *c*) die Punktenpaare $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ schliessen sich gegenseitig aus, und die Geraden p, q schneiden K nicht; denn der Fall, dass $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ mit $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ zusammenfallen, lässt sich immer durch eine andere Wahl der Strahlen t', t_1' vermeiden. Man bemerke hierbei, dass sowohl $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ als $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit den Punkten D, D_1 harmonisch sind.

a) Es schneide p den Kreis K in $\mathfrak{s}$; so denke man sich die in $(\varrho\varrho_1)$ liegenden ebenen Strahlbüschel (und zugleich die räumlichen Strahlbüschel selbst) so lange um die Punkte D, D_1 gedreht, bis die Strahlen s, s_1 durch den Punkt $\mathfrak{s}$ gehen; dann ist

$$\frac{\cot \mathfrak{p}D\mathfrak{s}}{\cot \mathfrak{p}D_1\mathfrak{s}}=\operatorname{tng}\mathfrak{p}Dt.\operatorname{tng}\mathfrak{p}D_1s_1=\frac{\mathfrak{p}D}{\mathfrak{ps}}:\frac{\mathfrak{p}D'}{\mathfrak{ps}}$$
$$=\frac{D\mathfrak{p}}{D_1\mathfrak{p}}=\frac{\cot sr'}{\cot s_1r_1'}=\operatorname{tng}tr'.\operatorname{tng}s_1r_1'.$$

Aber $\operatorname{tng}tr'.\operatorname{tng}s_1r_1'$ ist das Produkt der Tangenten der Winkel, welche zwei entsprechende Strahlen der gedachten ebenen Strahlbüschel mit zwei ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel einschliessen, und diess ist nach Archiv Thl. IV. S. 250. 6. constant; also werden durch diese letzte Drehung längs der Geraden DD_1 wiederum zwei entsprechende Strahlen vereinigt.

Nach einem bekannten Satze hat jeder Punkt $\mathfrak{s}$ des Kreises K die Eigenschaft, dass

Digitized by Google

$$\frac{Ds}{D_1s}=\frac{Dm}{D_1m}=\frac{Dn}{D_1n}=\frac{\cot st'}{\cot s_1t_1'},$$

also ist

$$Ds\,.\,\mathrm{tng}\,st'=D_1s\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'.$$

Die den Ebenen τ, τ_1 gemeinsame Gerade steht im Punkte s auf $(\varrho\varrho_1)$ senkrecht, und sind nun t', t_1' die Punkte, wo diese Gerade von den Strahlen t', t_1' geschnitten wird, so ist $st'=Ds\,.\,\mathrm{tang}\,st'$ $=D_1s\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'=st_1'$; entweder also schneiden sich die Strahlen t', t_1' in einem Punkte jener Geraden, oder die Punkte t', t_1' liegen auf verschiedenen Seiten von s gleichweit davon entfernt; im letzten Falle aber bilden die Ebenen $Dt'D_1$, $Dt_1'D_1$ gleiche Winkel mit $(\varrho\varrho_1)$; man kann also den räumlichen Strahlbüschel D_1 dergestalt um seinen Mittelpunkt drehen, dass drei Paar entsprechende Ebenen, nämlich ϱ und ϱ_1, rDp und r_1D_1p, $Dt'D_1$ und $Dt_1'D_1$ sich decken. Folglich sind die räumlichen Strahlbüschel D, D_1 in beiden Fällen perspektivisch.

b) Werden die Punkte m, n von den Punkten p, q eingeschlossen, so denke man sich die Strahlbüschel D, D_1 so gedreht, dass jetzt die Ebenen τ, τ_1 zusammenfallen und die Strahlen t', t_1' sich längs DD_1 vereinigen, und lasse jetzt die Strahlen s, s_1 dieselbe Rolle wie früher, und die Strahlen r', r_1' diejenige der Strahlen t', t_1' spielen. Dann aber vertauschen die Winkel sr' und st', s_1r_1' und s_1t_1' gegenseitig ihre Rollen, und folglich die nunmehrigen Punkte p, q und m, n bezüglich mit den früheren Punkten m, n und p, q ihre Stellen; der neue Kreis K wird also von den neuen Geraden p, q geschnitten, und folglich lassen sich die Strahlbüschel D, D_1 perspektivisch legen.

c) Schliessen die Punktenpaare m, n und p, q sich gegenseitig aus, so muss, wenn z. B. die Strecke Dq kleiner als D_1q ist, dagegen Dn grösser als D_1n sein, folglich

$$\mathrm{W.}\ sr'>\mathrm{W.}\ s_1r_1'\ \text{und}\ \mathrm{W.}\ st'<s_1t_1',$$

wo immer nur spitze Winkel zu verstehen sind. Ist nun in Taf. V Fig. 4. rst ein normales gleichseitiges sphärisches Dreieck, dessen Seiten von einem grössten Kreise der Kugel in den Punkten r', s', t' geschnitten werden, so ist bekanntlich

$$\mathrm{tng}\,st'r'\,.\,\sin st'=\mathrm{tng}\,sr'\ \text{und}\ \mathrm{tng}\,rt's'\,.\,\sin rt'=\mathrm{tng}\,rs'$$

oder

$$\mathrm{tng}\,st'r'\,.\,\cos st'=\mathrm{tng}\,rs',$$

also

$$\mathrm{tng}\,sr'=\mathrm{tng}\,rs'\,.\,\mathrm{tng}\,st'.$$

Verbindet man hiermit noch

$$\mathrm{tng}\,s_1r_1'=\mathrm{tng}\,r_1s_1'\,.\,\mathrm{tng}\,s_1t_1'$$

und nimmt, was offenbar erlaubt ist, die jetzige Bezeichnung im Sinne der früheren, so sieht man, dass, wenn

$$\mathrm{W.}\ sr'>\mathrm{W.}\ s_1r_1'\ \text{und}\ \mathrm{W.}\ st'<\mathrm{W.}\ s_1t_1'$$

Digitized by Google

ist, dann nothwendig W. $rs' > $ W. r_1s_1' sein muss, während auch

$$W.\ rt' > W.\ r_1t_1'$$

ist. Auch bemerke man, dass dann der stumpfe W. ts' grösser als der stumpfe t_1s_1', also der spitze W. ts' kleiner als der spitze t_1s_1' und zugleich W. $tr' <$ W. t_1r_1' ist.

Können also im Falle *c*) die Strahlbüschel D, D_1 nicht perspektivisch werden, so lange man die Ebenen ϱ, ϱ_1 oder τ, τ_1 sich decken lässt, so müssen sie es nothwendig werden, wenn die Ebenen σ, σ_1 sich decken.

Und umgekehrt: sind dieselben der genannten Lage fähig, indem die Ebenen ϱ, ϱ_1 sich decken, so ist nothwendig der Fall *a*) vorhanden, also

$$W.\ sr' \gtrless W.\ s_1r_1' \text{ und zugleich } W.\ st' \gtrless W.\ s_1t_1';$$

$$W.\ tr' \lessgtr W.\ t_1r_1' \quad \text{„} \quad \text{„} \quad W.\ ts' \lessgtr W.\ t_1s_1';$$

$$W.\ rs' \gtrless W.\ r_1s_1' \quad \text{„} \quad \text{„} \quad W.\ rt' \lessgtr W.\ r_1t_1';$$

es sind also die Strahlbüschel der perspektivischen Lage nicht fähig, weder wenn die Ebenen τ, τ_1 noch wenn σ, σ_1 zur Deckung gebracht werden. Endlich leuchtet ein, dass dieselben in der perspektivischen Lage verharren, wenn man ihren Mittelpunkten immer andere Lagen gibt, aber dafür sorgt, dass ihre vereinigten Ebenenpaare vereinigt bleiben.

Erklärung.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln soll jeder Strahl die Polare der ihm entsprechenden Ebene, und jede Ebene die Polare des ihr entsprechenden Strahles; und wenn erstere concentrisch sind, sollen je zwei Strahlen einer Ebene, von denen der eine in der Polare des anderen liegt, zugeordnete Polaren dieser Ebene, und je zwei Ebenen, von denen die eine die Polare der anderen enthält, zugeordnete Polaren des Strahles, in welchem sie sich schneiden, genannt werden. Entsprechen sich je zwei Elementenpaare in doppeltem Sinne, so wird diess durch das Beiwort „harmonisch“ angedeutet, und die Strahlbüschel heissen dann involutorisch.

Die folgenden drei Sätze wird man ohne Schwierigkeit aus den Sätzen 11, 5 und 6 abzuleiten wissen.

Lehrsatz 17.

In zwei concentrischen reciproken räumlichen Strahlbüscheln bilden die sämmtlichen Paare zugeordneter Polaren einer Ebene, in bestimmtem Sinne genommen, zwei projektivische ebene Strahlbüschel, und die sämmtlichen Paare zugeordneter Polaren eines Strahls, in bestimmtem Sinne genommen, zwei projektivische Ebenenbüschel, und zwar sind jene ebenen Strahl-

Digitized by Google

büschel sowohl als diese Ebenenbüschel involutorisch, wenn die räumlichen Strahlbüschel involutorisch sind.

Lehrsatz 18.

In zwei concentrischen reciproken räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder keinen oder nur einen oder unzählige Strahlen, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Strahlen bilden entweder einen Kegel des zweiten Grades oder zwei Ebenen oder nur eine einzige Ebene.

Lehrsatz 19.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln gibt es entweder keinen oder unzählige Strahlen, welche auf ihren Polaren liegen, und diese Strahlen bilden allemal einen Kegel des zweiten Grades, dessen Berührungsebenen ihre Polaren sind.

Lehrsatz 20.

Liegen zwei reciproke räumliche Strahlbüschel beliebig im Raume, so gibt es entweder in keinem von beiden einen Strahl, der mit seiner Polare parallel ist, oder es gibt in jedem nur einen solchen Strahl, und diese beiden Strahlen sind unter sich parallel, oder es gibt in jedem unzählige solche Strahlen; und zwar bilden diese Strahlen entweder zwei Kegel des zweiten Grades, deren Strahlen paarweise parallel sind, oder zwei Paar parallele Ebenen, oder ein einziges Paar solche Ebenen.

Beweis. Denn denkt man sich einen dritten räumlichen Strahlbüschel D_2, welcher mit dem einen der in Rede stehenden, z. B. D, concentrisch ist und dessen Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2.... mit den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... des anderen D_1 parallel sind, so sind D und D_2 reciprok; so oft nun ein Strahl a_2 auf seiner Polare α liegt, wird der Strahl a_1 mit seiner Polare α parallel sein, und ist a der mit a_2 vereinigte Strahl von D, so muss auch die dem D_1 angehörige Polare α_1 von a durch den Strahl a_1 gehen, also auch a mit seiner Polare parallel sein. Folglich ergibt sich unser Satz ganz einfach aus Lehrsatz 18.

Lehrsatz 21.

In zwei reciproken räumlichen Strahlbüscheln gibt es allemal ein Paar entsprechende normale gleichseitige Dreikante, d. h. die Kanten des einen sind die Polaren der Seitenflächen des anderen.

Beweis. Denn ist

$$D(a, b, c, d....) = D_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....),$$

und denkt man sich einen mit D_1 concentrischen räumlichen Strahl-

Digitized by Google

büschel D_2, dessen Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2.... auf den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1.... senkrecht sind, rechnet jetzt diese Strahlen zu D_1 und denkt sich wieder einen mit D concentrischen Strahlbüschel D', dessen Strahlen a', b', c', d'.... auf denjenigen Ebenen α, β, γ, δ.... von D senkrecht sind, welche den Strahlen a_2, b_2, c_2, d_2... entsprechen, so ist

$$D(a, b, c, d....) = D_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....) = D_2(a_2, b_2, c_2, d_2....)$$
$$= D_1(a_2, b_2, c_2, d_2....) = D(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = D'(a', b', c', d'....),$$

also

$$D(a, b, c, d....) = D'(a', b', c', d'....).$$

So oft nun in den collinearen Strahlbüscheln D, D' zwei entsprechende Strahlen e, e' sich vereinigen, muss auch der auf (ee') senkrechten Ebene ε von D ein Strahl e_2 in D_1 entsprechen, welcher auf einer Ebene ε_1 von D_1 senkrecht steht, die ihrerseits wieder dem Strahle (ee') von D entspricht. Nun aber gibt es nach Lehrsatz 13. allemal zwei solche Strahlen e, e'; also gibt es in D allemal einen Strahl und eine darauf senkrechte Ebene, deren Polaren in D_1 bezüglich eine Ebene und ein darauf senkrechter Strahl sind. Erstere mögen r, ϱ, letztere ϱ_1, r_1 heissen. Sämmtliche der Ebene ϱ angehörige Strahlen von D bilden einen ebenen Strahlbüschel B, und deren Polaren einen mit B projektivischen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, dessen Achse r_1 ist, dessen Ebenen also auf ϱ_1 senkrecht stehen, und $\mathfrak{A}_1$ schneidet ϱ_1 in einem ebenen Strahlbüschel B_1, der also auch mit B projektivisch ist. Aber B, B_1 haben allemal zwei entsprechende rechte Winkel; also gibt es in B zwei rechtwinklige Strahlen s, t, denen in $\mathfrak{A}_1$ zwei Ebenen σ_1, τ_1 entsprechen, welche ebenfalls einen rechten Flächenwinkel einschliessen; und somit gibt es in D drei zu einander rechtwinklige Strahlen r, s, t, denen in D_1 drei zu einander rechtwinklige Ebenen ϱ_1, σ_1, τ_1 entsprechen, und ϱ, σ, τ sind die Verbindungsebenen von s und t, r und t, r und s; und sind r_1, s_1, t_1 die Durchschnittslinien von σ_1 und τ_1, ϱ_1 und τ_1, ϱ_1 und σ_1, so müssen auch ϱ, σ, τ und r_1, σ_1, τ_1 sich bezüglich entsprechen.

Erklärung.

Die so erhaltenen drei Strahlen r, s, t und deren Polaren ϱ_1, σ_1, τ_1 (oder r_1, s_1, t_1 und ϱ, σ, τ) sollen drei **polarische Normalstrahlen und Normalebenen**, und je zwei Strahlen r, r_1; s, s_1; t, t_1 **zugeordnete Normalstrahlen**, je zwei Ebenen ϱ, ϱ_1; σ, σ_1; τ, τ_1 **zugeordnete Normalebenen** der reciproken Strahlbüschel D, D_1 heissen.

Lehrsatz 22.

Zwei concentrische reciproke räumliche Strahlbüschel sind involutorisch, wenn irgend zwei Strahlen, welche nicht, oder wenn irgend drei Strahlen, welche auf ihren Polaren, doch nicht in einer Ebene, liegen, denselben in doppeltem Sinne entsprechen; und daher auch, wenn ihre zugeordneten Normalstrahlen sich paarweise vereinigen.

Digitized by Google

Beweis nach Lehrsatz I. mittels zweier auf einander gelegter Ebenen, welche einzeln mit den beiden Strahlbüscheln perspektivisch sind.

Erklärung.

Die vereinigten Normalstrahlen (rr_1), (ss_1), (tt_1) oder r, s, t zweier involutorischen räumlichen Strahlbüschel sollen die Achsen, und die vereinigten Normalebenen $(\varrho\varrho_1)$, $(\sigma\sigma_1)$, $(\tau\tau_1)$ oder ϱ, σ, τ sollen die Achsenebenen dieser Strahlbüschel heissen; ferner jede Ebene, welche durch eine Achse geht, eine Durchmesserebene dieser Achse, jeder Strahl einer Achsenebene ein Achsenstrahl dieser Ebene. Die Hauptstrahlen der von den zug. harm. Polaren einer Durchmesserebene gebildeten Involution oder auch die von der betreffenden Achse gleichweit abstehenden zug. harm. Polaren bilden zwei Winkel; derjenige von beiden, welcher von der Achse gehälftet wird, heisst ein Durchmesserwinkel, und die zwei zugeordneten Durchmesserebenen zugehörigen Durchmesserwinkel heissen selber zugeordnete. Die beiden einer Achsenebene zugehörigen Durchmesserwinkel heissen Achsenwinkel in Bezug auf die Achse, von welcher sie gehälftet werden, und ihre Schenkel Scheitelkanten der involutorischen Strahlbüschel. Ebenso bilden die Hauptebenen der von den zug. harm. Polaren eines Achsenstrahls gebildeten Involution von Ebenen oder auch die von der Achsenebene gleichweit abstehenden zug. harm. Polaren zwei Winkel; derjenige von beiden, welcher von der Achsenebene gehälftet wird, heisst ein Achsenstrahlwinkel, und die zwei zug. Achsenstrahlen zugehörigen Achsenstrahlwinkel heissen selber zugeordnete. Die beiden einer Achse zugehörigen Achsenstrahlwinkel sind den beiden Achsenwinkeln gleich, welche der gegenüberliegenden Achsenebene angehören; ihre Schenkelebenen können Scheitelebenen der Strahlbüschel genannt werden.

Erzeugen diese letzteren einen Kegel, so sind die Achsen und Achsenebenen derselben zugleich auch Achsen und Achsenebenen des Kegels. Die innerhalb des letzteren liegende Achse heisst die innere und die ihr entsprechende Achsenebene die äussere; von den beiden Achsenwinkeln, die der inneren Achse zugehören, heisst der grössere der Haupt-, der kleinere der Nebenachsenwinkel, und der spitze, welcher in der äusseren Achsenebene liegt, der äussere Achsenwinkel; Haupt- oder Nebenachsenebene sagt man, jenachdem dieselbe den Haupt- oder Nebenachsenwinkel enthält; und auch die entsprechende Achse heisst Haupt- oder Nebenachse. Erzeugen aber die Strahlbüschel keinen Kegel, so sollen die drei spitzen Achsenwinkel je nach ihrer Grösse Haupt-, Mittel- und Nebenachsenwinkel, die sie enthaltenden Achsenebenen Haupt-, Mittel- und Nebenachsenebene, und die darauf senkrechten Achsen bezüglich Haupt-, Mittel- und Nebenachse heissen. Kommt nur eine einzige Achse in Betracht, so wird derjenige Achsenwinkel, dessen Schenkel wirkliche Scheitelkanten des Kegels sind, und wenn kein Kegel vorhanden ist, der grössere der Achsenwinkel, welche dieser Achse zugehören, Haupt-, der kleinere Nebenachsenwinkel genannt werden.

Digitized by Google

Lehrsatz 23.

Der äussere Achsenwinkel und der Mittelachsenwinkel gehören allemal der Nebenachse an; und der Mittelachse gehören allemal der Haupt- und der Nebenachsenwinkel an.

Beweis. Man denke sich *a*) wenn ein Kegel erzeugt wird, auf die innere Achse, *b*) wenn keiner erzeugt wird, auf irgend eine Achse eine Ebene senkrecht gelegt, so erhält man zwei involutorische Ebenen, deren Mittelpunkt der Fusspunkt jener Achse ist und deren Achsen mit den beiden anderen Achsen der involutorischen Strahlbüschel parallel sind. Ausserdem ist der von der grösseren Achse der Ebenen gehälftete kleinste Winkel, den zwei zug. Durchmesser derselben einschliessen, demjenigen Achsenwinkel gleich, welcher der mit jener Ebene parallelen Achsenebene und der mit der grösseren Achse der Ebenen parallelen Achse der Strahlbüschel angehört. Bezeichnet man nun die Hälfte jenes kleinsten Winkels mit γ, die halbe grosse Achse der Ebenen mit A, die halbe kleinere mit B, den halben Achsenwinkel, welcher jener ersten Achse angehört und die Strecke A bestimmt, mit α und den halben anderen, welcher die Strecke B bestimmt, mit β, endlich den Abstand der Mittelpunkte der Ebenen und der Strahlbüschel von einander mit h; so ist

$$A = h.\mathrm{tng}\,\alpha,\quad B = h.\mathrm{tng}\,\beta,$$

und nicht nur im Falle *a*), wo A und B einer Ellipse angehören, sondern auch im Falle *b*), wie aus der am Ende des §. 1. entwickelten Gleichung (2) hervorgeht, wenn $A_1 = \gamma$, $B_1 = 0$ gesetzt wird:

$$\mathrm{tng}\,\gamma = \frac{B}{A} = \frac{\mathrm{tng}\,\beta}{\mathrm{tng}\,\alpha}.$$

Da nun $B < A$, so ist auch $\beta < \alpha$ und $\gamma < 45^0$. Hiermit ist also bewiesen, dass im Falle *a*) von den beiden Achsenwinkeln, welche auf der äusseren Achsenebene liegen, derjenige ein spitzer, d. h. der äussere Achsenwinkel ist, welcher der auf der Ebene von β stehenden Achse, d. h. der Nebenachse angehört. Im Falle *b*) denke man sich in Taf. V. Fig. 4. die Bogen rs_1, rt'; st', sr'; tr', ts_1 als die Maasse der halben Achsenwinkel, welche bezüglich den Achsen r, s, t angehören: so ergibt sich aus dem Vorigen, dass wenn $sr' < st'$ ist, $rs_1 < 45^0$ sein muss. Ist nun $st' < 45^0$, so ist $ts_1 < tr'$ aus demselben Grunde, als $rs_1 < 45^0$ ist, wenn $sr' < st'$; und folglich ist $rs_1 > sr'$; also messen die doppelten Bogen st', rs_1 und sr' drei spitze Achsenwinkel, von denen der erste der grösste und der letzte der kleinste ist. Ist dagegen $st' > 45^0$, so ist ausser rs_1 auch $rt' < 45^0$. Es sei nun $rs_1 < rt'$; so ist $sr' < 45^0$. und da $rt' < 45^0$, so ist $tr' < ts_1$, also $sr' > rs_1$; die doppelten Bogen rt', sr', rs_1 messen also drei spitze Winkel, von denen der erste der grösste, der letzte der kleinste ist. Oder ist endlich $rs_1 > rt'$, während $st' > 45^0$ ist, so ist $tr' < 45^0$, und weil von vornherein $sr' < st'$ ist, so ist $tr' > rt'$; also messen wieder die doppelten Bogen: rs_1 den grössten, tr' den mittleren und rt' den kleinsten spitzen Achsenwinkel. Unser Satz ist also vollständig erwiesen.

Digitized by Google

Anmerkung. Vergleicht man die Relation $\tan\beta = \tan\alpha . \tan\gamma$ mit einer im Beweise von Lehrsatz 16. gebrauchten, so sieht man sogleich, dass die sechs Scheitelkanten zweier involutorischer räumlicher Strahlbüschel drei zu drei in vier Ebenen liegen.

In der Figur, welche der letzten Betrachtung zu Grunde lag, seien A_1, B_1 irgend zwei halbe zugeordnete Durchmesserlängen der involutorischen Ebenen, α_1, β_1 die dieselben bestimmenden halben Durchmesserwinkel der involutorischen Strahlbüschel, und φ, α', β' die Winkel, welche jene Durchmesser bezüglich mit einander und mit der grossen Achse einschliessen, oder, was offenbar einerlei ist, die Winkel, welche die betreffenden Durchmesserebenen bezüglich mit einander und mit der den Winkel α enthaltenden Achsenebene einschliessen; so ist

$$A_1 = h . \operatorname{tng}\alpha_1,\ B_1 = h . \operatorname{tng}\beta_1,\ A = h . \operatorname{tng}\alpha,\ B = h\ \operatorname{tng}\beta;$$

und nach Archiv. Thl. IV. S. 273. und §. 1. ist

$$A_1^2 + B_1^2 = A^2 + B^2;\ A_1 . B_1 . \sin\varphi = A . B;\ A_1^2 : B_1^2 = \sin 2\alpha' : \sin 2\beta'.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 + \operatorname{tng}^2\beta_1 = \operatorname{tng}^2\alpha + \operatorname{tng}^2\beta; \qquad (1)$$

$$\operatorname{tng}\alpha_1 . \operatorname{tng}\beta_1 . \sin\varphi = \operatorname{tng}\alpha . \operatorname{tng}\beta; \qquad (2)$$

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 : \operatorname{tng}^2\beta_1 = \sin 2\alpha' : \sin 2\beta'. \qquad (3)$$

Steht in dem Falle, dass die involutorischen Strahlbüschel einen Kegel erzeugen, eine Ebene nicht auf der inneren, sondern auf der Haupt- oder Nebenachse senkrecht, so erhält man statt der Ellipse eine Hyperbel, und da für diese

$$A_1^2 - B_1^2 = A^2 - B^2$$

ist, so ist auch

$$\operatorname{tng}^2\alpha_1 - \operatorname{tng}^2\beta_1 = \operatorname{tng}^2\alpha - \operatorname{tng}^2\beta \text{ u. s. w.}$$

Andererseits denke man sich jetzt wieder auf eine Achse r irgend zweier involutorischer Strahlbüschel eine Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht errichtet; es sei α der in der Achsenebene rs oder τ liegende, β der in der Achsenebene rt oder σ liegende, zur Achse r gehörige, halbe Achsenwinkel; a, a_1 seien irgend zwei zug. harm. Polaren oder Achsenstrahlen der Ebene τ, welche mit r bezüglich die Winkel α', α_1' einschliessen, und zwar sei α' grösser als α_1'; und F, F_1 seien irgend zwei zug. harm. Polaren des Achsenstrahles a, welche mit der Achsenebene τ bezüglich die Flächenwinkel φ, φ_1 einschliessen. Endlich seien A_1, B_1 bezüglich die den Strahlen a, a_1 zugehörigen halben Achsenstrahlwinkel. Es werde die Ebene $\mathfrak{E}$, welche auch jetzt zwei involutorische Ebenen enthält, von der Achse r im Punkte M, von den Achsenebenen τ und σ in den Geraden (Achsen) A, B, welche zugleich die betreffenden halben Achsenlängen vorstellen mögen, von den Achsenstrahlen a, a_1 in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ und von den Ebenen F, F_1 in den Geraden f, f_1 geschnitten, und es seien φ', φ_1' die Winkel, welche f, f_1 bezüglich mit A einschliessen. Diess vor-

ausgesetzt, so sind f, f_1 zwei zug. harm. Polaren des Achsenpunktes $\mathfrak{a}$ in Bezug auf die involutorischen Ebenen, also nach der am Ende des §. 1. und anderwärts entwickelten Gleichung (1) ist

$$\operatorname{tng}\varphi'.\operatorname{tng}\varphi_1' = \frac{B^2}{M\mathfrak{a}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1};$$

aber in dem Dreikant, dessen Scheitel $\mathfrak{a}$ und dessen Kanten a, A, f sind, ist der von den Ebenen $\mathfrak{E}$ und τ eingeschlossene Flächenwinkel ein rechter, φ' der von f und A; $R-\alpha'$ der von a und A eingeschlossene Kantenwinkel und φ der dem φ' gegenüberliegende Flächenwinkel; also ist

$$\operatorname{tng}\varphi' = \operatorname{tng}\varphi.\sin(R-\alpha') = \operatorname{tng}\varphi\cos\alpha'$$

und ebenso

$$\operatorname{tng}\varphi_1' = \operatorname{tng}\varphi_1.\cos\alpha';$$

also

$$\operatorname{tng}\varphi'.\operatorname{tng}\varphi_1' = \operatorname{tng}\varphi.\operatorname{tng}\varphi_1.\cos^2\alpha' = \frac{B^2}{M\mathfrak{a}.\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1}.$$

Das Produkt $\operatorname{tng}\varphi.\operatorname{tng}\varphi_1$ ist für je zwei zug. harm. Polaren des Strahles a constant und der zweiten Potenz der Tangente des halben Achsenstrahlwinkels gleich, welcher dem Strahle a zugehört; $B=h.\operatorname{tng}\beta$, $M\mathfrak{a}=h.\operatorname{tng}\alpha'$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1=h(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, jenachdem die Strahlen a, a_1 auf verschiedenen Seiten oder auf einerlei Seite von τ liegen; also ist

$$\operatorname{tng}^2A_1.\cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')}$$

oder

$$\operatorname{tng}^2A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin\alpha'.\cos\alpha'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta(1+\operatorname{tng}^2\alpha')}{\operatorname{tng}\alpha'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')};$$

ebenso aber auch

$$\operatorname{tng}^2B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin\alpha_1'.\cos\alpha_1'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta(1+\operatorname{tng}^2\alpha_1')}{\operatorname{tng}\alpha_1'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')}. \quad (1)$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tng}^2A_1\pm\operatorname{tng}^2B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1'}\left(\frac{1+\operatorname{tng}^2\alpha'}{\operatorname{tng}\alpha'}\pm\frac{1+\operatorname{tng}^2\alpha_1'}{\operatorname{tng}\alpha_1'}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1'}\times\frac{\operatorname{tng}\alpha_1'\pm\operatorname{tng}\alpha'+\operatorname{tng}\alpha'.\operatorname{tng}\alpha_1'(\operatorname{tng}\alpha'\pm\operatorname{tng}\alpha_1')}{\operatorname{tng}\alpha'.\operatorname{tng}\alpha_1'};$$

folglich, da $\operatorname{tng}\alpha'.\operatorname{tng}\alpha_1' = \operatorname{tang}^2\alpha$ ist:

$$\operatorname{tng}^2A_1\pm\operatorname{tng}^2B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}^2\alpha}(\operatorname{tng}^2\alpha\pm1) = \operatorname{tng}^2\beta(1\pm\cot^2\alpha). \quad (2)$$

Digitized by Google

$$\operatorname{tng}^2 A_1 . \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' \cos^2\alpha' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}$$
$$\times \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha_1' . \cos^2\alpha_1' (\operatorname{tng}\alpha' \pm \operatorname{tng}\alpha_1')}$$
$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta . \operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha' . \operatorname{tng}\alpha_1' (\sin\alpha' \cos\alpha_1' \pm \cos\alpha' \sin\alpha_1')^2} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta . \operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}^2\alpha . \sin^2(\alpha' \pm \alpha_1')};$$

folglich, wenn ψ der von a, a_1 eingeschlossene Winkel ist:

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha, \tag{3}$$

$$\operatorname{tng}^2 A_1 : \operatorname{tng}^2 B_1 = \frac{1}{\sin\alpha' . \cos\alpha'} : \frac{1}{\sin\alpha_1' . \cos\alpha_1'} = \sin 2\alpha_1' : \sin 2\alpha'. \tag{4}$$

Ist γ der halbe Achsenwinkel, welcher der Achsenebene ϱ und zwar der Achse s angehört, so ist, wie wir oben gesehen,

$$\operatorname{tng}\beta = \operatorname{tng}\alpha . \operatorname{tng}\gamma$$

oder auch

$$\operatorname{tng}\beta . \cot\alpha = \operatorname{tng}\gamma;$$

daher lassen sich die zweite und dritte der obigen Relationen auch so wie folgt ausdrücken:

$$\operatorname{tng}^2 A_1 \pm \operatorname{tng}^2 B_1 = \operatorname{tng}^2\beta \pm \operatorname{tng}^2\gamma,$$
$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma;$$

was auch an und für sich klar ist, da β und γ den, den zug. Achsenstrahlen s, r angehörigen halben Achsenstrahlwinkeln gleich sind, für welche $\sin\psi = 1$ ist.

Bedenkt man endlich, dass die Strahlen a, a_1 nur dann auf einerlei Seite der Achse r liegen, wenn die Achsenebene τ den erzeugten Kegel durchschneidet, so wird man sich vollkommen von folgenden Doppelsätzen überzeugt halten:

Lehrsatz 24.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln ist allemal

die Summe oder der Unterschied der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Durchmesserwinkel, jenachdem die betreffende Achse innerhalb eines Kegels liegt oder nicht, von unveränderlichem Werthe, und zwar bezüglich der Summe oder dem Unterschiede der zweiten Potenzen der Tangenten der zu jener Achse gehörigen halben Achsenwinkel gleich.

die Summe oder der Unterschied der zweiten Potenzen der Tangenten zweier zugeordneten halben Achsenstrahlwinkel, jenachdem die betreffende Achsenebene ausserhalb eines Kegels liegt oder nicht, von unveränderlichem Werthe, und zwar bezüglich der Summe oder dem Unterschiede der zweiten Potenzen der Tangenten der an jene Achsenebene stossenden halben Achsenwinkel gleich.

Digitized by Google

Lehrsatz 25.

Das Produkt der Tangenten je zweier zugeordneter halber Durchmesserwinkel in den Sinus des von ihren Ebenen eingeschlossenen Winkels ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der halben Achsenwinkel gleich, welche der betreffenden Achse angehören.

Das Produkt der Tangenten je zweier zugeordneter halber Achsenstrahlwinkel in den Sinus des von den Achsenstrahlen eingeschlossenen Winkels ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der halben Achsenwinkel gleich, welche an die betreffende Achsenebene stossen.

Lehrsatz 26.

Die zweiten Potenzen der Tangenten je zweier zugeordneter halber Durchmesserwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der doppelten Winkel, welche ihre Ebenen mit einer Achsenebene einschliessen.

Die zweiten Potenzen der Tangenten je zweier zugeordneter halber Achsenstrahlwinkel verhalten sich umgekehrt wie die Sinus der doppelten Winkel, welche die Achsenstrahlen mit einer Achse einschliessen.

Durch die Achse t und den der Achsenebene τ angehörigen Achsenstrahl a sei eine Durchmesserebene gelegt, und die Schenkel m, m' des dieser Ebene angehörigen Durchmesserwinkels 2δ mit dem zugeordneten Achsenstrahle a_1, d. h. der harm. Polare dieser Ebene, durch zwei Ebenen verbunden; so ist der von den letzteren eingeschlossene Winkel $2B_1$ der dem a_1 angehörige Achsenstrahlwinkel, und man hat für die Winkel δ, ψ, B_1 des von den Strahlen a, a_1, m gebildeten rechtwinkligen Dreikants folgende Relation:

$$\operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\delta.$$

Nun aber war

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} B_1 . \sin\psi = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha;$$

also ist

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng}\delta = \operatorname{tng}\beta . \operatorname{tng}\gamma = \operatorname{tng}^2\beta . \cot\alpha.$$

Lehrsatz 27.

Das Produkt der Tangenten eines beliebigen halben Durchmesserwinkels, welcher einer bestimmten Achse angehört, und des halben Achsenstrahlwinkels, welcher demjenigen Achsenstrahle angehört, in welchem die entsprechende Achsenebene von der Durchmesserebene geschnitten wird, ist von unveränderlichem Werthe, und zwar dem Produkte der Tangenten der an diese Achsenebene stossenden halben Achsenwinkel gleich.

Digitized by Google

Es entsteht nun die Frage: *a*) ob und wie viele Ebenen, und *b*) ob und wie viele Strahlen in zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln es gibt, deren zugeordnete harmonische Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden? und diese Frage wird entschieden sein, wenn ausser den sog. Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel noch ein einziges Paar zug. harm. Polaren einer Ebene oder eines Strahles, welche rechte Winkel einschliessen, nachgewiesen werden können.

a) Gibt es eine solche Ebene, so muss sie eine Durchmesserebene sein. Denn wäre sie dieses nicht, so sei a der Strahl, in welchem sie irgend eine Achsenebene, z. B. ϱ, schneidet; die harm. Polare von a würde durch die Achse r gehen und jene Ebene in einem Strahle a_1 schneiden, welcher mit a einen rechten Winkel bildet. Also würde a auf r und a_1, d. h. auf seiner Polare senkrecht sein, folglich entweder mit s oder t zusammenfallen, oder je zwei zug. harm. Polaren von ϱ würden rechte Winkel einschliessen, was im Allgemeinen nicht angenommen werden kann.

Ferner kann eine Durchmesserebene, deren zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, im Fall dass ein Kegel erzeugt wird, denselben nicht durchschneiden, weil sonst jene Involution aus ungleichliegenden Gebilden bestehen würde, was widersprechend ist; sie kann also nicht der inneren Achse angehören, und der Strahl a, in welchem sie die betreffende Achsenebene schneidet, muss mit der inneren Achse einen grösseren Winkel α' einschliessen, als der zugeordnete Achsenstrahl a_1.

Es seien α, β die der inneren Achse angehörigen halben Achsenwinkel, wobei unentschieden bleibt, ob $\alpha \gtrless \beta$ ist, und γ der halbe äussere Achsenwinkel; r sei die innere Achse; der Winkel α gehöre der Ebene τ, β der Ebene σ an; a sei der Strahl, in welchem eine beliebige, durch die Achse t gehende Durchmesserebene $\mathfrak{A}$ die Achsenebene τ schneidet; A_1 der dem a angehörige halbe Achsenstrahlwinkel, δ der der $\mathfrak{A}$ angehörige halbe Durchmesserwinkel, und α' der Winkel, welchen a und r einschliessen; so ist nach dem Obigen:

$$\operatorname{tng} A_1 . \operatorname{tng} \delta = \operatorname{tng}^2 \beta . \cot \alpha$$

und

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2 \beta}{\operatorname{tng} \alpha' (\operatorname{tng} \alpha' - \operatorname{tng} \alpha_1') \cos^2 \alpha'}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2 \beta}{\sin^2 \alpha' - \cos^2 \alpha' . \operatorname{tng}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tng}^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha' (1 + \operatorname{tng}^2 \alpha)}.$$

Wäre nun $\delta = 45^0$, so wäre $\mathfrak{A}$ eine Ebene, wie wir sie suchen; man setze also $\operatorname{tng} \delta = 1$, so ist

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \operatorname{tng}^4 \beta . \cot^2 \alpha = \frac{\operatorname{tng}^2 \beta}{1 - \cos^2 \alpha' (1 + \operatorname{tng}^2 \alpha)};$$

also

$$\cos^2 \alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2 \beta - \operatorname{tng}^2 \alpha}{\operatorname{tng}^2 \beta (1 + \operatorname{tng}^2 \alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2 \alpha . \cot^2 \beta}{1 + \operatorname{tng}^2 \alpha}.$$

Digitized by Google

Jedenfalls muss also $\beta > \alpha$ sein, und da dann auch

$$1 - \text{tng}^2\alpha . \cot^2\beta < 1 + \text{tng}^2\alpha$$

ist, so gibt es allemal zwei Ebenen $\mathfrak{A}$, aber auch nur zwei; und zwar gehören dieselben der Nebenachse t an und bilden mit der inneren Achse r einen Winkel α', welcher durch die Gleichung

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 - \text{tng}^2\alpha . \cot^2\beta}{1 + \text{tng}^2\alpha} = \frac{1 - \text{tng}^2\gamma}{1 + \text{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} . \cos 2\gamma$$

bestimmt ist, indem jetzt $\text{tng}\,\alpha = \text{tng}\,\beta . \text{tng}\,\gamma$ ist.

Ist kein Kegel vorhanden, und werden alle vorigen Bestimmungen mit Ausnahme der besonderen Bedeutung der Achsen und Achsenebenen beibehalten, so ist

$$\text{tng}\,A_1 . \text{tng}\,\delta = \text{tng}^2\beta . \cot\alpha;$$

$$\text{tng}^2 A_1 = \frac{\text{tng}^2\beta}{\text{tng}\,\alpha' (\text{tng}\,\alpha' + \text{tng}\,\alpha_1') \cos^2\alpha'} = \frac{\text{tng}^2\beta}{\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha' . \text{tng}^2\alpha}$$
$$= \frac{\text{tng}^2\beta}{1 + \cos^2\alpha' (\text{tng}^2\alpha - 1)};$$

also, wenn $\text{tng}\,\delta = 1$ gesetzt wird:

$$\cos^2\alpha' = \frac{\text{tng}^2\alpha - \text{tng}^2\beta}{\text{tng}^2\beta (\text{tng}^2\alpha - 1)} = \frac{\text{tng}^2\alpha . \cot^2\beta - 1}{\text{tng}^2\alpha - 1} = \frac{1 - \text{tng}^2\alpha . \cot^2\beta}{1 - \text{tng}^2\alpha}.$$

Es sind nun bloss drei Fälle denkbar:

1) $\alpha < 45^0$, $\beta < 45^0$; 2) $\alpha > 45^0$, $\beta > 45^0$; 3) $\alpha \lessgtr 45^0$, $\beta \gtrless 45^0$.

Ist im Falle 1) $\alpha > \beta$, so wird der ganze Ausdruck negativ, was unmöglich ist, da $\cos^2\alpha'$ immer positiv ist; diess ist aber nicht der Fall, wenn $\beta > \alpha$, und dann ist auch $1 - \text{tng}^2\alpha . \cot^2\beta < 1 - \text{tng}^2\alpha$. Im Falle 2) muss $\alpha > \beta$ sein, und im Falle 3) führt jede Annahme zum Widerspruch. Geht man nun auf Lehrsatz 23. zurück und bedenkt, dass wenn in Taf. V. Fig. 4. sr' und st' kleiner als 45^0, und $sr' < st'$, dann tr' und ts_1 grösser als 45^0, und $tr' > ts_1$; $rs_1 < 45^0$, $rt' > 45^0$ sind, so schliesst man aus dem Vorigen, dass die gesuchte Ebene $\mathfrak{A}$ nur auf derjenigen Achsenebene senkrecht stehen kann, welche den kleinsten, d. h. den Nebenachsenwinkel, enthält, und also durch die Nebenachse gehen muss, und dass es nothwendig zwei, aber auch nur zwei solche Ebenen gibt, deren Neigung α' gegen die Mittelachse oder, was einerlei ist, gegen die Hauptachsenebene durch die Gleichung:

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 - \text{tng}^2\alpha \cot^2\beta}{1 - \text{tng}^2\alpha} = \frac{1 - \text{tng}^2\gamma}{1 - \text{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma} . \frac{\cos 2\gamma}{\cos 2\alpha}$$

bestimmt wird, indem β, γ, α der Reihe nach den halben Haupt-, Mittel- und Nebenachsenwinkel bedeuten.

Digitized by Google

b) Gibt es einen Strahl a, dessen zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, so muss derselbe einer Achsenebene angehören; denn die harm. Polare a_1 derjenigen Ebene α, welche a mit einer Achse, z. B. mit r, verbindet, liegt in der Achsenebene ϱ, welche auf α senkrecht steht; läge nun a nicht in ϱ, so würde auch die Ebene, welche a_1 mit a verbindet, auf α senkrecht sein und folglich auch a_1 auf α; entweder würde also α mit einer der Achsenebenen σ, τ zusammenfallen, oder je zwei zug. harm. Polaren der Ebene ϱ würden rechte Winkel einschliessen, was im Allgemeinen nicht anzunehmen ist.

Ferner muss der Strahl a, wenn ein Kegel erzeugt wird, innerhalb desselben liegen, weil nur dann seine zug. harm. Polaren gleichliegende involutorische Ebenenbüschel bilden, und muss daher mit der inneren Achse einen kleineren Winkel α', als sein zug. Achsenstrahl a_1, einschliessen. Daher ist, wenn wir alle unter *a*) gemachten Bestimmungen beibehalten, jetzt

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'\,(\operatorname{tng}\alpha_1' - \operatorname{tng}\alpha').\cos^2\alpha'} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\cos^2\alpha'.\operatorname{tng}^2\alpha - \sin^2\alpha'}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\cos^2\alpha'\,(\operatorname{tng}^2\alpha + 1) - 1}.$$

Wäre nun der halbe Achsenstrahlwinkel $A_1 = 45^0$, oder $\operatorname{tng} A_1 = 1$, so wäre a der gesuchte Strahl. Unter dieser Annahme aber ist

$$\cos^2\alpha' = \frac{1 + \operatorname{tng}^2\beta}{1 + \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$$

oder

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Es gibt also allemal zwei Strahlen a, wenn $\alpha > \beta$, d. h. auf der Hauptachsenebene, und zwar ist der von ihnen und der inneren Achse eingeschlossene Winkel die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreikants, dessen andere Kathete dem halben Nebenachsenwinkel, und dessen Hypotenuse dem halben Hauptachsenwinkel gleich ist.

Wird kein Kegel erzeugt, so ist

$$\operatorname{tng}^2 A_1 = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\operatorname{tng}\alpha'\,(\operatorname{tng}\alpha' + \operatorname{tng}\alpha_1')\cos^2\alpha'} = \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{\sin^2\alpha' + \cos^2\alpha'.\operatorname{tng}^2\alpha}$$

$$= \frac{\operatorname{tng}^2\beta}{1 + \cos^2\alpha'\,(\operatorname{tng}^2\alpha - 1)};$$

also, wenn $\operatorname{tng} A_1 = 1$ gesetzt wird:

$$\cos^2\alpha' = \frac{\operatorname{tng}^2\beta - 1}{\operatorname{tng}^2\alpha - 1} = \frac{1 - \operatorname{tng}^2\beta}{1 - \operatorname{tng}^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}.\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\alpha}.$$

Ist nun $\alpha < 45^0$, $\beta < 45^0$, so muss $\alpha < \beta$ sein, wenn ein Werth für α' existiren soll; ist $\alpha > 45^0$, $\beta > 45^0$, so ist $\beta > \alpha$; und ist

Digitized by Google

$\alpha \gtrless 45^0$, $\beta \lessgtr 45^0$, so ist kein Winkel α' denkbar. Also gibt es auch jetzt allemal zwei, aber auch nur zwei Strahlen a; dieselben liegen auf der Nebenachsenebene und schliessen mit der Mittelachse einen Winkel α' ein, welcher durch den halben Hauptachsenwinkel β und den halben Nebenachsenwinkel α so, wie gezeigt, bestimmt wird.

Noch ist zu bemerken, dass, wenn $\alpha=\beta$ ist, im Falle *a*) $\cos\alpha'=0$ ist, also beide Ebenen $\mathfrak{A}$ bezüglich mit der äusseren oder der Mittelachsenebene zusammenfallen, was auch daraus folgt, dass dann die Gleichung $\operatorname{tng}\beta=\operatorname{tng}\alpha.\operatorname{tng}\gamma$ für den halben äusseren oder Mittelachsenwinkel γ den Werth von 45^0 liefert; und dass im Falle *b*) $\cos\alpha'=1$ ist, also die beiden Strahlen a bezüglich mit der inneren oder der Mittelachse sich vereinigen, womit wiederum die Gleichung $\operatorname{tng}\gamma=1$ übereinstimmt.

Erklärung.

In zwei involutorischen räumlichen Strahlbüscheln soll jeder Strahl und jede Ebene, deren zug. harm. Polaren eine Involution der rechten Winkel bilden, bezüglich eine **Brennlinie** und eine **Brennebene** dieser Strahlbüschel heissen.

Lehrsatz 28.

Zwei involutorische räumliche Strahlbüschel

besitzen im Allgemeinen allemal zwei, aber auch nur zwei Brennebenen, und zwar gehen dieselben in jedem Falle durch die Nebenachse und haben gegen die innere oder die Mittelachse gleiche Neigung.

besitzen im Allgemeinen allemal zwei, aber auch nur zwei Brennlinien, und zwar liegen dieselben auf der Haupt- oder der Nebenachsenebene, jenachdem erstere einen Kegel erzeugen oder nicht, und sie haben gegen die innere oder die Mittelachse gleiche Neigung.

Lehrsatz 29.

Jeder Kegel des zweiten Grades wird in zwei verschiedenen Richtungen, welche auf der Nebenachsenebene senkrecht sind, von einer beliebigen Ebene in einer Kreislinie geschnitten.

Beweis. Denn aus Archiv. Thl. VIII. S. 44. geht hervor, dass ein jeder solcher Kegel zwei involutorische räumliche Strahlbüschel bestimmt, und da die zug. Durchmesser eines jeden ebenen Schnittes des ersteren den zug. harm. Polaren einer Ebene der letzteren parallel sein müssen, so bilden die zug. Durchmesser derjenigen Schnitte des Kegels, welche einer Brennebene dieser Strahlbüschel parallel sind, eine Involution der rechten Winkel, gehören also lauter Kreisen an.

Digitized by Google

Anmerkung. Die Brennlinien und Brennebenen zweier involutorischer räumlicher Strahlbüschel sind nicht nur für die Theorie des Kegels, sondern auch für die der Flächen des zweiten Grades überhaupt von Wichtigkeit. Hat man nämlich sich überzeugt, dass die zug. Durchmesser und Durchmesserebenen einer Fläche des zweiten Grades zwei involutorische räumliche Strahlbüschel bilden, und dass einerseits die zug. harm. Polaren irgend einer Ebene der letzteren zug. Durchmesser des dieser Ebene und der Fläche zweiten Grades gemeinschaftlichen Schnittes, und dass andererseits die zug. harm. Polaren eines beliebigen Strahles jener Strahlbüschel zug. Durchmesserebenen aller derjenigen Kegel sind, welche diese Fläche umhüllen, und deren Scheitel in diesem Strahle liegen, so übersieht man mit einem Blicke, dass 1) alle den Brennebenen parallele Ebenen die Fläche in Kreisen schneiden müssen, und dass dieselben auf der Nebenachsenebene des Hyperboloids und auf derjenigen Achsenebene des Ellipsoids, welche die grösste und kleinste Achse enthält, senkrecht sind; 2) dass es unzählige senkrechte Kegel gibt, welche die Fläche umhüllen, dass die Scheitel derselben zwei Durchmessern der letzteren, nämlich den Brennlinien jener involutorischer Strahlbüschel, angehören und daher auf der Hauptachsenebene des Hyperboloids und auf derjenigen Ebene des Ellipsoids, welche die grösste und kleinste Achse enthält, liegen.

Zweiter Theil.

§. 3.

Unmittelbare Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Klasse durch reciproke räumliche Strahlbüschel und Ebenen.

I. Flächen zweiter Ordnung. Sind im Raume eine Gerade und eine Ebene beliebig gegeben, so ist hierdurch, jenachdem sie sich schneiden oder nicht, ein Punkt von endlicher oder unendlicher Entfernung gegeben; und ist irgend ein System von Geraden und ein demselben entsprechendes System von Ebenen gegeben, so bilden die Durchschnitte je einer Geraden und einer Ebene ein bestimmtes System von Punkten, dessen Gesetz von der Beziehung jener beiden Systeme auf einander abhängig ist. Es ist die Frage: welcher Art dieses Gesetz sei, wenn die gegebenen Systeme zwei im Raume beliebig liegende reciproke Strahlbüschel D, D_1 sind?

Es sei B irgend eine Ebene oder ein ebener Strahlbüschel von D mit den Strahlen a, b, c, d....; und es sei $\mathfrak{B}_1$ die Polare von B oder der entsprechende Ebenenbüschel mit den Ebenen α_1,

Digitized by Google

$\beta_1, \gamma_1, \delta_1$..... den Polaren von a, b, c, d....; endlich seien a_1, b_1 c_1, d_1.... diejenigen Geraden, in welchen die Ebene B von den Ebenen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$.... geschnitten wird, welche also einen zweiten ebenen Strahlbüschel B_1 bilden, und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$... die Durchschnittspunkte von a, b, c, d.... und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$.... oder a_1, b_1, c_1, d_1.... Diess vorausgesetzt, so ist nach Lehrsatz 11.

$$B(a, b, c, d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma, \delta_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c, d_1....),$$

also

$$B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

d. h. sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$...., in welchen die Strahlen der Ebene B von den entsprechenden Ebenen des Strahlbüschels D_1 geschnitten werden, liegen auf einem Kegelschnitte K, welcher auch die Mittelpunkte D, B_1 des räumlichen und des ebenen Strahlbüschels D, B_1 enthält und im Punkte D von demjenigen Strahle e berührt wird, dessen Polare ε_1 die Punkte D, D_1 und B_1 verbindet. Im Punkte B_1 berührt den K derjenige Strahl m_1 oder diejenige Ebene μ_1, welchen im Strahlbüschel B oder D der Strahl DB_1 oder m entspricht.

Vertauscht man jetzt B mit beliebigen anderen Ebenen B', B''.... des Strahlbüschels D, so erhält man eben so viele neue Kegelschnitte K', K''...., deren Tangenten in D lauter solchen Ebenen von D_1, die durch den gemeinschaftlichen Strahl DD_1 oder $(f_1 g)$ beider Strahlbüschel D, D_1 gehen, entsprechen, also sämmtlich in einer Ebene φ liegen müssen, welche die Polare des Strahles f_1 ist. Gehen die Ebenen B, B', B''.... alle durch einerlei Strahl m oder DB_1, bilden sie also einen Ebenenbüschel, so liegen ihre Polaren $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$,... alle in einerlei Ebene μ_1; die in den ersteren liegenden Kegelschnitte K, K', K''.... gehen sämmtlich durch die Punkte D und B_1, werden von der Ebene μ_1 in den neuen Punkten B_1', B_1''...., die den Strahlen $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$.... angehören, geschnitten. und in diesen Punkten von denjenigen Ebenen μ_1', μ_1''.... berührt, welche den Strahlen DB_1', DB_1''.... oder m', m''.... entsprechen. Aus demselben Grunde, weshalb die Punkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$.... der Ebene B einen Kegelschnitt K bilden, müssen nun auch andererseits die Punkte B_1, B_1', B_1''.... der Ebene μ_1 einen Kegelschnitt K_1 bilden, dessen Tangente in D_1 die Polare der Ebene DD_1B_1 ist, und dessen Tangente in B_1 der Ebene B angehört. Und so erhält man auch in allen übrigen Ebenen von D_1 Kegelschnitte K_1', K_1''...., in deren Punkten die in diesen Ebenen liegenden Strahlen von ihren Polaren geschnitten werden; und die Geraden, welche diese Kegelschnitte im Punkte D_1 berühren, gehören sämmtlich einer Ebene χ_1, der Polare des gemeinschaftlichen Strahles g der Strahlbüschel D, D_1, an. Ist $\mathfrak{a}$ irgend ein Punkt eines der Kegelschnitte, welche in den Ebenen von D liegen, und sind a, a_1 die nach diesem Punkte gehenden Strahlen von D, D_1, so geht die Polare α_1 von a durch den Punkt $\mathfrak{a}$ und also auch durch den Strahl a_1, und folglich geht die Polare α von a_1 durch den Strahl a; der Punkt $\mathfrak{a}$ wird also auf doppelte Weise erhalten: einmal als Durchschnitt eines Strahles von D und dessen Polare in D_1, sodann als Durchschnitt eines Strahles von D_1 und dessen Polare in D. Ferner berührt die

Digitized by Google

Gerade, in welcher sich die Ebenen α, α_1 schneiden, sowohl den in α, als auch den in α_1 liegenden Kegelschnitt im Punkte $\mathfrak{a}$.

Geht die Ebene B durch den gemeinschaftlichen Strahl von D, D_1, so fällt der Punkt B_1 mit dem Punkte D_1 zusammen, und der Kegelschnitt K wird in den Punkten D, D_1 von denjenigen Geraden berührt, in welchen B von den Polaren φ, χ_1 des Strahles $(f_1 g)$ geschnitten wird. Nach den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... dieses Kegelschnittes K gehen von D und D_1 die Strahlenpaare $a, b, c, d....$; $a_1, b_1, c_1, d_1....$; es seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta....$ bezüglich die Polaren dieser Strahlen; so bilden erstere einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, letztere einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, deren Achsen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$, die Polaren der Ebene B, im Allgemeinen sich nicht schneiden, und da

$$\mathfrak{A}(\alpha,\beta,\gamma,\delta....) \equiv B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 ...) \\ = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....)$$

ist, so ist

$$\mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....):$$

aber die Durchschnittslinien je zweier Ebenen α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1.... berühren in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... ebensoviele Paare von Kegelschnitten, welche auch von den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ berührt werden; also sind alle jene Berührungslinien die Durchschnitte der entsprechenden Ebenenpaare zweier projektivischer Ebenenbüschel, welche schief im Raume liegen, und bilden also die eine Schaar der Geraden eines einfachen Hyperboloids, zu dessen anderer Schaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ gehören *).

*) Die Theorie der Flächen des zweiten Grades hat die des einfachen Hyperboloids und des hyperbolischen Paraboloids, ebenso wie die des Kegels des zweiten Grades, zur Voraussetzung; denn obschon dieselben, wie sogleich gezeigt werden wird, auf dieselbe allgemeine Weise, wie die übrigen Flächen dieses Grades erzeugt werden können, so lässt sich doch die Genesis derselben mittels einfacherer Gebilde bewerkstelligen, und hierdurch die Erkenntniss ihrer Eigenschaften um Vieles erleichtern. Diess letztere ist durch Steiner bereits geschehen, und es wird daher zu unserem Zwecke genügen, aus dem ersten Theile seines Werkes nur folgenden Lehrsatz nebst Definition auszuziehen und wegen des Beweises auf das Werk selber zu verweisen.

„Wenn im Raume irgend drei Gerade A, A_1, A_2 irgend drei andere Gerade a, b, c schneiden, so schneiden alle Geraden d, e...., welche den drei ersten begegnen, alle Geraden A_3, A_4...., welche den drei letzten begegnen, und es haben die zwei Schaaren Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4...; a, b, c, d, e.... solche Beziehung zu einander:

dass je zwei Gerade, die der nämlichen Schaar angehören, unter sich projektivisch sind, und zwar die andere Schaar Gerader zu Projektionsstrahlen haben.“	dass je zwei Gerade aus einer Schaar die Achsen projektivischer Ebenenbüschel sind, deren entsprechende Ebenen die andere Schaar zu Durchschnittslinien haben.“

„Zwei solche zusammengehörige Schaaren von Geraden, die einander gegenseitig schneiden, erfüllen eine krumme, windschiefe Fläche zweiter Ordnung, nämlich das „einfache Hyperboloid“ (hyperboloide à une nappe). Man kann daher, gemäss der vorstehenden Sätze auch sagen:

Digitized by Google

Endlich denke man sich irgend eine im Raume beliebig liegende Ebene $\mathfrak{E}$; so wird dieselbe sowohl von den Strahlen und Ebenen des räumlichen Strahlbüschels D, als auch von denen des räumlichen Strahlbüschels D_1 geschnitten, und dieselbe vereinigt zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, welche in Ansehung der Punkte und Geraden, in welchen sie von je einem Strahle jener Strahlbüschel und seiner Polare geschnitten werden, reciprok sind. Ein jeder Punkt dieser Ebenen, welcher auf seiner Polare liegt, ist zugleich auch ein Punkt der durch die Strahlbüschel D, D_1 erzeugten Fläche, und wenn in $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ kein solcher Punkt vorhanden ist, hat auch die Ebene $\mathfrak{E}$ mit dieser Fläche keinen Punkt gemein. Dem Lehrsatz 5. zufolge hat also die beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ mit dieser Fläche entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte gemein, und diese Punkte bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder eine einzige Gerade.

Erklärung.

Diejenige Fläche, welche mit einer sie schneidenden Ebene im Allgemeinen einen Kegelschnitt und folglich mit einer sie schneidenden Geraden höchstens zwei Punkte gemein hat, wird eine **Fläche der zweiten Ordnung** genannt; jede Ebene, welche mit einer solchen Fläche nur einen Punkt oder zwei Gerade oder nur eine Gerade gemein hat, heisst eine **Berührungsebene** dieser Fläche, und zwar jener Punkt oder der Durchschnittspunkt der zwei Geraden ihr **Berührungspunkt**, jene eine Gerade ihre **Berührungslinie**, und diesen letzteren Namen trägt auch jede Gerade, welche mit der Fläche nur einen Punkt gemein hat.

II. **Flächen zweiter Klasse**. Eine Ebene im Raume ist bestimmt, wenn irgend ein Punkt und eine Gerade derselben, welche nicht durch jenen Punkt geht, gegeben sind. Es seien nun $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend zwei im Raume beliebig liegende reciproke Ebenen; so ist durch die Gesammtheit ihrer entsprechenden Elementenpaare ein System von Ebenen bestimmt, dessen Gesetz zu ermitteln der Zweck der nächsten Betrachtung ist.

Es sei B der Mittelpunkt irgend eines ebenen Strahlbüschels in $\mathfrak{E}$; A_1 die Polare desselben in $\mathfrak{E}_1$, und a, b, c, d....; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... die entsprechenden Elementenpaare von B und A_1; ferner sei B_1 die durch B und A_1; und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... die durch a und $\mathfrak{a}_1$, b und $\mathfrak{b}_1$, c und $\mathfrak{c}_1$, d und $\mathfrak{d}_1$.... gelegten Ebenen,

---

Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projektivische Gerade A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloid, d. h. sie und alle ihre Projektionsstrahlen, nebst der Schaar Gerader, welche die letzteren schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloid."

Irgend zwei im Raume beliebig schiefliegende projektivische Ebenenbüschel A, A_1 erzeugen ein einfaches Hyperboloid, d. h. die Durchschnittslinien ihrer entsprechenden Ebenen, nebst der Schaar Gerader, welche dieselben schneiden, liegen in einem einfachen Hyperboloid."

Ist eine der Geraden a, b, c, d, e.... unendlich entfernt, oder, was einerlei ist, sind die Geraden A, A_1 projektivisch-ähnlich, so heisst die durch sie erzeugte Fläche „**hyperbolisches Paraboloid**", und dann ist auch eine der Geraden A, A_1, A_2, A_3, A_4.... unendlich entfernt u. s. w.

Digitized by Google

welche die Ebene B_1 in den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... eines Strahlbüschels B_1 schneiden. Diess vorausgesetzt, so ist

$$B(a, b, c, d....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....),$$

also auch

$$B(a, b, c, d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....);$$

demnach müssen, zufolge „Abh. der geom. Gest. §. 38. II.“ oder auch Archiv. Thl. IV. S. 252. 10., sämmtliche Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... nebst $\mathfrak{E}$ und B_1 einen und denselben Kegel K des zweiten Grades umhüllen, und zwar muss derselbe die Ebene $\mathfrak{E}$ in demjenigen Strahle e von B berühren, welcher in B_1 der Durchschnittslinie e_1 von $\mathfrak{E}$ und B_1, oder in $\mathfrak{E}_1$ dem Durchschnittspunkte $\mathfrak{e}_1$ der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Geraden A_1 entspricht. Und ebenso berührt K die Ebene B_1 in demjenigen Strahle m_1, und folglich die Gerade A_1 in demjenigen Punkte $\mathfrak{m}_1$, welcher derselben Durchschnittslinie von $\mathfrak{E}$ und B_1, nämlich dem Strahle m von B, entspricht.

Alle Ebenen des in Rede stehenden Systems, welche von einerlei Punkte B, B', B''.... der Ebene $\mathfrak{E}$ ausgehen, umhüllen also einen Kegel K, K', K''.... des zweiten Grades, und da die Punkte $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_1''$...., in welchen die Polaren A_1, A_1', A_1''.... der Punkte B, B', B''.... die Ebene $\mathfrak{E}$ treffen, alle in einer geraden Linie, nämlich in der Durchschnittslinie $(f_1 g)$ der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ liegen, so gehen sämmtliche Gerade e, e', e''...., in welchen die Kegel K, K', K''.... die Ebene $\mathfrak{E}$ berühren, durch einerlei Punkt $\mathfrak{f}$, den Pol der Geraden f_1. — Liegen die Punkte B, B', B''.... alle in einer Geraden m, so gehen ihre Polaren A_1, A_1', A_1''.... alle durch einerlei Punkt $\mathfrak{m}_1$; die Kegel K, K', K''.... haben sämmtlich diejenige Ebene B_1 gemein, welche durch m und $\mathfrak{m}_1$ geht, und berühren die Ebenen B_1, B_1', B_1''.... in denjenigen Strahlen m_1, m_1', m_1''...., und folglich die Geraden A_1, A_1', A_1''... in denjenigen Punkten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_1'$, $\mathfrak{m}_1''$...., welche in $\mathfrak{E}$ den Durchschnittslinien m, m', m''.... der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Ebenen B_1, B_1', B_1''.... entsprechen.

Das nämliche, was von einem beliebigen Punkte B der Ebene $\mathfrak{E}$ gilt, muss nun auch von einem jeden Punkte der Ebene $\mathfrak{E}_1$ gelten, d. h. alle von ihm ausgehende Ebenen unseres Systems umhüllen einen Kegel K_1 zweiten Grades, welcher auch die Ebene $\mathfrak{E}_1$ berührt, und sämmtliche Berührungslinien dieser Ebene und der verschiedenen Kegel K_1, K_1', K_1''.... gehen durch einerlei Punkt u. s. w.

Ist $\mathfrak{A}$ irgend eine Berührungsebene eines der Kegel K, K', K''...., welche einen Punkt der Ebene $\mathfrak{E}$ zum Scheitel haben, und hat $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{E}$ die Gerade a, mit $\mathfrak{E}_1$ die Gerade a_1 gemein, so liegt der Pol $\mathfrak{a}_1$ von a auf $\mathfrak{A}$ und also auch auf a_1, und demnach der Pol $\mathfrak{a}$ von a_1 auf der Geraden a. Die Ebene $\mathfrak{A}$ gehört also nicht nur einem Kegel, dessen Scheitel auf $\mathfrak{E}$ liegt, sondern auch einem Kegel, dessen Scheitel auf $\mathfrak{E}_1$ liegt, an, und man erhält also keine zwei besonderen Systeme von Ebenen, jenachdem man die Punkte von $\mathfrak{E}$ oder die Punkte von $\mathfrak{E}_1$ mit deren Polaren in $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ durch Ebenen verbindet. Ferner müssen die beiden Kegel,

Digitized by Google

deren Scheitel die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$ sind, die Ebene $\mathfrak{A}$ längs derselben Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ berühren.

Liegt der Punkt B auf der Durchschnittslinie $(f_1 g)$ von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, so fällt die Ebene B_1 mit $\mathfrak{E}_1$ zusammen, und der Kegel K berührt die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in denjenigen Geraden, welche den Punkt B mit den Polen von f_1 und g verbinden. Die Berührungsebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... dieses Kegels mögen die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in den Geraden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... schneiden; es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,... die Pole dieser Geraden; so bilden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... zwei proj. Strahlbüschel B, B_1, und die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... eine Gerade A, welche mit B_1; und die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... eine Gerade A_1, welche mit B projektivisch ist; also ist auch

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1....).$$

Aber $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$.... sind die Geraden, in welchen die Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... von je zwei Kegeln, deren Scheitel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$; $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$.... sind, berührt werden; folglich bilden alle diese Geraden, da sie die A, A_1 projektivisch schneiden, nebst A, A_1 ein einfaches Hyperboloid.

Endlich denke man sich irgend einen beliebig im Raume liegenden Punkt D; so ist derselbe der gemeinschaftliche Mittelpunkt zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel D, D_1, deren entsprechende Elementenpaare nach den entsprechenden Elementenpaaren der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gerichtet sind. Jede Ebene von D, welche ihre Polare von D_1 enthält, verbindet zwei entsprechende Elemente von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ und gehört also zu dem in Rede stehenden System von Ebenen; und wenn in D, D_1 keine solche Ebene existirt, so geht auch keine Ebene jenes Systems durch den Punkt D. Geht man nun auf die Sätze 5. und 18. zurück und trägt das dort von Punkten und Strahlen Gesagte auf deren Polaren über, wozu man offenbar berechtigt ist, so sieht man, dass unser System von Ebenen mit einem beliebigen Punkte D des Raumes entweder keine oder nur eine oder unzählige Ebenen gemein habe, und dass diese letzteren entweder einen Kegel des zweiten Grades umhüllen oder zwei Ebenenbüschel oder nur einen Ebenenbüschel bilden.

Erklärung.

Jedes System von Ebenen, welches mit einem beliebigen Punkte im Raume im Allgemeinen eine, einen Kegel zweiten Grades umhüllende Schaar von Ebenen und folglich mit einer beliebigen Geraden im Raume im Allgemeinen höchstens zwei Ebenen gemein hat, wird eine Fläche der zweiten Klasse genannt; jene Ebenen selbst heissen Berührungsebenen dieser Fläche; eine jede Gerade, durch welche unzählige solche Ebenen gehen, wird ein Strahl, und jeder Punkt, durch welchen nur eine solche Ebene geht oder in welchem zwei Strahlen der Fläche sich schneiden, ein Punkt der Fläche genannt.

Digitized by Google

Lehrsatz 30.

a) Zwei beliebig im Raume liegende reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1 erzeugen eine Fläche der zweiten Ordnung, welche auch durch ihre Mittelpunkte geht; nämlich die Durchschnittspunkte aller Strahlen des einen und ihrer Polaren im anderen liegen in einer solchen Fläche; und zwar wird dieselbe in den Mittelpunkten der Strahlbüschel von denjenigen Ebenen berührt, deren Polaren im gemeinschaftlichen Strahle derselben vereinigt sind.

b) Man erhält nur eine solche Fläche, man mag nun die Strahlen des einen Strahlbüschels oder die des anderen auf ihre Polaren beziehen.

c) Die Fläche wird in jedem ihrer Punkte von der Durchschnittslinie derjenigen zwei Ebenen der räumlichen Strahlbüschel berührt, deren Polaren nach diesem Punkte gehen.

d) Alle diese Durchschnittslinien, deren Berührungspunkte einer den beiden Strahlbüscheln gemeinschaftlichen Ebene angehören, bilden ein einfaches Hyperboloid.

a) Zwei beliebig im Raume liegende reciproke Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ erzeugen eine Fläche der zweiten Klasse, welche auch diese Ebenen selbst zu Berührungsebenen hat; nämlich die Verbindungsebenen aller Punkte der einen Ebene mit ihren Polaren in der anderen umhüllen eine solche Fläche; und zwar berührt dieselbe die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in denjenigen zwei Punkten, deren Polaren sich in der Durchschnittslinie beider Ebenen vereinigen.

b) Man erhält nur eine solche Fläche, man mag nun die Punkte der einen Ebene oder die der anderen mit ihren Polaren verbinden.

c) In jeder Berührungsebene der Fläche geht die Verbindungslinie derjenigen zwei Punkte der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, deren Polaren die Durchschnittslinien dieser Ebenen und jener Berührungsebene sind, durch einen Punkt der Fläche.

d) Alle diese Verbindungslinien, welche den durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gehenden Berührungsebenen angehören, bilden ein einfaches Hyperboloid.

Nun lässt sich aber auch umgekehrt zeigen, dass

Lehrsatz 31.

Alle Flächen der zweiten Ordnung sich durch reciproke Strahlbüschel, und zwar auf unzählige Weisen erzeugen lassen.

Alle Flächen der zweiten Klasse sich durch reciproke Ebenen, und zwar auf unzählige Weisen erzeugen lassen.

Digitized by Google

Beweis (links). Denn ist irgend eine Fläche F der zweiten Ordnung gegeben, so kann man drei Punkte D, D_1, $\mathfrak{s}$ derselben beliebig auswählen und durch zwei dieser Punkte, z. B. durch D_1 und $\mathfrak{s}$, zwei Ebenen M_1, M_1' legen, welche F in zwei Kegelschnitten K, K' schneiden, und sofort durch den dritten Punkt D und den Punkt $\mathfrak{s}$ eine beliebige dritte Ebene $(\sigma\sigma')$, welche den Kegelschnitt K zum zweitenmale im Punkte B, und den Kegelschnitt K' im Punkte B' schneidet. Vom Punkte D_1 aus denke man sich nach den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... des Kegelschnittes K die Strahlen s_1, a_1, b_1, c_1, d_1...., und nach den sämmtlichen Punkten $\mathfrak{s}'$ (d. h. $\mathfrak{s}$), $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... des Kegelschnittes K' die Strahlen s_1' (oder s_1), a_1', b_1', c_1', d_1'.... gezogen; so bilden diese Strahlen zwei ebene Strahlbüschel B_1, B_1', deren Mittelpunkte in D_1 liegen; ferner denke man sich vom Punkte D nach den Punkten B, B' die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ gezogen, und einmal durch $\mathfrak{A}$ und die Punkte $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... die Ebenen σ, α, β, γ, δ...., welche die Ebene M_1 in den Geraden s, a, b, c, d.... schneiden, sodann durch $\mathfrak{A}'$ und die Punkte $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... die Ebenen σ' (oder σ), α', β', γ', δ'.... gelegt, welche die Ebene M_1' in den Geraden s', a', b', c', d'.... schneiden; so bilden die genannten Ebenen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und die neuen Geraden zwei ebene Strahlbüschel B, B', und zwar ist:

$$B_1(s_1, a_1, b_1, c_1, d_1 ...) = B(s, a, b, c, d ...) \equiv \mathfrak{A}(\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta ...)$$

und

$$B_1'(s_1', a_1', b_1', c_1', d_1' ...) = B'(s', a', b', c', d' ...) \equiv \mathfrak{A}'(\sigma', \alpha', \beta', \gamma', \delta' ...);$$

also auch

$$B_1(s_1, a_1, b_1, c_1, d_1 ...) = \mathfrak{A}(\sigma, \alpha, \beta, \gamma, \delta ...)$$

und

$$B_1'(s_1', a_1', b_1', c_1', d_1' ...) = \mathfrak{A}'(\sigma', \alpha', \beta', \gamma', \delta' ...).$$

Betrachtet man nun die Punkte D, D_1 als die Mittelpunkte zweier räumlichen Strahlbüschel D, D_1, so hat man in dem einen zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und in dem anderen zwei ebene Strahlbüschel B_1, B_1', welche bezüglich mit den ersteren in Ansehung der Elementenpaare, die sich in den Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... der Fläche F schneiden, projektivisch sind, und zwar entspricht der gemeinschaftlichen Ebene $(\sigma\sigma')$ von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ der gemeinschaftliche Strahl $(s_1 s_1')$ von B_1, B_1'. Also darf man festsetzen: die räumlichen Strahlbüschel D, D_1 sollen reciprok, und zwar die Elementenpaare $\mathfrak{A}$ und M_1, $\mathfrak{A}'$ und M_1'; σ, α, β, γ, δ.... und s_1, a_1, b_1, c_1, d_1....; σ', α', β', γ', δ'.... und s_1', a_1', b_1', c_1', d_1'.... sollen entsprechende Elementenpaare von D, D_1 selber sein. Aber, kraft des vorigen Satzes, erzeugen diese Strahlbüschel eine Fläche zweiter Ordnung F', welche durch die Punkte D, D_1 und durch sämmtliche Punkte B, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., B, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$.... der Kegelschnitte K, K' geht; ist also $\mathfrak{k}$ ein beliebiger Punkt der Fläche F', so kann man sich durch die Punkte D und $\mathfrak{k}$ allemal eine Ebene gelegt denken, welche die Kegelschnitte K, K' in zwei Punktenpaaren $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$; $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ schneidet, und da nun die beiden Kegelschnitte, welche diese Ebene

mit den Flächen F, F' gemein hat, durch die nämlichen fünf Punkte D, m, n, m', n' gehen, also zusammenfallen, so muss auch der dem einen angehörige Punkt $\mathfrak{t}$ auf dem anderen und somit auf der Fläche F liegen; folglich die durch die reciproken Strahlbüschel D, D_1 erzeugte Fläche F' mit der gegebenen Fläche F identisch sein, w. z. b. w.

Der Beweis der rechten Seite wird auf ähnliche Weise geführt, und man ist also nun berechtigt, die allgemeine Eintheilung und die Eigenschaften der durch reciproke Gebilde erzeugten Flächen des zweiten Grades als die der sämmtlichen Flächen dieses Grades auszusprechen. Unter anderen leuchten nun folgende zwei Sätze ein:

Lehrsatz 32.

Eine Fläche der zweiten Ordnung hat mit einer beliebigen Ebene im Raume entweder keinen oder nur einen oder unzählige Punkte gemein, und diese letzteren bilden entweder einen Kegelschnitt oder zwei Gerade oder nur eine einzige Gerade.

An eine Fläche der zweiten Klasse gehen von einem beliebigen Punkte im Raume entweder keine oder nur eine oder unzählige Berührungsebenen, und diese letzteren umhüllen entweder einen Kegel des zweiten Grades oder bilden zwei Ebenenbüschel oder nur einen einzigen Ebenenbüschel.

Lehrsatz 33.

Ist irgend eine Fläche der zweiten Ordnung gegeben, so darf man vier Punkte D, D_1, B, $\mathfrak{s}$ derselben beliebig auswählen und, nachdem man zwei dieser Punkte, z. B. D, D_1, bezüglich mit B und $\mathfrak{s}$ durch zwei Gerade $\mathfrak{A}$ und s_1 und mit beiden Punkten B, $\mathfrak{s}$ durch zwei Ebenen σ und M_1 verbunden hat, festsetzen: die Punkte D, D_1 sollen die Mittelpunkte zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel, welche die gegebene Fläche erzeugen, und die Ebenen σ und M_1 sollen die Polaren der Strahlen s_1 und $\mathfrak{A}$ sein.

Ist irgend eine Fläche der zweiten Klasse gegeben, so darf man vier Berührungsebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{B}$, σ derselben beliebig auswählen und, wenn A, s_1 die Durchschnittslinien, $\mathfrak{s}$ und m_1 die Durchschnittspunkte zweier dieser Ebenen, z. B. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, und bezüglich der einzelnen Ebenen $\mathfrak{B}$, σ und wieder beider Ebenen $\mathfrak{B}$, σ zugleich bezeichnen, festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok sein und die gegebene Fläche erzeugen, und zwar sollen die Punkte $\mathfrak{s}$ und m_1 die Pole der Geraden s_1 und A in diesen Ebenen sein.

Digitized by Google

§. 4.

Klassifikation der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse.

I. Zwei reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1 mögen ganz beliebig im Raume liegen; es sei $\mathfrak{A}_1$ ihr gemeinschaftlicher Strahl; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... ihre gemeinschaftlichen Ebenen; a, b, c, d.... die den letzteren in D entsprechenden Strahlen, und a_1, b_1, c_1, d_1.... diejenigen Strahlen, in welchen die Ebene der a, b, c, d...., oder die Polare von $\mathfrak{A}_1$, von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1.... geschnitten wird; so bilden a, b, c, d.... und a_1, b_1, c_1, d_1.... zwei concentrische ebene Strahlbüschel B, B_1; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$, und es ist

$$B(a,b,c,d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1...),$$

also

$$B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....).$$

Es sind nun, nach Archiv Thl. IV. S. 252., drei und zwar nur drei Fälle denkbar: *a*) Entweder besitzen die concentrischen proj. ebenen Strahlbüschel B, B_1 zwei, oder *b*) nur einen oder *c*) keinen Strahl, in welchem sich entsprechende Strahlen vereinigen, oder mit anderen Worten: Von den Ebenen α_1, β_1, γ_1, δ_1... gehen entweder zwei, oder nur eine oder keine durch ihre Polare in D. Geht aber irgend eine jener Ebenen, z. B. α_1, durch ihre Polare a, und man rechnet dieselbe jetzt zu D, so muss ihre Polare in D_1 gleichfalls auf α_1, d. h. auf dieser Ebene liegen.

a) Es seien in Taf. V. Fig. 5. DMD_1 und $DM'D_1$ zwei, den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebenen, welche durch ihre Polaren DM, D_1M und DM', D_1M' gehen. Da allen Ebenen α, β, γ, δ...., welche z. B. durch DM gehen, lauter Strahlen von D_1, die in der Ebene DMD_1 liegen, entsprechen müssen, so gehören alle Punkte der Geraden DM, und ebenso auch die der Geraden D_1M, DM', D_1M', zu der durch D, D_1 erzeugten Fläche F. Es sei nun $DM\mathfrak{b}$ oder B irgend eine durch DM gehende Ebene, welche die Ebene $DM'D_1$ in der Geraden $D\mathfrak{b}$ oder b schneidet, und es seien a, c, d.... sämmtliche übrigen in B liegenden Strahlen von D; D_1B_1 oder $\mathfrak{A}_1$ sei die auf DMD_1 liegende Polare der Ebene B, welche DM in B_1 schneidet, und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die Polaren der Strahlen a, b, c, d...., welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ bilden und die Ebene B in den Geraden a_1, b_1, c_1, d_1...., so wie die Strahlen a, b, c, d.... in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... schneiden; so ist

$$B(a,b,c,d....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1...) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1...).$$

also

$$B(a,b,c,d....) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1....).$$

Aber dem Strahle DM von B entspricht in $\mathfrak{A}_1$ die Ebene DMD_1 und folglich in B_1 ein mit DM vereinigter Strahl; also sind die

Digitized by Google

ebenen Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, d. h. sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... — Punkte, welche der Fläche F angehören — liegen in einer Geraden A; und da die Polare des Strahles b durch D_1B_1 und durch D_1M' gehen muss, also mit der Ebene $D_1M'B_1$ einerlei ist, so gehört der Punkt $\mathfrak{b}$ der Geraden D_1M' an, oder die Gerade A begegnet den Linien DM und D_1M' zugleich.

Die Fläche F wird also von allen Ebenen, welche durch eine der vier Linien DM, D_1M, DM', D_1M', z. B. durch DM, gehen, in lauter geraden Linien geschnitten, zu denen auch DM' und D_1M gehören, und alle diese Linien treffen auch die Linien D_1M'.

Es seien nun in Taf. V. Fig. 6. $D\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $D\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $D\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $D\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$.... oder α, β, γ, δ.... sämmtliche durch DM gehende Ebenen, welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ bilden; A, B, C, D.... die in denselben und in der Fläche F liegenden Geraden; α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die durch D_1M' und dieselben Geraden gehenden Ebenen, welche einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ bilden; und eine den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebene, welche weder mit DMD_1 noch mit $DM'D_1$ identisch ist, schneide die Geraden A, B, C, D.... in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$....; so liegen diese Punkte in einem Kegelschnitte (oder in einer Geraden), indem sie der Fläche F angehören, und verbindet man dieselben mit D, D_1 durch die Strahlen a, b, c, d....; a_1, b_1, c_1, d_1...., so bilden die letzteren zwei projektivische ebene Strahlbüschel, von denen der eine mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, der andere mit dem Ebenenbüschel $\mathfrak{A}_1$ perspektivisch ist; also ist

$$\mathfrak{A}(\alpha, \beta, \gamma, \delta....) = \mathfrak{A}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1....).$$

Da nun die Achsen DM, D_1M' dieser Ebenenbüschel sich nicht schneiden, so folgt aus dem letzteren, dass die sämmtlichen Geraden A, B, C, D.... die eine Schaar der Geraden eines einfachen Hyperboloids bilden, zu dessen anderer Schaar DM und D_1M' gehören; d. h. die Fläche F ist im Falle a) ein *einfaches Hyperboloid*.

b) Gibt es nur einen Strahl DM und D_1M, welcher auf seiner Polare DMD_1 liegt, so zeigt man, wie vorhin, dass jede Ebene B, welche durch DM (oder D_1M) geht, die Fläche F in einer Geraden A schneidet. Ist nun B_1 die durch den Punkt D_1 und die Gerade A gehende Ebene, so muss, eben weil A eine der Fläche F angehörige Gerade ist, von allen Strahlen in der Ebene B_1 einer auf seiner Polare liegen, also, da D_1M der einzige derartige Strahl ist, mit diesem zusammenfallen. Die Gerade A trifft also die beiden Geraden DM und D_1M, geht demnach, da sie nicht in die Ebene DMD_1 fällt, durch den Punkt M. Somit schneiden alle durch DM und D_1M gelegten Ebenen die Fläche F in geraden Linien, welche durch einerlei Punkt M gehen, und weil jede von DMD_1 verschiedene, den Strahlbüscheln D, D_1 gemeinschaftliche Ebene die Fläche F in einem Kegelschnitte schneidet, so ist diese Fläche im Falle b) ein *Kegel des zweiten Grades*.

c) Enthielte in diesem dritten Falle die Fläche F eine gerade Linie, so würde die nach dieser letzteren gehende Ebene des

Digitized by Google

Strahlbüschels D oder D_1 einen Strahl enthalten müssen, welcher auf seiner Polare liegt, was gegen die Voraussetzung streitet.

Auf die so eben betrachteten drei Fälle und die denselben entsprechenden drei Hauptgattungen von Flächen der zweiten Ordnung kommt man zurück, wenn man von der Art des Schnittes einer beliebigen Ebene $\mathfrak{E}$ mit der Fläche F ausgeht. Besteht nämlich 1) dieser Schnitt aus zwei Geraden (AA_1) und $(A'A_1')$, so sind in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten zwei reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die Pole dieser Geraden ein einziges Paar Punkte (B_1B) und $(B_1'B')$, welche mit dem Durchschnitte jener Geraden in einer geraden Linie S liegen; und jedem Punkte der ersteren, z. B. von A, entspricht ein durch ihn selbst gehender Strahl von B_1, sowie demselben Punkte, insofern er zu A_1 gezählt wird, ein durch ihn selbst gehender Strahl von B. Legt man nun durch die Gerade DD_1 und den Punkt (BB_1) eine Ebene, welche (AA_1) in $\mathfrak{m}$, $(A'A_1')$ in $\mathfrak{m}_1$ schneidet, so ist die Polare dieser Ebene, insofern sie zu D gehört, der nach $\mathfrak{m}_1$ gehende Strahl von D_1, und die Polare derselben Ebene, insofern sie zu D_1 gehört, der nach $\mathfrak{m}$ gehende Strahl von D. Die Polaren dieser Ebene liegen also auf ihr selbst und das nämliche gilt von der durch DD_1 und $(B'B_1')$ gelegten Ebene. Jenachdem also die Gerade S mit der Geraden DD_1 in einerlei Ebene liegt oder nicht, ist der Fall b) oder a) vorhanden.

Ist 2) der Schnitt von F und $\mathfrak{E}$ nur eine einzige Gerade (AA_1), so hat dieselbe in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten reciproken Ebenen nur einen Pol (B_1B), und ein jeder Strahl des letzteren nur einen auf ihm selbst und auf (AA_1) liegenden Pol. Die Polaren derjenigen Ebene also, welche durch DD_1 und (BB_1) gelegt wird, gehen nach dem Durchschnitte dieser Ebene und der Geraden (AA_1) und liegen also auf ihr selber. Gäbe es nun eine zweite durch DD_1 gehende Ebene, deren Polaren auf ihr selber liegen, so würde in den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ die Durchschnittslinie der letzteren und jener Ebene die Polare eines auf ihr liegenden Punktes sein, also durch den Punkt (BB_1) gehen; diese zweite Ebene würde also in der That von der ersteren nicht verschieden sein. Der in Rede stehende Fall ist also mit dem früheren b) identisch.

3) Hat die Ebene $\mathfrak{E}$ nur einen Punkt B mit F gemein, so hat dieser Punkt in den mit $\mathfrak{E}$ vereinigten reciproken Ebenen nur eine einzige Polare A. Existirte nun eine Ebene DMD_1, welche ihre Polaren DM, D_1M enthielte, so würden diese letzteren beide durch den Punkt B, und die Ebene selbst durch die Gerade A gehen müssen, und es könnte wenigstens keine zweite solche Ebene existiren. Es ist also dieser Fall mit b) oder c) identisch, jenachdem die Geraden DD_1 und A in einerlei Ebene liegen oder nicht.

4) Ist der Schnitt der Ebene $\mathfrak{E}$ und der Fläche F ein Kegelschnitt, so kann jeder der Fälle a), b), c) stattfinden.

II. Sind andererseits $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend zwei reciproke Ebenen im Raume; A_1 der Durchschnitt beider; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... die Punkte von A_1; a, b, c, d.... die in $\mathfrak{E}$ liegenden Polaren dieser Punkte, welche einen Strahlbüschel B bilden, und a_1, b_1, c_1, d_1... die Strahlen eines mit B concentrischen Strahlbüschels B_1, welche nach jenen Punkten gehen; so ist

Digitized by Google

$$B(a, b, c, d \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.),$$

also

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.).$$

Entweder nun besitzen die Strahlbüschel B, B_1 *a*) **zwei**, oder *b*) **nur einen**, oder *c*) **keinen** Strahl, in welchem sich entsprechende vereinigen, d. h. von den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... liegen entweder zwei, oder nur einer, oder keiner auf seiner Polare. Liegt aber irgend ein Punkt von A_1 auf seiner Polare in $\mathfrak{E}$, so liegt er auch auf seiner Polare in $\mathfrak{E}_1$.

a) Es seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zwei Punkte der Geraden A_1, welche auf ihren Polaren m, m' in $\mathfrak{E}$, und m_1, m_1' in $\mathfrak{E}_1$ liegen. Da allen Punkten der Linie m solche Gerade in $\mathfrak{E}_1$ entsprechen, welche durch den Punkt $\mathfrak{m}$ gehen, so sind alle Ebenen, welche durch $\mathfrak{m}$ gehen, und desgleichen alle, welche durch m_1, m', m_1' gehen, Berührungsebenen der Fläche F, die durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ erzeugt wird.

Es sei nun B irgend ein Punkt von m, welcher mit dem Punkte $\mathfrak{m}'$ die Linie b gemein hat; a, c, d.... beliebige andere Strahlen von B; A_1 die (vom Durchschnitte der $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ jetzt zu unterscheidende) Polare des Punktes B in $\mathfrak{E}_1$, und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... die Pole von a, b, c, d...., welche mit dem Punkte B die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1.... und mit den Geraden a, b, c, d.... die Ebenen α, β, γ, δ.... gemein haben; so ist

$$B(a, b, c, d \ldots.) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1 \ldots.) \equiv B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.),$$

also

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.).$$

Aber dem Strahle m von B entspricht in $\mathfrak{E}_1$ der Punkt $\mathfrak{m}$, und somit in B_1 ein mit m vereinigter Strahl; also liegen die concentrischen ebenen Strahlbüschel B, B_1 perspektivisch, d. h. sämmtliche Ebenen α, β, γ, δ.... oder die Berührungsebenen von F, welche durch den Punkt B gehen, schneiden sich in einer Geraden $\mathfrak{A}$, welche auch der Geraden m begegnet; und da dem Strahle b ein auf m_1' liegender Punkt entspricht, also die Ebene β durch m_1' geht, so begegnet die $\mathfrak{A}$ auch der m_1'.

Sind nun $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$..... die verschiedenen, durch sämmtliche Punkte B von m erhaltenen Geraden, und legt man durch dieselben und einen beliebigen Punkt, z. B. durch einen, den Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gemeinschaftlichen Punkt (BB_1), die Ebenen α, β, γ, δ...., welche $\mathfrak{E}$ in a, b, c, d....; $\mathfrak{E}_1$ in a_1, b_1, c_1, d_1.... schneiden, so umhüllen diese, als Berührungsebenen der Fläche F, einen Kegel zweiten Grades, welcher auch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ berührt; also ist

$$B(a, b, c, d \ldots.) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1 \ldots.),$$

und folglich sind auch die Geraden m, m_1' hinsichtlich der Punkte, in denen sie von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... getroffen werden, projektivisch; d. h. die Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$...., wozu auch m' und m_1 gehören, durch welche sämmtliche Berührungsebenen von F gehen, bilden

Digitized by Google

die eine Schaar, und m, $m_1{}'$ gehören zur anderen Schaar Gerader eines einfachen Hyperboloids.

b) Fallen, um das Räsonnement abzukürzen, die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$ zusammen, so schneiden sich die Geraden m, $m_1{}'$; und folglich umhüllen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... nebst m, $m_1{}'$ einen Kegelschnitt, ohne dass jedoch die Ebenen α, β, γ, δ.... einen Kegel zweiten Grades umhüllen, indem dieselben nicht durch einerlei Punkt gehen.

c) Gibt es keinen Punkt $\mathfrak{m}$, so können auch keine drei Berührungsebenen von F durch eine Gerade gehen; denn sonst würde der Durchschnittspunkt dieser letzteren mit der Ebene $\mathfrak{E}$ (oder $\mathfrak{E}_1$) einen Strahl in $\mathfrak{E}$ enthalten, dessen Pol auf ihm selber läge.

Auf ähnliche Weise, wie oben, lässt sich ferner darthun, dass wenn die von einem beliebigen Punkte im Raume an die Fläche F gehenden Berührungsebenen zwei Ebenenbüschel bilden, die Fälle *a*) oder *b*); wenn sie nur einen Ebenenbüschel bilden, bloss der Fall *b*); wenn nur eine einzige Berührungsebene an F geht, die Fälle *b*) oder *c*), und wenn unzählige Ebenen, die einen Kegel zweiten Grades umhüllen, alle drei Fälle *a*), *b*), *c*) stattfinden können.

Durch die beiden letzten Betrachtungen hat sich uns also nun folgende ganz allgemeine Eintheilung der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse ergeben:

Lehrsatz 34.

Eine jede Fläche der zweiten Ordnung ist entweder ein Kegel des zweiten Grades, oder im Allgemeinen ein einfaches Hyperboloid, oder eine durchaus krummlinige Fläche, welche mit einer beliebigen Ebene entweder einen Kegelschnitt oder nur einen Punkt oder keinen Punkt gemein hat.

Eine jede Fläche der zweiten Klasse ist entweder ein Kegelschnitt, durch dessen Tangenten, oder im Allgemeinen ein einfaches Hyperboloid, durch dessen Geraden die Berührungsebenen der ersteren gehen, oder eine Fläche, an welche von einem beliebigen Punkte des Raumes entweder unzählige, einen Kegel des zweiten Grades umhüllende Berührungsebenen, oder nur eine einzige oder gar keine gehen.

Ein dem so eben gebrauchten untergeordneter Eintheilungsgrund der Flächen der zweiten Ordnung und Klasse ist derjenige, welcher von den unendlich entfernten Punkten und Berührungsebenen hergenommen wird; doch ist derselbe für die ersteren bei Weitem ergiebiger, als für die letzteren, indem hier nur der eine Fall, dass die Mittelpunkte der reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ unendlich entfernt sind, und also eine einzige unendlich entfernte Berührungsebene vorhanden ist, in Betracht kommen kann. — Wendet man den Lehrsatz 20. auf die Strahlbüschel D, D_1 an, welche eine Fläche der zweiten Ordnung erzeugen, so sieht man sogleich,

Digitized by Google

weil jeder Strahl, welcher mit seiner Polare parallel ist, einen unendlich entfernten Punkt der Fläche F bestimmt, dass eine solche Fläche entweder 1) keinen, oder 2) nur einen oder unzählige unendlich entfernte Punkte besitzt, und dass die nach diesen Punkten gehenden Strahlen eines beliebigen Punktes entweder 3) einen Kegel des zweiten Grades oder 4) zwei Ebenen, oder 5) eine einzige Ebene bilden. Im ersten Falle, welcher offenbar bei keiner geradlinigen Fläche stattfinden kann, heisst die erzeugte Fläche Ellipsoid, im dritten Falle, wenn dieselbe ebenfalls keine geraden Linien enthält, elliptisches Hyperboloid, und im zweiten unter derselben Bedingung elliptisches Paraboloid. Der dritte Fall tritt ausserdem beim Kegel ein, wenn sein Scheitel in endlicher Entfernung liegt, und bei dem einfachen Hyperboloid; und der zweite, vierte und fünfte beim Kegel, wenn sein Scheitel unendlich entfernt, und seine Grundfläche bezüglich eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist (elliptischer, hyperbolischer, parabolischer Cylinder). Endlich gilt der vierte Fall auch noch vom hyperbolischen Paraboloid, nach dessen unendlich entfernten Geraden die beiden Ebenen gerichtet sind, und dasselbe heisst gleichseitig, wenn diese Ebenen auf einander senkrecht sind.

Lehrsatz 35.

Alle Flächen der zweiten Ordnung zerfallen in folgende drei Hauptgattungen und deren Arten: 1) der Kegel nebst dem elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Cylinder; 2) geradlinige windschiefe Flächen, nämlich das einfache Hyperboloid nebst dem hyperbolischen Paraboloid; 3) durchaus krummlinige Flächen, das Ellipsoid, das elliptische Hyperboloid und das elliptische Paraboloid.

Eine Aufgabe, welche über die Grenzen dieser Abhandlung hinausgeht, ist, zu zeigen, dass jede Fläche der zweiten Klasse zugleich eine Fläche der zweiten Ordnung ist; und dann ergibt sich, dass nur das elliptische Paraboloid eine unendlich entfernte Berührungsebene mit einem einzigen Berührungspunkte, und nur der parabolische Cylinder eine solche Ebene mit einer Berührungslinie besitzt.

Aufgabe.

Mittels reciproker räumlicher Strahlbüschel eine Kugel zu erzeugen.

Auflösung. Man lege zwei reciproke gleiche räumliche Strahlbüschel dergestalt, dass jeder Strahl des einen auf seiner Polare senkrecht steht; so erzeugen dieselben, was unmittelbar einleuchtet, eine Kugel, deren Durchmesser der gemeinschaftliche Strahl ist.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein einfaches Hyperboloid zu erzeugen.

Digitized by Google

Auflösung. *a*) Man wähle einen beliebigen Strahl g in D und eine durch denselben gehende Ebene φ, suche in D_1 die Polare f_1 von φ und die durch letztere gehende Polare χ_1 von g, und lege nun die Strahlbüschel D, D_1 so, dass die Strahlen g und f_1, nicht aber die Ebenen φ und χ_1 zusammenfallen; so erzeugen sie ein einfaches Hyperboloid. *b*) Oder man gebe den Strahlbüscheln eine beliebige Lage; erzeugen dieselben nun nicht die verlangte Fläche, so drehe man den einen so herum, dass die vereinigt gewesenen Strahlen in entgegengesetzter Richtung wieder zusammenfallen; so entsteht nothwendig ein einfaches Hyperboloid.

Beweis *a*) ähnlich wie oben im Falle *a*); *b*) denn durch die Umdrehung erhält man dann nothwendig zwei ungleichliegende ebene Strahlbüschel B, B_1, von welchen zu Anfang dieses Paragraphen die Rede war, und es muss also der dortige Fall *a*) eintreten.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel einen Kegel des zweiten Grades zu erzeugen.

Auflösung. Man verfahre ebenso, wie in der vorigen Aufgabe: doch lasse man jetzt auch die Ebenen φ und χ_1 zusammenfallen.

Beweis. Denn dann hat die Ebene $(\varphi\chi_1)$ mit der Fläche nur den einen Strahl $(f_1 g)$ gemein, eine Eigenschaft, welche der Kegel ausschliesslich besitzt.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein hyperbolisches Paraboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in involutorische Lage, suche eine Brennebene derselben und drehe nun den einen Strahlbüschel dergestalt um seinen Mittelpunkt, dass die in dieser Brennebene vereinigten Ebenen vereinigt bleiben, und jeder Strahl derselben einen Winkel von 90^0 beschreibt; so wird jetzt ein jeder solche Strahl auf seiner Polare liegen. Wird nun der eine Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine Stelle des Raumes versetzt, so werden alle jene Strahlen mit ihren Polaren parallel sein und folglich unzählige, in gerader Linie liegende, unendlich entfernte Punkte bestimmen, im Allgemeinen also die erzeugte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein Ellipsoid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige concentrische, z. B. involutorische Lage, in welcher dieselben keinen Kegel erzeugen, und versetze dann den einen Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine Stelle des Raumes; so wird

Digitized by Google

kein Strahl des einen, noch des anderen, mit seiner Polare parallel sein, die erzeugte Fläche also auch keinen unendlich entfernten Punkt enthalten können. Dieselbe muss also ein Ellipsoid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein elliptisches Hyperboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige concentrische Lage, in welcher dieselben einen Kegel erzeugen, und versetze jetzt, was immer möglich ist, den einen parallel mit sich selber und, ohne dass ein Strahl des Kegels auf seiner Polare verharrt, in irgend eine Stelle des Raumes; so werden erstlich alle Strahlen des Kegels jetzt mit ihren Polaren parallel sein und folglich unzählige unendlich entfernte Punkte bestimmen, deren Richtungen mit den Strahlen eines Kegels parallel sind; zweitens wird weder ein Strahl jenes Kegels, noch auch irgend ein anderer Strahl auf seiner Polare liegen, weil ein solcher letzterer vor der Trennung der Strahlbüschel seine Polare durchschnitt, und folglich auch nach derselben durchschneiden muss. Die erzeugte Fläche kann also aus dem letzteren Grunde keine geradlinige, und muss folglich aus dem ersteren ein elliptisches Hyperboloid sein.

Aufgabe.

Mittels zweier beliebig gegebener reciproker räumlicher Strahlbüschel ein elliptisches Paraboloid zu erzeugen.

Auflösung. Man bringe die gegebenen Strahlbüschel in diejenige involutorische Lage, in welcher dieselben einen Kegel erzeugen. Im **Allgemeinen** wird nun eine, auf einem Strahle dieses Kegels senkrechte Ebene denselben in einer Ellipse schneiden, und dreht man nun den einen Strahlbüschel um diesen Strahl, und zwar um einen Winkel von zwei Rechten herum, so werden die in jener Ebene vereinigten reciproken Ebenen, kraft Lehrsatz 2., nur einen einzigen Punkt besitzen, welcher auf seiner Polare liegt; und daher auch in den beiden Strahlbüscheln bloss jener eine Strahl auf seiner Polare liegen. Versetzt man also jetzt den einen Strahlbüschel parallel mit sich selber in irgend eine andere Stelle des Raumes, so wird auch nur ein einziger Strahl mit seiner Polare parallel sein; die erzeugte Fläche also, weil sie nur einen unendlich entfernten Punkt besitzt, im Allgemeinen ein elliptisches Paraboloid sein müssen.

Aufgabe.

Zwei beliebig gegebene reciproke räumliche Strahlbüschel so zu legen, dass die durch dieselben erzeugte Fläche der zweiten Ordnung in der Richtung einer gegebenen Ebene in lauter Kreisen geschnitten werde.

Auflösung. Man lege die gegebenen Strahlbüschel D, D_1 involutorisch und suche eine Brennebene derselben. Jetzt gebe man denselben, ohne ihre Lage zu einander zu ändern, eine solche

Digitized by Google

Lage im Raume, dass diese Brennebene mit der gegebenen Richtungsebene parallel laufe, und versetze den einen Strahlbüschel, z. B. D_1, parallel mit sich selber und so, dass die Polaren der Brennebene auf einander liegen bleiben, in irgend eine Stelle des Raumes; so haben beide Strahlbüschel die geforderte Lage.

Beweis. Bei der involutorischen Lage von D, D_1 seien B, B_1 die von den zug. harm. Polaren der Brennebene gebildeten Strahlbüschel, in welchen also die zug. Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... lauter rechte Winkel einschliessen; und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}$ seien die vereinigten harm. Polaren jener Ebene; ferner seien α, β, γ, δ.... die durch $\mathfrak{A}$ und a, b, c, d.... gehenden Ebenen, d. h. die harm. Polaren von a_1, b_1, c_1, d_1....; und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... die durch $\mathfrak{A}_1$ und a_1, b_1, c_1, d_1.... gehenden Ebenen oder die harm. Polaren von a, b, c, d....; ferner a', b', c', d'.... diejenigen Strahlen von B, welche mit a_1, b_1, c_1, d_1....; und wieder a_1', b_1', c_1', d_1'.... diejenigen Strahlen von B_1, welche mit a, b, c, d.... vereinigt sind; endlich α', β', γ', δ'.... die mit α_1, β_1, γ_1, δ_1.... vereinigten Polaren von a_1', b_1', c_1', d_1'....; und α_1', β_1', γ_1', δ_1'.... die mit α, β, γ, δ.... vereinigten Polaren von a', b', c' d'.... Wird nun der Strahlbüschel D_1 auf die angegebene Weise von D getrennt, so bleiben je zwei Ebenen α und α_1'; β und β_1'....α' und α_1; β' und β_1.... vereinigt, und die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 und deren Strahlenpaare a, a_1'; b, b_1'.... a', a_1; b', b_1.... werden mit einander und der geg. Richtungsebene parallel. Ist nun $\mathfrak{E}$ irgend eine Ebene, welche die erzeugte Fläche F in der geg. Richtung schneidet, so sind in derselben zwei Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ vereinigt, welche in Ansehung der Punkte und Geraden, in denen sie von den entsprechenden Elementenpaaren der D, D_1 geschnitten werden, reciprok sind. Aber der unendlich entfernten Geraden von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ entspricht in doppeltem Sinne ein und derselbe Punkt, derjenige nämlich, welcher dem gem. Strahle ($\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$) der räumlichen Strahlbüschel angehört, und je zwei zug. Durchmesser von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sind mit je zwei Strahlen a, a_1; b, b_1.... oder a', a_1'; b', b_1'.... oder auch a, a'; b, b'.... parallel, bilden also eine Involution der rechten Winkel. Folglich sind die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ involutorisch, und die Linie, in welcher sie die Fläche F schneiden, ist ein Kreis. Auch sieht man, dass die Ebenen der Strahlbüschel B, B_1 zwei parallele Berührungsebenen dieser Fläche sind.

Zusatz. Haben die geg. Strahlbüschel D, D_1, involutorisch gelegt, nur eine einzige Brennebene, d. h. fällt die letztere mit einer Achsenebene zusammen, so stehen sämmtliche Kreise, in welchen die Fläche F geschnitten wird, auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht; die Fläche F kann also durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Achse erzeugt werden, und heisst in diesem Falle ein Konoid.

§. 5.

Konstruktion der Flächen des zweiten Grades mittels neun gegebener Punkte oder Berührungsebenen.

Sind D, D_1, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ zehn im Raume beliebig gegebene Punkte, und man verbindet irgend zwei dersel-

Digitized by Google

ben, z. B. D, D_1, mit den acht übrigen durch die Strahlen a, b, c, d, e, f, g, h und $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1, h_1$, welche zwei beliebige, fest im Raume liegende Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ bezüglich in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_1$ schneiden, so kann man durch eine analytische Betrachtung versucht werden, festzusetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Polaren der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sollen durch die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_1$ gehen.

Denn sind für ein beliebiges Coordinatensystem x, y die Coordinaten eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{E}$, und für ein anderes beliebiges Coordinatensystem x_1, y_1 die Coordinaten eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{E}_1$, so ist

$$(ay+bx+c)y_1+(a'y+b'x+c')x_1+a''y+b''x+c''=0$$

die Gleichung einer Geraden in $\mathfrak{E}_1$, welche dem beliebigen Punkte (xy) von $\mathfrak{E}$ entspricht, und zugleich in der Form

$$(ay_1+a'x_1+a'')y+(by_1+b'x_1+b'')x+cy_1+c'x_1+c''=0$$

die Gleichung einer Geraden in $\mathfrak{E}$, welche dem beliebigen Punkte (x_1y_1) von $\mathfrak{E}_1$ entspricht, und es ist leicht zu zeigen, dass alle, den verschiedenen Punkten jener ersteren Geraden entsprechenden Geraden von $\mathfrak{E}$ durch einerlei Punkt, und umgekehrt, gehen, und dass jede solche Gerade und ihr entsprechender Strahlbüschel hinsichtlich ihrer entspr. Elementenpaare projektivisch sein müssen. Diese Gleichung, deren Constanten sich auf acht reduciren lassen, drückt also dieselbe Beziehung der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ auf einander aus, welche wir mit dem Namen der Reciprocität bezeichnet haben.

Setzt man in derselben nun an die Stelle von x, y und x_1, y_1 nach einander die Coordinaten der gegebenen acht Punktenpaare $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}_1$, so erhält man acht Gleichungen mit den nämlichen acht Constanten, von denen eine jede, z. B. die erste, ausdrückt, dass die Polare des Punktes $\mathfrak{a}$ durch den Punkt $\mathfrak{a}_1$ gehe; und durch jene Gleichungen sind diese Constanten bestimmt.

Hat diess nun aber seine Richtigkeit, und man denkt sich D, D_1 als die Mittelpunkte zweier räumlichen Strahlbüschel, deren Strahlen und Ebenen bezüglich nach den entspr. Elementenpaaren von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ gerichtet sind, so sind auch diese Strahlbüschel reciprok, und zwar werden die Strahlen a, b, c, d, e, f, g, h von ihren Polaren in den Punkten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{d}_0$, $\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{f}_0$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}_0$ geschnitten, und folglich wird die durch D, D_1 erzeugte Fläche der zweiten Ordnung durch die gegebenen zehn beliebigen Punkte D, D_1, $\mathfrak{a}_0$.... gehen müssen — ein Resultat, welches jenem anderen analytischen Satze schnurstracks widerspricht, dass eine Fläche des zweiten Grades durch neun Punkte, sowie ihre Gleichung durch neun Constanten, bestimmt ist.

Dieses analytisch-geometrische Paradoxon ist für die rein-geometrische Betrachtung bereits durch Lehrsatz 33. hinweggeräumt. Die analytische Aufklärung desselben wird durch eine vergleichende Untersuchung der Constanten der Gleichung einer Fläche des zweiten Grades und derjenigen Gleichung, welche die Reciprocität zweier räumlichen Strahlbüschel darstellt, sich ergeben müssen.

Digitized by Google

Im Allgemeinen steht so viel fest, dass die Aufgabe, durch neun gegebene Punkte eine Fläche des zweiten Grades zu legen, auf die andere zurückkommt, um ein gegebenes n-Eck (wo n eine durch die Natur der Aufgabe selbst erst zu bestimmende Zahl bedeutet) ein anderes n-Eck zu beschreiben, welches mit einem zweiten gegebenen n-Eck reciprok sei. Diese Aufgabe aber lässt sich wieder auf folgende reduciren, welche nichts anderes als die Verallgemeinerung einer Klasse von Aufgaben ist, die seit langer Zeit die Aufmerksamkeit der Geometer beschäftigt haben, nämlich: Um oder in ein gegebenes n-Eck ein anderes zu beschreiben, welches einem zweiten gegebenen n-Eck collinear — und insbesondere affin, ähnlich, gleich, congruent — sei. Indem ich hiermit zur Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe einlade, bemerke ich nur noch, dass dieselbe mittels des blossen Lineals sich muss ausführen lassen, während die der angedeuteten specielleren Aufgaben den Gebrauch eines festen Kreises erfordert; und dass die im sechsten Theile des Archivs S. 178. behandelte Aufgabe ein besonderer Fall derjenigen ist: In ein gegebenes Viereck ein anderes zu beschreiben, das einem zweiten gegebenen Viereck ähnlich sei.

Eine mehr direkte, wenn auch nicht durchaus symmetrische Auflösung des in der Ueberschrift dieses Paragraphen genannten Problems wird durch die folgendenden zwei Aufgaben vermittelt werden.

Aufgabe.

In einer Ebene $\mathfrak{E}$ sind zwei Gerade A, A'; auf der ersteren ein Punkt $\mathfrak{s}$, und ausserdem sind drei Punkte α, β, γ beliebig gegeben; und in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ sind zwei Punkte B_1, B_1'; eine durch den ersteren gehende Gerade s_1 und ausserdem drei Punkte α_1, β_1, γ_1 beliebig gegeben; man stellt sich vor, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien reciprok, und zwar A, A' die Polaren von B_1, B_1'; $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1, und die Polaren α_1, β_1, γ_1 gehen durch die Punkte α, β, γ. Man soll diese drei Polaren mit Hülfe des blossen Lineales zeichnen.

Analysis.

Es seien in Taf. V. Fig. 7. a, b, c die gesuchten drei Geraden; sie schneiden die A in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; die A' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$; $\mathfrak{d}$ sei der Durchschnitt von A, A'. Man verbinde in der anderen Ebene den Punkt B_1 mit den Punkten α_1, β_1, γ_1, B_1' durch die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1; und den Punkt B_1' mit α_1, β_1, γ_1 durch die Geraden a_1', b_1', c_1'. Da die Geraden A, A', a, b, c die Polaren von B_1, B_1', α_1, β_1, γ_1, und der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1 werden soll, so müssen folgende zwei Bedingungen erfüllt werden:

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1)$$

und

$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1).$$

Digitized by Google

Legen wir zu diesem Zwecke durch den Punkt $\mathfrak{s}$ eine beliebige Gerade A'' und denken uns auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ so gewählt, dass dieselbe mit dem Strahlbüschel B_1 und folglich auch mit der Geraden A in Ansehung der Elemente $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{s}$; a_1, b_1, c_1, d_1, s_1: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$ projektivisch ist; so werden die Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ sich in einerlei Punkte $\mathfrak{i}$ schneiden. Ferner lege man durch den Punkt $\mathfrak{d}$ irgend eine Gerade A''' und wähle auf derselben drei Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ oder $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ so, dass dieselbe mit dem Strahlbüschel B_1' und folglich auch mit der Geraden A' in Ansehung der Elemente $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$, $\mathfrak{d}$; a_1', b_1', c_1', d_1'; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}$ projektivisch ist; so werden auch die drei Projektionsstrahlen $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ durch einerlei Punkt $\mathfrak{f}$ gehen müssen.

Denken wir uns nun die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$, die Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; α, β, γ; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ als fest und den Punkt $\mathfrak{i}$ längs der ganzen Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ fortbewegt, so werden die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ auf A und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ auf A' ihre Lage änderen, und es wird zwar in jedem Momente der Bewegung die erste der obigen Bedingungen, nicht aber die zweite erfüllt sein, indem die veränderlichen Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$. $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ nicht immer durch einerlei Punkt $\mathfrak{f}$ gehen. Indessen bei dieser Bewegung erzeugen die veränderlichen Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$ drei perspektivische Strahlbüschel $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; je zwei Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ zwei perspektivische Gerade A, A', und folglich auch je zwei Strahlen $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$; $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$; $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ zwei projektivische Strahlbüschel $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$; $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$. Rückt der Punkt $\mathfrak{i}$ in die Stelle des Punktes $\mathfrak{d}$, so rücken auch sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nach $\mathfrak{d}$; und demnach sind in dem gemeinschaftlichen Strahle von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ oder $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{C}'$, d. h. längs der Geraden A''', entsprechende Strahlen vereinigt. Hieraus folgt, dass während jener Bewegung der Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$ eine gerade Linie M, und ebenso die der Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$ und $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ gerade Linien N, P beschreiben; hat man also zwei dieser Geraden gefunden, so ist ihr Durchschnittspunkt, welcher natürlich auch der dritten angehören muss, der Punkt $\mathfrak{f}$, durch welchen alles Uebrige sofort gegeben ist.

Konstruktion.

Man lege durch den gegebenen Punkt $\mathfrak{s}$ irgend eine Gerade A'' und bestimme auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ so, dass

$$A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{s}) = B_1(a_1, b_1, c_1, d_1, s_1)$$

ist; lege ferner durch den Punkt $\mathfrak{d}$, den Durchschnitt von A, A', irgend eine Gerade A''' und bestimme auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ so, dass

$$A'''(\mathfrak{a}''', \mathfrak{b}''', \mathfrak{c}''', \mathfrak{d}) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1)$$

ist; ein Geschäft, dessen man in der Hauptaufgabe, um die es sich handelt, sich dadurch ganz überheben kann, dass man sich bereits vorhandener Punkte bedient. Sodann verbinde man den Punkt $\mathfrak{s}$ mit den Punkten α, β, γ durch drei Gerade, welche die

Digitized by Google

Gerade A' in den Punkten $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ schneiden, und diese letzteren Punkte mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche sich paarweise, nämlich $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{b}_1'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{a}'''$ und $\mathfrak{c}_1'\mathfrak{c}'''$, in den Punkten $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ schneiden.

Jetzt verbinde man den Punkt $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{d}''$ durch eine Gerade und einen beliebigen, aber weder mit $\mathfrak{d}$ noch mit $\mathfrak{d}''$ identischen Punkt i_2 dieser letzteren mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ durch drei Gerade, welche die Gerade A in den Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ treffen, sofort diese Punkte wieder mit den Punkten α, β, γ durch drei Gerade, welche die A' in den Punkten $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{c}_2'$ treffen; und wiederum diese drei Punkte mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche sich paarweise, nämlich die erste und die zweite, die erste und die dritte, in den Punkten $\mathfrak{b}^0$ und $\mathfrak{c}^0$ schneiden.

Jetzt verbinde man die Punkte $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{b}^0$ durch eine Gerade M, und die Punkte $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}^0$ durch eine Gerade N; sofort den Durchschnitt $\mathfrak{k}$ dieser Geraden M und N mit den Punkten $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ durch drei Gerade, welche die A' in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ treffen, und zuletzt diese drei Punkte mit α, β, γ durch drei Gerade a, b, c; so sind diese die drei verlangten Linien.

Beweis.

Denn geht man auf die Analysis zurück, so sind $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ diejenigen Punkte von A', welche man erhält, wenn der Punkt $\mathfrak{i}$ in die Stelle des Punktes $\mathfrak{d}''$ rückt, und folglich $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{b}^0$ zwei Punkte der dortigen Geraden M, $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{c}^0$ zwei Punkte der dortigen Geraden N. Da nun sowohl die Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'\mathfrak{c}'''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{k}$, als auch die Geraden $\mathfrak{a}\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}''$ sich in einem Punkte $\mathfrak{i}$ schneiden müssen, so ist

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{s}) \equiv A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s}) = B_1(a_1,b_1,c_1,d_1,s_1)$$

und

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{d}) \equiv A'''(\mathfrak{a}''',\mathfrak{b}''',\mathfrak{c}''',\mathfrak{d}) = B_1'(a_1',b_1',c_1',d_1).$$

Also darf man festsetzen: die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Geraden A, A' die Polaren der Punkte B_1, B_1', und die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Pole der Geraden a_1, b_1, c_1, d_1, s_1, a_1', b_1', c_1' sein. Dann aber sind nothwendig auch die Geraden a, b, c die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1.

W. z. b. w.

Determination.

Gäbe es noch drei andere Gerade a, b, c, welche der Aufgabe genügten, so würden die Geraden, welche die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ mit den früheren Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ verbänden, ebenfalls auf der Geraden $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_{\prime\prime}$ in einem Punkte $\mathfrak{i}$ convergiren müssen: es würden also die Geraden, welche die früheren Punkte $\mathfrak{a}'''$, $\mathfrak{b}'''$, $\mathfrak{c}'''$ mit den neuen Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ verbänden, paarweise entsprechende Strahlen der Strahlbüschel $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ sein, also auf den Geraden M, N sich schneiden; der neue Punkt $\mathfrak{k}$ würde demnach mit dem früheren $\mathfrak{k}$ und die neuen Geraden a, b, c mit den früheren zu-

Digitized by Google

sammenfallen. Folglich ist die vorstehende Aufgabe nur einer einzigen Auflösung fähig.

Hülfssatz.

Haben eine Reihe von Kegelschnitten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$.... drei Punkte B, B', B'' gemein, und sind irgend zwei Gerade A, A', welche durch einen dieser Punkte, z. B. durch B, gehen, in Ansehung der übrigen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{s}$.... und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{s}'$...., in denen sie von den Kegelschnitten und der Verbindungslinie der beiden anderen Punkte B', B'' geschnitten werden, projektivisch, so haben sämmtliche Kegelschnitte noch einen vierten Punkt gemein, und eine jede durch B gehende Gerade ist mit A, A' in Ansehung der betreffenden Punkte projektivisch.

Beweis. Man denke sich die Ebene der Kegelschnitte mit einer anderen in höherem Grade geometrisch verwandt, so dass Punkt und Punkt sich entsprechen, und zwar B, B', B'' als die Hauptpunkte der ersten, und B_1, B_1', B_1'' als deren zugeordnete in der zweiten Ebene; so entsprechen den Kegelschnitten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... ebensoviele Gerade $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$....; sämmtlichen Geraden A, A', A''...., welche durch B gehen, wiederum Gerade A_1, A_1', A_1''...., welche durch B_1 gehen; und den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$....; $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$....; $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$.... von A, A', A''.... und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... entsprechen die Durchschnitte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$....; $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{d}_1'$....; $\mathfrak{a}_1''$, $\mathfrak{b}_1''$, $\mathfrak{c}_1''$, $\mathfrak{d}_1''$.... von A_1, A_1', A_1''.... mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$....; endlich allen Punkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$.... der Hauptlinie $B'B''$ lauter Punkte $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1'$, $\mathfrak{s}_1''$...., welche mit dem Hauptpunkte B_1 sich vereinigen. Da nun nach Archiv. Theil VII. S. 118. einem jeden Strahlbüschel B' ein proj. Strahlbüschel B_1', und folglich auch einem jeden Strahle A des Hauptpunktes B ein projektivischer Strahl A_1 des zugeordneten B_1 entspricht, also

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}....) = A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....);$$
$$A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{s}'....) = A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1', \mathfrak{s}_1'....);$$
$$A''(\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}'', \mathfrak{c}'', \mathfrak{d}'', \mathfrak{s}''....) = A_1''(\mathfrak{a}_1'', \mathfrak{b}_1'', \mathfrak{c}_1'', \mathfrak{d}_1'', \mathfrak{s}_1''....)$$

ist, und da angenommen ward, dass

$$A(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{s}....) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}', \mathfrak{s}'....)$$

sei, und die Punkte $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_1'$ sich vereinigen, so ist zunächst

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....) \equiv (A_1'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1', \mathfrak{s}_1'....);$$

d. h. die sämmtlichen Projektionsstrahlen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$.... von A_1, A_1' gehen durch einerlei Punkt; und diesem Punkte muss demnach ein vierter gemeinschaftlicher Punkt der Kegelschnitte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... entsprechen. Zugleich aber folgt, dass auch

$$A_1(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{d}_1, \mathfrak{s}_1....) \equiv A_1''(\mathfrak{a}_1'', \mathfrak{b}_1'', \mathfrak{c}_1'', \mathfrak{d}_1'', \mathfrak{s}_1''....),$$

Digitized by Google

und hieraus wieder, dass

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{d},\mathfrak{s}\ldots)=A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s}''\ldots).$$

W. z. b. w.

Aufgabe.

Es sind in einer Ebene $\mathfrak{E}$ eine Gerade A und ein Punkt $\mathfrak{s}$ der letzteren, ausserdem fünf Punkte α, β, γ, δ, φ; in einer zweiten Ebene $\mathfrak{E}_1$ ein Punkt B_1 und ein Strahl s_1 desselben, ausserdem fünf Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 beliebig gegeben. Man stellt sich vor, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ seien reciprok, und zwar die Gerade A die Polare des Punktes B_1, der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol der Geraden s_1, und die Polaren der Punkte $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \varphi_1$ gehen durch die Punkte α, β, γ, δ, φ. Man soll diese fünf Polaren mit Hülfe des blossen Lineales zeichnen.

Konstruktion.

Man verbinde den Punkt B_1 mit den Punkten α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Geraden a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 und irgend einen der letzteren, z. B. δ_1, mit den übrigen α_1, β_1, γ_1, φ_1 durch die Geraden a_1', b_1', c_1', f_1'. Sodann lege man durch den Punkt $\mathfrak{s}$ in $\mathfrak{E}$ irgend eine Gerade A'' und wähle auf derselben die Punkte $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{f}''$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{F}$ dergestalt, dass

$$A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{f}'',\mathfrak{s})=B_1(a_1,b_1,c_1,d_1,f_1,s_1)$$

sei, Punkte, welche man in der nächstfolgenden Hauptaufgabe bei geschickter Wahl der Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sich sehr leicht verschaffen kann.

Jetzt lege man durch den Punkt δ irgend zwei Gerade d_1, d_2, welche die A in $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ schneiden, bezeichne zugleich eine jede von diesen zwei Geraden nach einander mit A', denke sich beidemale die Elemente A, A', $\mathfrak{s}$, α, β, γ und B_1, B_1' (d. h. δ_1), s_1, α_1, β_1, γ_1 im Sinne der gleichnamigen Elemente der vorhergehenden Aufgabe gegeben, und suche der dortigen Vorschrift gemäss die drei Geraden a, b, c, welche jetzt, in Bezug auf d_1 und d_2, a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 heissen mögen. Es seien $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$ bezüglich die Durchschnitte von a_1, b_1, c_1 mit A und mit d_1; und ebenso $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$ und $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{c}_2'$ die Durchschnitte von a_2, b_2, c_2 mit A und mit d_2. Durch Ausführung der bezeichneten Konstruktionen sind bereits die Punkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$ mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch vier Gerade a_1^0, b_1^0, c_1^0, d_1^0, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{i}_1$ schneiden; und die Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$ mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch vier Gerade a_2^0, b_2^0, c_2^0, d_2^0, welche sich in einem Punkte $\mathfrak{i}_2$ schneiden, verbunden. Man ziehe nun durch die Punkte $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ eine Gerade C.

Hiernach vertausche man einen der Punkte α, β, γ, z. B. γ, mit dem noch nicht berücksichtigten Punkte φ, und γ_1 mit φ_1, lege wieder durch δ irgend zwei Gerade, z. B. die vorigen d_1, d_2, betrachte wieder die Elemente A, A', $\mathfrak{s}$, α, β, φ und B_1, B_1',

δ_1, α_1, β_1, φ_1 im Sinne der vorigen Aufgabe gegeben, konstruire mit Hülfe der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ zwei neue Punkte $\mathfrak{i}_1$ und $\mathfrak{i}_2$ und verbinde die letzteren durch eine Gerade F.

Es sei $\mathfrak{i}$ der Durchschnittspunkt der Geraden C und F; man verbinde $\mathfrak{i}$ mit den Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ durch die Geraden a^0, b^0, c^0, f^0, d^0, welche A in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ schneiden, und sofort diese Punkte bezüglich mit den Punkten α, β, γ, φ, δ durch die Geraden a, b, c, f, d; so sind letztere die fünf gesuchten Polaren von α_1, β_1, γ_1, φ_1, δ_1.

Beweis.

Es seien noch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Durchschnitte von a, b, c mit d; man denke sich von jedem Punkte $\mathfrak{i}_3$.... der Geraden C, ausser den schon vorhandenen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{i}_2$, nach den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.... die Geraden $a_3{}^0$, $b_3{}^0$, $c_3{}^0$, $d_3{}^0$,.... gezogen, welche die A in $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$, $\mathfrak{d}_3$,.... schneiden; diese Punkte wieder bezüglich mit α, β, γ, δ durch die Geraden a_3, b_3, c_3, d_3,.... verbunden, von denen die drei ersteren die letzte d_3 in den Punkten $\mathfrak{a}_3'$, $\mathfrak{b}_3'$, $\mathfrak{c}_3'$ schneiden, und bezeichne die um α, β, γ, δ gebildeten Strahlbüschel mit $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$. Diess vorausgesetzt, so hat man:

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3....) \equiv \mathfrak{D}(d^0, d_1{}^0, d_2{}^0, d_3{}^0....) \equiv \mathfrak{A}(a^0, a_1{}^0, a_2{}^0, a_3{}^0....)$$
$$\equiv \mathfrak{A}'(a, a_1, a_2, a_3....);$$

also

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3....) = \mathfrak{A}'(a, a_1, a_2, a_3....);$$

und ebenso

$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3....) = \mathfrak{B}'(b, b_1, b_2, b_3....),$$
$$\mathfrak{D}'(d, d_1, d_2, d_3....) = \mathfrak{C}'(c, c_1, c_2, c_3....).$$

Folglich liegen sämmtliche Punkte δ, α, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{a}_2'$, $\mathfrak{a}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0$; sämmtliche Punkte δ, β, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{b}_2'$, $\mathfrak{b}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{B}_0$; sämmtliche Punkte δ, γ, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{c}_2'$, $\mathfrak{c}_3'$.... in einem Kegelschnitte $\mathfrak{C}_0$; und da demjenigen Strahle von $\mathfrak{D}$, welcher nach dem Durchschnitte der Geraden A'' und C geht, in den Strahlbüscheln $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ lauter Strahlen entsprechen, die nach dem Punkte $\mathfrak{s}$ gehen, und demjenigen Strahle von $\mathfrak{D}$, welcher nach dem Durchschnitte $\mathfrak{t}$ der Geraden A und C geht, in denselben vier Strahlbüscheln lauter Strahlen entsprechen, welche nach demselben Punkte $\mathfrak{t}$ gehen, so haben die Kegelschnitte $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ ausser dem Punkte δ noch zwei Punkte $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ gemein, welche der Geraden A angehören. Nun aber ist der Konstruktion gemäss

$$A'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1) = A'(\mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \mathfrak{c}_2', \mathfrak{d}_2) = B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1);$$

also ist kraft des vorhergeschickten Hülfssatzes auch

$$A'(\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{c}_1', \mathfrak{d}_1) = A'(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}) = A'(\mathfrak{a}_3', \mathfrak{b}_3', \mathfrak{c}_3', \mathfrak{d}_3)....$$
$$= B_1'(a_1', b_1', c_1', d_1).$$

Digitized by Google

Auf dieselbe Weise wird mittels der Geraden F gezeigt, dass

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',f_1',d_1);$$

folglich, da zwei proj. Gebilde durch drei Paar entsprechende Elemente $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}$ und a_1', b_1', d_1 vollkommen bestimmt sind, so ist auch

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',c_1',f_1',d_1);$$

und da nach der Konstruktion auch

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f},\mathfrak{d},\mathfrak{s})\equiv A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{f}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s})=B_1(a_1,b_1,c_1,f_1,d_1,s_1)$$

ist,, so darf man festsetzen. die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok und zwar die Elemente A, d, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{f}'$ und B_1, δ_1, s_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, a_1', b_1', c_1', f_1' entsprechende sein (Archiv. Thl. VIII. S. 2.). Dann aber sind auch die Geraden a, b, c, f, welche die Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$; $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ verbinden, und die Durchschnittspunkte α_1, β_1, γ_1, φ_1 der Strahlenpaare a_1, a_1'; b_1, b_1'; c_1, c_1'; f_1, f_1' entsprechende Elementenpaare.

W. z. b. w.

Determination.

Gäbe es noch fünf andere Gerade a, b, c, d, f, welche der Aufgabe genügten, so wären, wenn wieder d mit A' bezeichnet wird, für die neuen Punkte $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{f}'$ und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ wiederum die Beziehungen

$$A(\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c},\mathfrak{f},\mathfrak{d},\mathfrak{s})=B_1(a_1,b_1,c_1,f_1,d_1,s_1)=A''(\mathfrak{a}'',\mathfrak{b}'',\mathfrak{c}'',\mathfrak{f}'',\mathfrak{d}'',\mathfrak{s})$$

und

$$A'(\mathfrak{a}',\mathfrak{b}',\mathfrak{c}',\mathfrak{f}',\mathfrak{d})=B_1'(a_1',b_1',c_1',f_1',d_1)$$

vorhanden; denkt man sich nun den neuen Punkt $\mathfrak{d}$ mit dem früheren $\mathfrak{d}''$ durch eine Gerade verbunden, welche die Gerade C der Konstruktion in einem Punkte $\mathfrak{i}_3$ schneidet, und sofort diesen Punkt noch mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ verbunden, wodurch man, wie im Beweise angegeben, die Punkte $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{c}_3$ und die Geraden a_3, b_3, c_3 erhalten würde, so müssten diese letzteren mit a, b, c zusammenfallen, weil nach der Determination der vorigen Aufgabe in den reciproken Ebenen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}$ nicht zu gleicher Zeit die Elemente B_1, δ_1, s_1, α_1, β_1, γ_1 den Elementen A, d, $\mathfrak{s}$, a, b, c und auch den Elementen A, d, $\mathfrak{s}$, a_3, b_3, c_3 entsprechen können, wenn sowohl a, b, c als auch a_3, b_3, c_3 durch die Punkte α, β, γ gehen. Denkt man sich also die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ mit den früheren Punkten $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ durch Gerade verbunden, so müssen diese auf der Geraden C der Konstruktion convergiren; und denkt man sich die neuen Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{d}''$ durch Gerade verbunden, so müssen diese auf F, sämmtliche fünf Gerade also im Durchnitte $\mathfrak{i}$ von C und F convergiren. Folglich müssen auch die gedachten neuen Geraden a, b, c, d, f mit den

Digitized by Google

durch die Konstruktion erhaltenen zusammenfallen. Also lässt auch diese Aufgabe nur eine einzige Auflösung zu.

Aufgabe.

Wenn von einer Fläche der zweiten Ordnung neun Punkte beliebig gegeben sind, mittels des gewöhnlichen und eines Ebenen-Lineales allein beliebig viele andere Punkte dieser Fläche zu finden.

Konstruktion.

Es seien D, D_1, σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ die neun gegebenen Punkte. Man verbinde irgend zwei derselben, z. B. D, D_1, mit den sieben übrigen bezüglich durch die Geraden s, p, a, b, c, d, f und s_1, p_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 und gebe zwei gesonderten oder auch vereinigten Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ irgend eine feste Lage im Raume (am Vortheilhaftesten ist es, eine der Ebenen zu wählen, welche drei der sieben Punkte verbindet). Es seien $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{p}$, α, β, γ, δ, φ die Punkte, in welchen die Ebene $\mathfrak{E}$ von den Geraden s, p, a, b, c, d, f — und $\mathfrak{s}_1$, B_1, α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 die Punkte, in welchen die Ebene $\mathfrak{E}_1$ von den Geraden s_1, p_1, a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 getroffen wird. Man verbinde zwei jener Punkte, z. B. $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{p}$, durch eine Gerade A, und demzufolge die Punkte $\mathfrak{s}_1$ und B_1 durch eine Gerade s_1, setze fest, die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ sollen reciprok, und zwar die Gerade A die Polare des Punktes B_1, der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol der Geraden s_1 sein, und die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 sollen durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen; und suche diese fünf Polaren nach der in der vorigen Aufgabe gegebenen Vorschrift. Hierdurch ist man in den Stand gesetzt, zu jedem Punkte der Ebene $\mathfrak{E}_1$ (oder $\mathfrak{E}$) seine Polare in der Ebene $\mathfrak{E}$ (oder $\mathfrak{E}_1$) zu finden. Ist nun m_1 irgend ein Strahl des Punktes D_1 (oder D), dessen zweiten Durchschnitt $\mathfrak{m}$ mit der Fläche der zweiten Ordnung man finden will, so suche man zu dem Punkte u_1, in welchem m_1 die Ebene $\mathfrak{E}_1$ trifft, seine Polare in $\mathfrak{E}$, und lege durch diese Polare und den Punkt D eine Ebene; so schneidet die letztere den Strahl m_1 in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{m}$.

Beweis.

Man denke sich den Punkt D_1 mit sämmtlichen Punkten und Geraden der Ebene $\mathfrak{E}_1$, und den Punkt D mit den Polaren und Polen derselben in $\mathfrak{E}$ durch Gerade und Ebenen verbunden, so erhält man zwei reciproke räumliche Strahlbüschel D, D_1, deren entsprechende Elementenpaare sich in den Punkten einer Fläche F der zweiten Ordnung schneiden müssen. Da nun der Konstruktion gemäss der Geraden A der Punkt B_1, also der Ebene $D\sigma\pi$ der Strahl p_1, welcher dieselbe im Punkte π schneidet, entspricht; da der Punkt $\mathfrak{s}$ der Pol von s_1, also der Strahl s die Polare der Ebene $D_1\pi\sigma$ ist, welche von jenem im Punkte σ getroffen wird; und da die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Punkte α, β, γ, δ, φ, also auch die Polaren der Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 durch die Strahlen a, b, c, d, f gehen und mit diesen zugleich von den ersteren in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ getroffen werden, so gehören ausser den Punkten D, D_1 auch die sieben

Digitized by Google

Punkte σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ der Fläche F an; ausserdem aber muss auch der Punkt $\mathfrak{m}$ auf F liegen. Gäbe es nun eine zweite, von F verschiedene Fläche F' der zweiten Ordnung, welche die gegebenen neun Punkte enthielte, so könnte man nach Lehrsatz 33. die Punkte D, D_1 bezüglich mit σ und π durch zwei Gerade s und p_1 und mit den beiden Punkten σ, π durch zwei Ebenen ps oder π^0 und $p_1 s_1$ oder $\sigma_1{}^0$ verbinden und sodann festsetzen, die Punkte D, D_1 sollen die Mittelpunkte zweier reciproker räumlicher Strahlbüschel, welche die Fläche F' erzeugen, und die Ebenen π^0, $\sigma_1{}^0$ sollen die Polaren der Strahlen p_1, s sein. Dann aber würden die festen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ auch in Ansehung der Elementenpaare, in denen sie von den entsprechenden Elementenpaaren dieser neuen Strahlbüschel D, D_1 geschnitten werden, reciprok sein; und da die Ebenen π^0, $\sigma_1{}^0$ die $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in den Geraden A, s_1; die Strahlen s, p_1 dieselben in den Punkten $\mathfrak{s}$, B_1 schneiden; da ferner die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ auch der neuen Fläche F' angehören, also die Strahlen $D_1\mathfrak{a}$, $D_1\mathfrak{b}$, $D_1\mathfrak{c}$, $D_1\mathfrak{d}$, $D_1\mathfrak{f}$ des neuen Strahlbüschels D_1 von ihren Polaren in diesen Punkten getroffen werden, folglich die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 auch jetzt durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen müssen, so würden auch in den neuen reciproken Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, sowie in den vorigen, die Elementenpaare A und B_1, $\mathfrak{s}$ und s_1 sich entsprechen, und die Polaren der Punkte α_1, β_1, γ_1, δ_1, φ_1 durch die Punkte α, β, γ, δ, φ gehen. Dann aber müssen, der Determination der vorhergehenden Aufgabe zufolge, auch diese letzteren fünf Polaren mit den früheren zusammenfallen, und also auch die neuen Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, die neuen Strahlbüschel D, D_1 und somit die neue Fläche F' mit den früheren identisch sein. Demnach liegt auch der Punkt $\mathfrak{m}$ auf derjenigen Fläche der zweiten Ordnung, von welcher die Punkte D, D_1, σ, π, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ entnommen waren.

W. z. b. w.

Mit dieser letzten Aufgabe ist nun, kraft des Gesetzes der Dualität, zugleich auch die andere: „An neun beliebig gegebene Ebenen eine Fläche der zweiten Klasse zu legen" gelöst; denn es fehlt hierzu nichts als das mechanische Geschäft, Konstruktion und Beweis derselben aus dem für die erstere gegebenen Wortlaute herauszulesen; und so dürfen wir denn als Resultat dieser ganzen rein-geometrischen Betrachtung aussprechen:

Lehrsatz 36.

Eine Fläche der zweiten Ordnung ist durch neun ihrer Punkte vollkommen bestimmt.	Eine Fläche der zweiten Klasse ist durch neun ihrer Berührungsebenen vollkommen bestimmt.

XVIII.

Ueber die näherungsweise Berechnung eines bestimmten Integrales.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

In dem netten Aufsatze über gewisse magnetische Wirkungen No. XX. Theil VII. ist Herr Dr. Dippe auf das bestimmte Integral

$$W=cr\int_0^{\varphi}\frac{(r-r'\cos\varphi)\partial\varphi}{[r^2-2rr'\cos\varphi+r'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

geführt worden, dessen numerische Berechnung mit einigen Schwierigkeiten, oder richtiger, Weitläufigkeiten verknüpft scheint. Diess gab Veranlassung zu den nachfolgenden Betrachtungen, welche sich mit der Verwerthung des allgemeinen Integrales

$$U=\int_0^{u}\frac{(1-\varrho\cos u)\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu}} \qquad (1)$$

beschäftigen, das für $\mu=\frac{3}{2}$, $\varrho=\frac{r'}{r}$, $u=\varphi$ auf das obige zurückführt.

Zunächst ist zu bemerken, dass man wegen der Periodizität von $\cos u$ den Werth des Integrales nur von $u=0$ bis höchstens $u=\pi$ zu kennen braucht, um sogleich im Besitze der sonstigen Werthe des Integrales zu sein. Diese Eigenschaft kommt überhaupt allen unter der Form

$$\int_0^{u}F(\cos u)\partial u$$

stehenden Integralen zu. Ist nämlich $u=k\pi+v$, wo k eine ganze Zahl, v eine zwischen 0 und π fallende Grösse bedeutet, so hat man

$$\int_0^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u = \int_0^{\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{\pi}^{2\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{2\pi}^{3\pi} F(\cos u)\partial u + \ldots$$
$$\ldots + \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} F(\cos u)\partial u + \int_{k\pi}^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u.$$

Lässt man nun die folgenden Substitutionen eintreten:

im 1sten, 2ten, 3ten, 4ten ... Integrale
$u=u'$, $2\pi-u'$, $2\pi+u'$, $4\pi-u'$, u. s. w.,

so werden die ersten k Integrale einander gleich und

$$\int_0^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u = k\int_0^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' + \int_{k\pi}^{k\pi+v} F(\cos u)\partial u.$$

Im letzten Integrale setzt man $u=k\pi+u'$ oder $=(k+1)\pi-u'$, jenachdem k gerade oder ungerade ist, und hierdurch geht dasselbe entweder in

$$\int_0^{v} F(\cos u')\partial u'$$

oder in

$$\int_{\pi-v}^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' = \int_0^{\pi} F(\cos u')\,\partial u' - \int_0^{\pi-v} F(\cos u')\partial u'$$

über, woraus zusammen hervorgeht, dass es blos darauf ankommt, den Werth von

$$\int_0^{u'} F(\cos u')\,\partial u'$$

für alle u' von $u'=0$ bis $u'=\pi$ zu bestimmen, was auf die frühere Behauptung zurückkommt.

Könnte man nun den Ausdruck

$$\frac{1-\varrho\cos u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu}}$$

in eine Reihe von der Form

$$A_0 + A_1\cos u + A_2\cos 2u + A_3\cos 3u + \ldots$$

verwandeln, wobei wir uns ganz auf das Intervall 0 bis π für u beschränken können, so würde das Integral (1) sehr leicht zu finden sein, indem man

$$U = A_0 u + \frac{1}{1}A_1\sin u + \frac{1}{2}A_2\sin 2u + \frac{1}{3}A_3\sin 3u + \ldots \quad (2)$$

erhielte. Ferner erhellt auch leicht, dass es nur nöthig wäre, den Bruch

$$\frac{1}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu}}$$

Digitized by Google

in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u+\ldots$$

umzusetzen; denn es ergäbe sich dann durch Multiplikation mit $1-\varrho\cos u$ und Zerlegung jedes Cosinusproduktes in eine Cosinussumme

$$\begin{aligned}\frac{1-\varrho\cos u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}&=\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u\\ &\quad-\frac{1}{2}\varrho C_0\cos u-\frac{1}{2}\varrho C_1(1+\cos 2u)\\ &\quad-\frac{1}{2}\varrho C_2(\cos u+\cos 3u)\\ &\quad-\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und folglich durch Vergleichung mit dem Vorigen

$$A_0=\frac{1}{2}(C_0-\varrho C_1) \tag{3}$$

und sonst im Allgemeinen für ein ganzes positives $n>0$

$$A_n=C_n-\frac{1}{2}\varrho(C_{n-1}+C_{n+1}). \tag{4}$$

Die oben angedeutete Aufgabe lässt sich nun mittelst des von Lagrange zuerst aufgestellten Satzes lösen, wonach jede Funktion $F(u)$ von u in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{2}C_0+C_1\cos u+C_2\cos 2u+C_3\cos 3u+\ldots.$$

verwandelt werden kann, wenn man sich auf das Intervall $u=0$ bis $u=\pi$ beschränkt; es ist nämlich dann

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi F(u)\cos nu\partial u.$$

In der Anwendung auf unseren Fall giebt diess

$$C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos nu\,\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}, \tag{5}$$

so dass jetzt unsere ganze Aufgabe sich auf die Entwickelung dieses Integrales reduzirt. Dieselbe lässt sich in folgender einfachen Weise bewerkstelligen.

Digitized by Google

Nach einem von C. G. J. Jacobi gefundenen höchst merkwürdigen Theoreme *) ist überhaupt

$$\int_0^\pi f(\cos u)\cos nu\partial u = \frac{1}{1.3.5....(2n-1)}\int_0^\pi f^{(n)}(\cos u)\sin^{2n}u\partial u, \quad (6)$$

wobei f eine ganz willkührliche Funktion bezeichnet. Setzen wir nun

$$f(z) = \frac{1}{(1-2\varrho z+\varrho^2)^\mu},$$

also

$$f^{(n)}(z) = \mu(\mu+1)....(\mu+n-1)\frac{(2\varrho)^n}{(1-2\varrho z+\varrho^2)^{\mu+n}},$$

so ergiebt sich auf der Stelle aus No. (6)

$$\int_0^\pi \frac{\cos nu\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^\mu}$$

$$= \frac{\mu(\mu+1)....(\mu+n-1)}{1.3.5....(2n-1)}(2\varrho)^n\int_0^\pi \frac{\sin^{2n}u\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu+n}},$$

oder nach Multiplikation mit $\frac{2}{\pi}$ nach No. (5)

$$C_n = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\mu(\mu+1)....(\mu+n-1)}{1.3.5....(2n-1)}(2\varrho)^n V, \quad (7)$$

worin zur Abkürzung

$$V = \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}u\partial u}{(1-2\varrho\cos u+\varrho^2)^{\mu+n}} \quad (8)$$

gesetzt worden ist. Das vorliegende Integral lässt sich auf mehrere verschiedene Weisen in eine Reihe verwandeln, von denen ich nur eine hervorheben will. Man setze $u=2v$ und bemerke, dass

$$\sin 2v = 2\sin v\cos v,\quad \cos 2v = 2\cos^2 v - 1$$

ist; man erhält dann

$$V = 2^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}v\cos^{2n}v\,\partial v}{[(1+\varrho)^2-4\varrho\cos^2 v]^{\mu+n}}. \quad (9)$$

Bezeichnen wir ferner die Coefficienten

$$\frac{\mu+n}{1},\ \frac{(\mu+n)(\mu+n+1)}{1.2},\ \frac{(\mu+n)(\mu+n+1)(\mu+n+2)}{1.2.3},....$$

zur Abkürzung mit M_1, M_2, M_3, etc., so ist

*) Archiv. Theil IV. S. 109.

Digitized by Google

$$\frac{1}{[(1+\varrho)^2-4\varrho\cos^2v]^{\mu+n}}=\frac{1}{(1+\varrho)^{2\mu+2n}}\cdot\frac{1}{\left\{1-\frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2}\cos^2v\right\}^{\mu+n}}$$

$$=\frac{1}{(1+\varrho)^{2\mu+2n}}\left\{1+M_1\frac{4\varrho}{(1+\varrho)^2}\cos^2v+M_2\frac{4^2\varrho^2}{(1+\varrho)^4}\cos^4v+\ldots\right\}$$

Substituirt man diess in die Gleichung (9) und integrirt jedes einzelne Glied mittelst der Formel

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}v\cos^{2q}v\partial v=\frac{1.3.5\ldots.(2p-1).1.3.5\ldots.(2q-1)}{2.4.6\ldots.(2p+2q)}\pi,$$

so ist es sehr leicht, für V eine Reihe zu erhalten, die nach Potenzen von

$$\frac{2\varrho}{(1+\varrho)^2}$$

fortschreitet, und ebendesswegen ziemlich gut convergirt. Um dann zu C_n zurückzugelangen, bedarf es blos gewöhnlicher Substitutionen und Hebungen.

XIX.

Ueber einige Reihen, deren Glieder die auf einander folgenden Binomialcoefficienten als Factoren in sich schliessen.

Von Herrn Oskar Werner,

Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

I.

Die Summe irgend einer Reihe wollen wir in dieser Abhandlung dadurch bezeichnen, dass wir ihrem allgemeinen Gliede das Symbol Σ vorsetzen. Ferner wollen wir den Quotienten

$$\frac{n(n+k)(n+2k)\ldots.[n+(p-1)k]}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;p}$$

Digitized by Google

der Kürze wegen durch $\overset{k}{n}_p$, den $p$ten Binomialcoefficienten aber, welcher hiernach eigentlich durch $\overset{-1}{n}_p$ bezeichnet werden sollte, ausnahmsweise durch n_p darstellen.

Indem wir nun voraussetzen, dass a, φ und ψ von r unabhängige Grössen sind und die Function $f(r)$ der Gleichung

$$1.\quad f(r)+f(r+\psi)=af(r+\varphi)$$

Genüge leistet, wollen wir uns zunächst die Summation der für das Folgende wichtigen Reihen

$$\Sigma a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi]=f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+\ldots\ldots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi],$$

$$\Sigma(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]=f(r+\varphi)-f(r+\varphi+\psi)+\ldots\ldots(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

zur Aufgabe machen, und setzen deswegen, was nach 1. offenbar gestattet ist, in der ersten dieser beiden Reihen

$af(r+\varphi)-f(r)$ für $f(r+\psi)$,
$af(r+2\varphi)-f(r+\varphi)$ für $f(r+\psi+\varphi)$,
. . . .
$af[r+n\varphi]-f[r+(n-1)\varphi]$ für $f[r+\psi+(n-1)\varphi]$

und in der zweiten Reihe

$\frac{1}{a}[f(r)+f(r+\psi)]$ für $f(r+\varphi)$,
$\frac{1}{a}[f(r+\psi)+f(r+2\psi)]$ für $f(r+\varphi+\psi)$,
. . . .
$\frac{1}{a}[f[r+(n-1)\varphi]+f[r+n\psi]]$ für $f[r+\varphi+(n-1)\psi]$;

wir erhalten dann, sobald wir nach gleichen Potenzen von a anordnen und aufheben, was sich aufheben lässt,

$$\Sigma a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi]=a^n f(r+n\varphi)-f(r),$$

$$\Sigma(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]=\frac{(-1)^{n-1}f(r+n\psi)+f(r)}{a}$$

und haben also

$$2.\quad a^n f(r+n\varphi)-f(r)=f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+\ldots\ldots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\varphi],$$

$$3.\quad \frac{(-1)^{n-1}f(r+n\varphi)+f(r)}{a}=f(r+\varphi)-f(r+\varphi+\psi)+\ldots\ldots(-1)^{n-1}f[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

Digitized by Google

Bilden wir nun aus den beiden $n$gliedrigen Reihen

$$f(r+\psi)+af(r+\psi+\varphi)+a^2f(r+\psi+2\varphi)+\ldots\ldots+a^{n-1}f[r+\psi+(n-1)\psi],$$

$$-af(r+\varphi)+af(r+\varphi+\psi)-af(r+\varphi+2\psi)+\ldots\ldots(-1)^n af[r+\varphi+(n-1)\psi]$$

durch Subtraction je zweier Nachbarglieder die successiven Differenzenreihen, so treten als Anfangsglieder der aus der ersten Reihe erhaltenen Differenzenreihen die Grössen

$$f(r+2\psi),\ f(r+3\psi),\ f(r+4\psi), \ldots f(r+n\psi);$$

und als Anfangsglieder der aus der zweiten Reihe erhaltenen Differenzenreihen die Grössen

$$a^2f(r+2\varphi),\ -a^3f(r+3\varphi),\ a^4f(r+4\varphi),\ \ldots (-1)^n a^n f(r+n\varphi)$$

auf; wir erhalten daher nach der Lehre von den höheren Differenzen und nach dem Obigen

4. $$a^nf(r+n\varphi)=f(r)+n_1f(r+\psi)+n_2f(r+2\psi)+\ldots+n_nf(r+n\psi)$$

und

5. $$(-1)^nf(r+n\psi)=f(r)-n_1\,af(r+\varphi)+n_2a^2f(r+2\varphi)-\ldots\ldots(-1)^n n_n a^n f(r+n\varphi).$$

Die in Gleichung 1. ausgesprochene Bedingung, welcher die Function $f(r)$ unterworfen ist, wird von mehreren bekannten Functionen erfüllt. Einige derselben wollen wir jetzt näher in's Auge fassen.

II.

Weil bekanntlich

$$\sin r+\sin(r+2\varphi)=2\cos\varphi\sin(r+\varphi),$$
$$\cos r+\cos(r+2\varphi)=2\cos\varphi\cos(r+\varphi);$$

so genügen die Functionen $\sin r$ und $\cos r$ in der That der Gleichung 1. Für beide ist also $a=2\cos\varphi$ und $\psi=2\varphi$ zu setzen; daher gehen für $f(r)=\sin r$ und $f(r)=\cos r$ die Gleichungen 2., 3., 4., 5. über in die Gleichungen:

6. $$\begin{cases}(2\cos\varphi)^n\sin(r+n\varphi)-\sin r=\sin(r+2\varphi)+(2\cos\varphi)\sin(r+3\varphi)+\ldots\ldots+(2\cos\varphi)^{n-1}\sin[r+(n+1)\varphi],\\(2\cos\varphi)^n\cos(r+n\varphi)-\cos r=\cos(r+2\varphi)+(2\cos\varphi)\cos(r+3\varphi)+\ldots\ldots+(2\cos\varphi)^{n-1}\cos[r+(n+1)\varphi];\end{cases}$$

7. $$\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n-1}\sin(r+2n\varphi)+\sin r}{2\cos\varphi}=\sin(r+\varphi)-\sin(r+3\varphi)+\sin(r+5\varphi)-\ldots\ldots(-1)^{n-1}\sin[r+(2n-1)\varphi],\\\dfrac{(-1)^{n-1}\cos(r+2n\varphi)+\cos r}{2\cos\varphi}=\cos(r+\varphi)-\cos(r+3\varphi)+\cos(r+5\varphi)-\ldots\ldots(-1)^{n-1}\cos[r+(2n-1)\varphi].\end{cases}$$

Digitized by Google

$$8.\quad\left\{\begin{aligned}&(2\cos\varphi)^n\sin(r+n\varphi)=\sin r+n_1\sin(r+2\varphi)+n_2\sin(r+4\varphi)+\ldots\\&\qquad\ldots+n_n\sin(r+2n\varphi),\\&(2\cos\varphi)^n\cos(r+n\varphi)=\cos r+n_1\cos(r+2\varphi)+n_2\cos(r+4\varphi)+\ldots\\&\qquad\ldots+n_n\cos(r+2n\varphi);\end{aligned}\right.$$

und

$$9.\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^n\sin(r+2n\varphi)=\sin r-n_1(2\cos\varphi)\sin(r+\varphi)\\&\quad+n_2(2\cos\varphi)^2\sin(r+2\varphi)-\ldots(-1)^n n_n(2\cos\varphi)^n\sin(r+n\varphi),\\&(-1)^n\cos(r+2n\varphi)=\cos r-n_1(2\cos\varphi)\cos(r+\varphi)\\&\quad+n_2(2\cos\varphi)^2\cos(r+2\varphi)-\ldots(-1)^n n_n(2\cos\varphi)^n\cos(r+n\varphi).\end{aligned}\right.$$

Lassen wir in den Gleichungen 6., 7., 8. und 9. φ in $\varphi+\frac{\pi}{2}$ übergehen, und berücksichtigen wir, dass für gerade Werthe von m

$$\sin(m\tfrac{\pi}{2}+\varphi)=(-1)^{\frac{m}{2}}\sin\varphi,\quad \cos(m\tfrac{\pi}{2}+\varphi)=(-1)^{\frac{m}{2}}\cos\varphi;$$

und für ungerade Werthe von m

$$\sin(m\tfrac{\pi}{2}+\varphi)=(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos\varphi,\quad \cos(m\tfrac{\pi}{2}+\varphi)=(-1)^{\frac{m+1}{2}}\sin\varphi;$$

so erhalten wir für ein gerades n

$$10^a.\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n}{2}-1}(2\sin\varphi)^n\sin(r+n\varphi)+\sin r=\\&\sin(r+2\varphi)-(2\sin\varphi)\cos(r+3\varphi)-(2\sin\varphi)^2\sin(r+4\varphi)+\ldots\\&\qquad\ldots(-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^{n-1}\cos[r+(n+1)\varphi],\\&(-1)^{\frac{n}{2}-1}(2\sin\varphi)^n\cos(r+n\varphi)+\cos r=\\&\cos(r+2\varphi)+(2\sin\varphi)\sin(r+3\varphi)-(2\sin\varphi)^2\cos(r+4\varphi)-\ldots\\&\qquad\ldots(-1)^{\frac{n}{2}-1}(2\sin\varphi)^{n-1}\sin[r+(n+1)\varphi];\end{aligned}\right.$$

und für ein ungerades n

$$10^b.\quad\left\{\begin{aligned}&(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\varphi)^n\cos(r+n\varphi)+\sin r=\\&\sin(r+2\varphi)-(2\sin\varphi)\cos(r+3\varphi)-(2\sin\varphi)^2\sin(r+4\varphi)+\ldots\\&\qquad\ldots(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\varphi)^{n-1}\sin[r+(n+1)\varphi],\\&(-1)^{\frac{n+1}{2}}(2\sin\varphi)^n\sin(r+n\varphi)+\cos r=\\&\cos(r+2\varphi)+(2\sin\varphi)\sin(r+3\varphi)-(2\sin\varphi)^2\cos(r+4\varphi)+\ldots\\&\qquad\ldots(-1)^{\frac{n-1}{2}}(2\sin\varphi)^{n-1}\cos[r+(n+1)\varphi];\end{aligned}\right.$$

wobei das Zeichen von Paar zu Paar wechselt.

Digitized by Google

Ferner erhalten wir nach 7.

$$
11.\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{\cos(r+n\varphi)\sin n\varphi}{\sin\varphi} &= \cos(r+\varphi)+\cos(r+3\varphi)+\cos(r+5\varphi)+\ldots \\
&\quad \ldots + \cos[r+(2n-1)\varphi], \\
\frac{\sin(r+n\varphi)\sin n\varphi}{\sin\varphi} &= \sin(r+\varphi)+\sin(r+3\varphi)+\sin(r+5\varphi)+\ldots \\
&\quad \ldots + \sin[r+(2n-1)\varphi];
\end{aligned} \right.
$$

und nach 8.

$$
12.\quad \left\{ \begin{aligned}
(-1)^n(2\sin\varphi)^n \sin[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})] &= \sin r - n_1 \sin(r+2\varphi) \\
&\quad + n_2 \sin(r+4\varphi) - \ldots (-1)^n n_n \sin(r+2n\varphi), \\
(-1)^n(2\sin\varphi)^n \cos[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})] &= \cos r - n_1 \cos(r+2\varphi) \\
&\quad + n_2 \cos(r+4\varphi) - \ldots (-1)^n n_n \cos(r+2n\varphi);
\end{aligned} \right.
$$

und endlich nach 9. für ein gerades n

$$
13^a.\quad \left\{ \begin{aligned}
\sin(r+2n\varphi) &= \sin r + n_1(2\sin\varphi)\cos(r+\varphi) - n_2(2\sin\varphi)^2\sin(r+2\varphi) - \ldots \\
&\quad \ldots (-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^n n_n \sin(r+n\varphi), \\
\cos(r+2n\varphi) &= \cos r - n_1(2\sin\varphi)\sin(r+\varphi) - n_2(2\sin\varphi)^2\cos(r+2\varphi) + \ldots \\
&\quad \ldots (-1)^{\frac{n}{2}}(2\sin\varphi)^n n_n \cos(r+n\varphi);
\end{aligned} \right.
$$

für ein ungerades n dagegen

$$
13^b.\quad \left\{ \begin{aligned}
&\sin(r+2n\varphi) = \sin r + n_1(2\sin\varphi)\cos(r+\varphi) \\
&- n_2(2\sin\varphi)^2\sin(r+2\varphi) - \ldots (-1)^{\frac{n+1}{2}} n_n(2\sin\varphi)^n\cos(r+n\varphi), \\
&\cos(r+2n\varphi) = \cos r - n_1(2\sin\varphi)\sin(r+\varphi) \\
&- n_2(2\sin\varphi)^2\cos(r+2\varphi) + \ldots (-1)^{\frac{n+1}{2}} n_n(2\sin\varphi)^n\sin(r+n\varphi);
\end{aligned} \right.
$$

wobei ein Zeichenwechsel von Paar zu Paar eintritt.

In der zweiten der durch 8. bezeichneten Gleichungen wollen wir jetzt $r+n\varphi=0$, also $r=-n\varphi$ setzen; wir erhalten dann

$$
\begin{aligned}
(2\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi + \ldots \\
\ldots + n_{n-1}\cos(n-2)\varphi + n_n\cos n\varphi,
\end{aligned}
$$

und hieraus, wenn wir die Cosinus der Gleichvielfachen des Bogens φ vereinigen und die Relation $n_m = n_{n-m}$ beachten, für ein gerades n

$$
14^a.\quad 2^{n-1}\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi + \ldots + \tfrac{1}{2}n_{\frac{1}{2}n},
$$

sowie für ein ungerades n

Digitized by Google

14^b. $2^{n-1}\cos\varphi^n = \cos n\varphi + n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi + \ldots$
$\ldots + n_{\frac{1}{2}(n-1)}\cos\varphi.$

Wenn wir ferner in der zweiten der durch 12. bezeichneten Gleichungen $r + n(\varphi + \frac{\pi}{2}) = 0$, also $r = -n(\varphi + \frac{\pi}{2})$ setzen, so erhalten wir durch ein ähnliches Verfahren, wie vorher, für ein gerades n

15^a. $(-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1}\sin\varphi^n = \cos n\varphi - n_1\cos(n-2)\varphi + n_2\cos(n-4)\varphi - \ldots$
$\ldots (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{2} n_{\frac{1}{2}n},$

für ein ungerades n gegentheils

15^b. $(-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}\sin\varphi^n = \sin n\varphi - n_1\sin(n-2)\varphi + n_2\sin(n-4)\varphi - \ldots$
$\ldots (-1)^{\frac{n-1}{2}} n_{\frac{1}{2}(n-1)}\sin\varphi.$

III.

Eine dritte Function, welche der Gleichung 1. entspricht, ist $f(r) = b^r$. Weil nun

$$b^r + b^{r+\psi} = (b^{\psi-\varphi} + b^{-\varphi}) . b^{r+\varphi},$$

so ist hier $a = b^{\psi-\varphi} + b^{-\varphi}$ zu setzen, und wir erhalten nach 4.

$$[b^{\psi-\varphi} + b^{-\varphi}]^n b^{r+n\varphi} = b^r + n_1 b^{r+\psi} + n_2 b^{r+2\psi} + \ldots + n_n b^{r+n\psi},$$

oder, wenn wir $\varphi = r = 0$ und $\psi = 1$, $b = \frac{\beta}{\alpha}$ setzen, und die hieraus entstehende Gleichung mit α^n multipliciren,

16. $(\alpha + \beta)^n = \alpha^n + n_1\alpha^{n-1}\beta + n_2\alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + n_n\beta^n,$

wodurch der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten auf einfache Weise bewahrheitet worden ist.

IV.

Sogleich übersehen wir die Richtigkeit der Gleichung

$$\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}[r + (n-1)\varphi]\cos\varphi^{n-1} = \overset{\sin}{\underset{\cos}{}}[r + n\varphi]\cos\varphi^n \mp \overset{\cos}{\underset{\sin}{}}[r + n\varphi]\sin\varphi\cos\varphi^{n-1},$$

und erlangen aus ihr, wenn wir für n nach und nach 1, 2, 3, ... n setzen und die so entstandenen Gleichungen addiren,

$$\Sigma\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}[r + (n-1)\varphi]\cos\varphi^{n-1}$$
$$= \Sigma\overset{\sin}{\underset{\cos}{}}[r + n\varphi]\cos\varphi^n \mp \sin\varphi\,\Sigma\overset{\cos}{\underset{\sin}{}}[r + n\varphi]\cos\varphi^{n-1},$$

Digitized by Google

und hieraus:

$$\mp \sin\varphi \Sigma \frac{\cos}{\sin} [r+n\varphi] \cos\varphi^{n-1} = \frac{\sin}{\cos}(r) - \frac{\sin}{\cos}(r+n\varphi)\cos\varphi^n,$$

so dass wir haben

17. $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n - \sin r}{\sin\varphi} = \cos(r+\varphi) + \cos(r+2\varphi)\cos\varphi + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \cos(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1} \\ \dfrac{-\cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n + \cos r}{\sin\varphi} = \sin(r+\varphi) + \sin(r+2\varphi)\cos\varphi + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \sin(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1}. \end{array}\right.$$

Die Anfangsglieder der aus der Reihe $\mp \Sigma \frac{\cos}{\sin}[r+n\varphi]\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi$ sich ergebenden Differenzenreihen sind der Ordnung nach

$$\frac{\sin}{\cos}(r+2\varphi)\sin\varphi^2,\ \pm\frac{\cos}{\sin}(r+3\varphi)\sin\varphi^3,\ -\frac{\sin}{\cos}(r+4\varphi)\sin\varphi^4,\ \mp \ldots$$
$$\ldots,\ -\frac{\sin}{\cos}[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n;$$

daher haben wir nach der Lehre von den höheren Differenzen die Gleichung

$$\mp \Sigma \frac{\cos}{\sin}(r+n\varphi)\cos\varphi^{n-1}\sin\varphi =$$

$$\mp n_1 \frac{\cos}{\sin}(r+\varphi)\sin\varphi + n_2 \frac{\sin}{\cos}(r+2\varphi)\sin\varphi^2 \pm \ldots - n_n \frac{\sin}{\cos}[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung, welche den durch 17. bezeichneten vorangeht,

18. $$\left\{\begin{array}{l} \sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n = \sin r + n_1\cos(r+\varphi)\sin\varphi - n_2\sin(r+2\varphi)\sin\varphi^2 - \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + n_n \sin[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n, \\ \cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n = \cos r - n_1\sin(r+\varphi)\sin\varphi - n_2\cos(r+2\varphi)\sin\varphi^2 + \\ \qquad\qquad \ldots + n_n\cos[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n. \end{array}\right.$$

Setzen wir nun in 17. und 18. $\varphi+\frac{\pi}{2}$ für φ, so erhalten wir für ein gerades n

19ᵃ. $$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^n + \sin r}{\cos\varphi} = \sin(r+\varphi) - \cos(r+2\varphi)\sin\varphi \\ \qquad\qquad - \ldots (-1)^{\frac{n}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}, \\ \dfrac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^n + \cos r}{\cos\varphi} = \cos(r+\varphi) + \sin(r+2\varphi)\sin\varphi \\ \qquad\qquad - \ldots (-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1}; \end{array}\right.$$

Digitized by Google

dagegen für ein ungerades n

$$19^b.\left\{\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^n+\sin r}{\cos\varphi}=\sin(r+\varphi)-\cos(r+2\varphi)\sin\varphi\\&\qquad\qquad-\ldots.(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1},\\&\frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}\sin(r+n\varphi)\sin\varphi^n+\cos r}{\cos\varphi}=\cos(r+\varphi)+\sin(r+2\varphi)\sin\varphi\\&\qquad\qquad-\ldots.(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos(r+n\varphi)\sin\varphi^{n-1};\end{aligned}\right.$$

und endlich

$$20.\left\{\begin{aligned}&(-1)^n\sin[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n=\sin r-n_1\sin(r+\varphi)\cos\varphi+\ldots.\\&\qquad\qquad\ldots.(-1)^n n_n\sin(r+n\varphi)\cos\varphi^n,\\&(-1)^n\cos[r+n(\varphi+\tfrac{\pi}{2})]\sin\varphi^n=\cos r-n_1\cos(r+\varphi)\cos\varphi+\ldots.\\&\qquad\qquad\ldots.(-1)^n n_n\cos(r+n\varphi)\cos\varphi^n.\end{aligned}\right.$$

V.

Vermittels einfacher Rechnung überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}-\frac{\beta+(n-1)k}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta_{n-1}}}{\overset{k}{\alpha_{n-1}}}=\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}},$$

aus welcher sich, wenn wir für n nach und nach $1, 2, 3, \ldots. n$ substituiren und die so erhaltenen Gleichungen addiren,

$$\Sigma\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}-\Sigma\frac{\beta+(n-1)k}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta_{n-1}}}{\overset{k}{\alpha_{n-1}}}=\Sigma\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}},$$

oder

$$\frac{\beta+nk}{\beta-\alpha+k}\cdot\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}-\frac{\beta}{\beta-\alpha+k}=\Sigma\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}},$$

folglich

$$21.\quad\frac{1}{\beta-\alpha+k}\Big[(\beta+nk)\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}-\beta\Big]=\frac{\overset{k}{\beta_1}}{\overset{k}{\alpha_1}}+\frac{\overset{k}{\beta_2}}{\overset{k}{\alpha_2}}+\frac{\overset{k}{\beta_3}}{\overset{k}{\alpha_3}}+\ldots.+\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}$$

ergiebt.

Indem wir aus dieser Reihe nach und nach die höheren Differenzenreihen entwickeln, so erhalten wir als erste Glieder derselben

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_1}}{\overset{k}{(\alpha+k)_1}},\quad\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_2}}{\overset{k}{(\alpha+k)_2}},\quad\ldots\ldots\ldots\quad\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_{n-1}}}{\overset{k}{(\alpha+k)_{n-1}}};$$

Digitized by Google

daher nach der Theorie der höheren Differenzen und nach 21.

$$\frac{1}{\beta-\alpha+k}\Big[(\beta+nk)\frac{\overset{k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}-\beta\Big]=n_1\frac{\beta}{\alpha}+n_2\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_1}}{\overset{k}{(\alpha+k)_1}}+n_3\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_2}}{\overset{k}{(\alpha+k)_2}}+\ldots$$

$$\ldots+n_n\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\overset{-k}{(\beta-\alpha)_{n-1}}}{\overset{k}{(\alpha+k)_{n-1}}}.$$

Setzen wir in dieser Gleichung $\alpha+\beta-k$ für β, so erhalten wir durch einfache Umwandlung die bemerkenswerthe Relation

$$22.\quad \frac{\alpha+\beta+(n-1)k}{\alpha+\beta-k}\cdot\frac{\overset{k}{(\alpha+\beta-k)_n}}{\overset{k}{\alpha_n}}=1+n_1\frac{\overset{-k}{\beta_1}}{\overset{k}{\alpha_1}}+n_2\frac{\overset{-k}{\beta_2}}{\overset{k}{\alpha_2}}+\ldots+n_n\frac{\overset{-k}{\beta_n}}{\overset{k}{\alpha_n}},$$

woraus für $k=0$

$$\frac{(\alpha+\beta)^n}{\alpha^n}=1+n_1\frac{\beta}{\alpha}+n_2\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^2+\ldots+n_n\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^n,$$

oder

$$23.\quad (\alpha+\beta)^n=\alpha^n+n_1\alpha^{n-1}\beta+n_2\alpha^{n-2}\beta^2+\ldots+n_{n-1}\alpha\beta^{n-1}+n_n\beta^n$$

erhalten wird, so dass das Binomialtheorem für positive ganze Exponenten als ein specieller Fall aus der allgemeineren Gleichung 22. hervorgegangen ist.

VI.

Es ist offenbar

$$\frac{\beta}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\frac{1}{\alpha+(n-1)\beta}-\frac{1}{\alpha+n\beta},$$

folglich, wenn wir für n nach und nach 1, 2, 3,.... n einsetzen und die auf diese Weise sich herausstellenden Gleichungen addiren,

$$\beta\Sigma\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\Sigma\frac{1}{\alpha+(n-1)\beta}-\Sigma\frac{1}{\alpha+n\beta}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+n\beta},$$

oder

$$\Sigma\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}=\frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)},$$

so dass wir jetzt folgende Gleichung haben:

$$24.\quad \frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)}=\frac{1}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{1}{(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}+\ldots+\frac{1}{[\alpha+(n-1)\beta][\alpha+n\beta]}.$$

Dieser Reihe können wir $n-1$ Differenzenreihen abgewinnen und wir erhalten als Anfangsglieder derselben

Digitized by Google

$$-\frac{1.2.\beta}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}, +\frac{1.2.3.\beta^2}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)}, -\ldots;$$
$$\ldots, (-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.n.\beta^{n-1}}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+n\beta)};$$

folglich nach der Lehre von den höheren Differenzen

$$\frac{n}{\alpha(\alpha+n\beta)}=\frac{n_1}{\alpha(\alpha+\beta)}-\frac{1.2.n_2\beta}{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}+\frac{1.2.3.n_3\beta^2}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+3\beta)}-\ldots$$
$$\ldots.(-1)^{n-1}\frac{1.2.3\ldots.n.n_n\beta^{n-1}}{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.(\alpha+n\beta)},$$

oder, wenn wir mit $\alpha\beta$ multipliciren und dann $\alpha-\beta$ für α setzen:

$$\frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=\frac{n_1\beta}{\alpha}-\frac{n_2\beta^2}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)}{1.2}}+\frac{n_3\beta^3}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)}{1.2.3}}-\ldots.$$
$$\ldots(-1)^{n-1}\frac{n_n\beta^n}{\frac{\alpha(\alpha+\beta)\ldots.[\alpha+(n-1)\beta]}{1.2\ldots.n}},$$

d. i.

$$25.\quad \frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=\frac{n_1}{\overset{\beta}{\alpha_1}}\beta-\frac{n_2}{\overset{\beta}{\alpha_2}}\beta^2+\frac{n_3}{\overset{\beta}{\alpha_3}}\beta^3-\ldots.(-1)^{n-1}\frac{n_n}{\overset{\beta}{\alpha_n}}\beta^n$$

Setzen wir hierin $\alpha=2$, $\beta=1$ und addiren wir, nachdem die Vorzeichen aller Glieder in die entgegengesetzten verwandelt worden sind, auf beiden Seiten die Einheit, so ergiebt sich die bereits bekannte Gleichung

$$26.\quad \frac{1}{1+n}=1-\frac{1}{2}n_1+\frac{1}{3}n_2-\frac{1}{5}n_3+\ldots.(-1)^n\frac{1}{n+1}n_n.$$

Die ersten Glieder der aus der Reihe 25. gebildeten Differenzenreihen sind

$$-\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta_1)}, +\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}, -\ldots, (-1)^{n-1}\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)^{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)^{n-1}};$$

daher nach der Lehe von den höheren Differenzen

$$\frac{n\beta}{\alpha+(n-1)\beta}=n_1\frac{n\beta}{\alpha}-n_2\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_1}+n_3\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}-\ldots.$$
$$\ldots.(-1)^n n_n\frac{n\beta}{\alpha}.\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_{n-1}}$$

oder

$$27.\quad \frac{\alpha}{\alpha+(n-1)\beta}=n_1-n_2\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_1}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_1}+n_3\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_2}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_2}-\ldots$$

$$\ldots(-1)^n n_n\frac{(\alpha\overset{\beta}{+}n\beta)_{n-1}}{(\alpha\overset{\beta}{+}\beta)_{n-1}}.$$

XX.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

Schneidet man auf den Seiten AB und BC (die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst zeichnen können) des Dreiecks ABC von A und C aus die Stücke $AD=\frac{1}{\alpha}AB$ und $CE=\frac{1}{\beta}BC$ ab, bezeichnet zur Abkürzung den Flächeninhalt des Dreiecks ABC durch Δ, und zieht durch die Spitze B desselben und den Durchschnittspunkt O der Linien AE und CD die, die Seite AC in F schneidende Linie BOF; so ist:

das Dreieck $OCE=\dfrac{\alpha-1}{\beta(\alpha+\beta-1)}\Delta$, und für $\alpha=\beta:=\dfrac{\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$BOE=\dfrac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\beta(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$BOD=\dfrac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$AOD=\dfrac{\beta-1}{\alpha(\alpha+\beta-1)}\Delta$, „ „ „ $:=\dfrac{(\alpha-1}{\alpha(2\alpha-1)}\Delta$;

$OAF=\dfrac{\beta-1}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}\Delta$, „ „ „ $:=\dfrac{1}{2(2\alpha-1)}\Delta$;

$OFC=\dfrac{\alpha-1}{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}\Delta$, „ „ „ $:=\dfrac{1}{2(2\alpha-1)}\Delta$.

Digitized by Google

Ferner hat man:

$$OC:OD=\alpha:\beta-1, \text{ und für } \alpha=\beta:=\alpha:\alpha-1;$$
$$AO:OE=\beta:\alpha-1, \quad „ \quad „ \quad „ \quad :=\alpha:\alpha-1;$$
$$AF:FC=\beta-1:\alpha-1, \quad „ \quad „ \quad „ \quad :=1:1;$$
$$OB:OF=\alpha+\beta-2:1, \quad „ \quad „ \quad „ \quad :=2(\alpha-1):1.$$

Setzt man in letzterm, besondern Falle $\alpha=2$, so findet man:

$$OEC=BOE=BOD=AOD=AOF=FOC=\tfrac{1}{6}\Delta,$$
$$AF=FC,\ OC=2OD,\ AO=2OE,\ OB=OF;$$

wie bekannt.

II.

Zieht man vom Mittelpunkte des Hyperboloids **mit einem** Fache, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

sei, an den Punkt x', y', z' desselben einen Radiusvector r'; legt durch den Punkt x', y', z' eine Tangentialebene an das Hyperboloid und durch den Mittelpunkt eine Ebene parallel mit dieser; errichtet sodann auf der neuen Ebene im Mittelpunkte eine Senkrechte, so machen die Senkrechte und der Radiusvector r' mit einander einen stumpfen Winkel, dessen Cosinus

$$=\frac{-1}{r'\sqrt{\frac{z'^2}{c^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{x'^2}{a^4}}}$$

ist. Ist das Hyperboloid dagegen eines mit zwei Fächern:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

so ist der erwähnte Winkel spitz und sein Cosinus

$$=\frac{+1}{r'\sqrt{\frac{z'^2}{c^4}+\frac{y'^2}{b^4}+\frac{x'^2}{a^4}}}.$$

Setzt man endlich den Asymptotenkegel:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

so ist der erwähnte Winkel ein rechter.

(Man sehe: Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes par Lamé et Clapeyron in Crelle's Journal. Bd. 7. §. 31.)

Digitized by Google

XXI.

Miscellen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Ueber einen Satz aus der analytischen Geometrie.

Herr Professor Lobatto stellt im Journal von Liouville. Juin 1846. folgenden Satz auf:

Seien α, β, γ die Winkel, welche eine gegebene Gerade mit ihren drei Projektionen auf den Ebenen der xy, xz, yz macht; seien ferner δ, δ_1, δ_2 die Entfernungen des Anfangspunktes der Koordinaten von dieser Projektion, $\varDelta$ die Entfernung dieses Punktes von der Geraden selbst; so ist:

$$\varDelta^2 = \delta^2\cos^2\alpha + \delta_1{}^2\cos^2\beta + \delta_2{}^2\cos^2\gamma,$$

welchen Satz nun Herr Lobatto direkt beweist.

Dieser Satz ist aber eine unmittelbare Folge des bekannten Satzes, dass, wenn man einen Flächenraum P auf drei senkrecht auf einander stehende Ebenen projizirt, und p, p_1, p_2 diese Projektionen sind, man hat:

$$P^2 = p^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2.$$

(Einen einfachen Beweis dieses Satzes findet man u. A. in Boucharlat populäre Mechanik, deutsch von Kissling. 4ter Theil. S. 133. ff.)

Man ziehe nämlich durch den Anfangspunkt der Koordinaten mit der gegebenen Geraden eine Parallele und bilde zwischen diesen beiden Linien ein Parallelogramm, dessen eine Spitze im Anfangspunkte der Koordinaten sei, so wird der Flächeninhalt desselben $\mathfrak{L}\varDelta$ sein, wenn $\mathfrak{L}$ die Länge der Seite des Parallelogramms ist, die auf der gegebenen Linie selbst genommen ist. Projizirt man dieses Parallelogramm auf die drei Koordinatenebenen, so sind die Projektionen ebenfalls Parallelogramme, deren Flächeninhalte offenbar $\mathfrak{L}\cos\alpha.\delta$, $\mathfrak{L}\cos\beta.\delta_1$, $\mathfrak{L}\cos\gamma.\delta_2$ sind, und also ist

Digitized by Google

$$\mathfrak{L}^2\Delta^2=\mathfrak{L}^2\cos^2\alpha.\delta^2+\mathfrak{L}^2\cos^2\beta.\delta_1^2+\mathfrak{L}^2\cos^2\gamma.\delta_2^2$$

oder

$$\Delta^2=\delta^2\cos^2\alpha+\delta_1^2\cos^2\beta+\delta_2^2\cos^2\gamma,$$

welches der erwähnte Satz ist.

Denkt man sich durch die gegebene Gerade und den Anfangspunkt der Koordinaten eine Ebene gelegt, so ist der Kosinus des Winkels, den diese Ebene (die Ebene des vorhin erwähnten Parallelogramms) mit der Ebene der xy macht, also gleich $\frac{\mathfrak{L}\cos\alpha.\delta}{\mathfrak{L}.\Delta}=\frac{\delta\cos\alpha}{\Delta}$; desgleichen sind die Kosinus der Winkel dieser Ebene mit den Ebenen der xz, yz gleich $\frac{\delta_1\cos\beta}{\Delta}$, $\frac{\delta_2\cos\gamma}{\Delta}$; demnach ist die Gleichung der fraglichen Ebene

$$\delta_2\cos\gamma.x+\delta_1\cos\beta.y+\delta\cos\alpha.z=0,$$

wie Herr Lobatto ebenfalls findet.

Heissen x', y', z' die Koordinaten des einen Eckpunktes des mehrerwähnten Parallelogramms in der gegebenen Linie selbst, und sind α', β', γ' die Winkel, welche die gegebene Gerade mit den Axen der x, y, z macht, so findet man für den Flächeninhalt der Projektion des Parallelogramms auf der Ebene der xy:

$$\pm\mathfrak{L}(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta');$$

demnach ist

$$\mathfrak{L}\delta\cos\alpha=\pm\mathfrak{L}(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta'),\ \delta\cos\alpha=\pm(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta').$$

Ganz eben so:

$$\delta_1\cos\beta=\pm(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha'),\ \delta_2\cos\gamma=\pm(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma').$$

Von diesen Sätzen ausgehend beweist Herr Professor Lobatto nun die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts eines Systems von Kräften.

Ist nämlich P die Intensität einer wirkenden Kraft, und sind a, b, c die Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen der x, y, z macht, so kann man diese Kraft parallel mit sich selbst in den Anfangspunkt versetzen und ein Paar von der Intensität $P\Delta$ beifügen, ohne dass das Gleichgewicht geändert wird. Die erste Kraft zerlegt sich in $P\cos a$, $P\cos b$, $P\cos c$, während das Paar sich zerlegt in $P\cos\alpha.\delta$, $P\cos\beta.\delta_1$, $P\cos\gamma.\delta_2$, und man erhält als Gleichungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma P\cos a=0,\ \Sigma P\cos b=0,\ \Sigma P\cos c=0;$$

$$\Sigma P\cos\alpha.\delta=0,\ \Sigma P\cos\beta.\delta_1=0,\ \Sigma P\cos\gamma.\delta_2=0.$$

Die letzten drei Gleichungen sind auch nach dem Obigen:

$$\Sigma P(y\cos a-x\cos b)=0,\ \Sigma P(x\cos c-z\cos a)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos b-y\cos c)=0;$$

da die Doppelzeichen nicht zu beachten sind, wenn man die Kräftenpaare, die nach entgegengesetzten Seiten zu drehen suchen, auch als entgegengesetzt betrachtet.

Digitized by Google

XXII.

Theorematis in T. VII. pag. 266. *) propositi demonstratio.

Auctore Dr. E. G. Björling,
ad Acad. Upsal. Docens Mathes.

Celeb. Prof. Schlömilch Commentatione suâ „*Ueber die höheren Differenzialquotienten des Ausdrucks* $(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)}$“, in T. VIII. praeced. pag. 357. exposita, admonitum me fecit quodammodo promisso demum satisfacere, in notula sub pag. 266. T. VII. relato, oblaturum me fore aliquando Theorematis loco cit. propositi demonstrationem in hoc „Archivo“ condendam. Quod nempe Theorema (ut apparet) formulam exhibet generalem, juxta quam breviter — [et quidem numero terminorum, ex ordine, 1, 2, 3, 4, ... $(m+1)$] — exprimi liceat valorem expressionum cujusque harum [n denot. numerum integrum]:

$$n_0-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\&c.$$

(usque ad primum term. evanescentem),

$$1.\ (n+1)_1-2n_2+3(n-1)_3-4(n-2)_4+\&c.,$$

$$1.\ (n+2)_2-3(n+1)_3+6n_4-10(n-1)_5+\&c.,$$

$$1.\ (n+3)_3-4(n+2)_4+10(n+1)_5-20n_6+\&c.$$

$$\vdots$$

*) Quae ibi deprehensa sunt menda nonnulla typographica jam corrigi liceat haecce:

In pag. 266,	lin. 10,	loco	$+4.(n-2)_4$	legas	$-4.(n-2)_4$
„ 267,	„ 15,	„	$-10(n+1)_5+$	„	$+10(n+1)_5-$
„ 267,	„ 16,	„	$2(n\ \ 2)_2$	„	$2(n+2)_2$
„ 268,	„ 11,	„	$+4(p-3)_4$	„	$-4(p-3)_4$.

$$(\alpha)\ldots\ldots \overset{m}{F}_0.(n+m)_m-\overset{m}{F}_1.(n+m-1)_{m+1}+\overset{m}{F}_2(n+m-2)_{m+2}$$
$$-\overset{m}{F}_3.(n+m-3)_{m+3}+\&c.$$

denotantibus [m numero integro aut 0]

$$\overset{m}{F}_0,\ \overset{m}{F}_1,\ \overset{m}{F}_2,\ \overset{m}{F}_3,\ \&c.$$

breviter „numeros $m$ti ordinis figuratos“

$$(\beta)\ .\ .\ .\ .\ .\ m_0,\ (m+1)_1,\ (m+2)_2,\ (m+3)_3,\ \&c.$$

Conaturo me jam id quod promisi exsolvere, pauca haec fere praemisisse juvabit.

Quemadmodum figurati illi numeri (β) Coëfficientes ipsas conficiunt dignitatum ipsius x earum, quae in evolutâ functione

$$(1-x)^{-(m+1)}$$

occurrunt, sic quantitas illa (α) Coëfficientem ipsius x^n in evolutâ

$$(\gamma)\ldots\ldots[1-x(1-x)]^{-(m+1)}\text{seu}(1-x+x^2)^{-(m+1)}\ *).$$

Quae quidem res ut primum fuit perspecta, habitâque insuper ratione identitatis expressionum illarum

$$1-x+x^2 \text{ atque } (1+\alpha x)(1+\beta x),$$

[α et β breviter ambas illas radices cubicas ex $+1$ imaginarias, $\cos\frac{2\pi}{3}\pm\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$, denotantibus]; ea fere in aprico posita est

---

*) Scilicet ex eo quod, dum y numerice <1 est,

$$(1-y)^{-(m+1)}=1+(m+1)_1 y+(m+2)_2 y^2+(m+3)_3 y^3+\text{etc.}$$

sic quoque, dum $x(1-x)$ numerice <1 est, habetur

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)}=1+(m+1)_1 x(1-x)+(m+2)_2 x^2(1-x)^2+\ldots$$
$$\ldots+(m+n-1)_{n-1} x^{n-1}(1-x)^{n-1}+(m+n)_n x^n(1-x)^n+\text{etc.}$$

nec ullâ hoc tempore opus est curâ probandi licere (certe dum x numerice <1 est) posterioris hujus membri loco substitui istam:

$$1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\text{etc.}$$

scilicet

$$A_n=n_0(m+n)_n-(n-1)_1(m+n-1)_{n-1}+(n-2)_2(m+n-2)_{n-2}-\text{etc.}$$

usque ad primum term. evanescentem, cujus de reductione in formam (α), si placet, videri licet in nota I. sub finem hujusce Commentationis.

Digitized by Google

via *), quam recte insequendo Theorema, de quo quaeritur, demonstratum sistere liceat. Etenim utrâque seorsim evolutâ functionum

$$(\delta) \;\ldots\ldots\; (1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)},$$

si deinceps eximatur coëfficiens ipsius x^n in „producto“ serierum hoc modo comparatarum **), reverâ continget ut coëfficientem hancce in $m+1$ terminos redigi liceat. Quae si tandem formula ex $m+1$ terminis confecta ipsi (α) aequatur, demonstratum erit theorema.

His jam praemissis rem ipsam adgredimur.

---

1. Uti supra est monitum, id solum agitur ut evincatur duplex illud membrum posterius aequationis (I) in Theoremate, de quo quaeritur, Coëfficientem conficere ipsius x^n in „producto“ serierum ex evolutis seorsim ambabus (δ) comparatarum. Id quod in tali re solito hoc more perfici licebit.

1°)

Ex hisce

$$\left\{ \text{et} \begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-1} = 1 - \alpha x + \alpha^2 x^2 - \ldots + (-1)^n \alpha^n x^n + \&c. \\ (1+\beta x)^{-1} = 1 - \beta x + \beta^2 x^2 - \ldots + (-1)^n \beta^n x^n + \&c. \end{array} \right.$$

consequitur

$$(1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = 1 - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}x + \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}x^2 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}x^n + \&c.$$

ideoque esse coëfficientem ipsius x^n in „producto“ serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-1}$ et $(1+\beta x)^{-1}$ comparatarum istbanc

$$(\text{I}) \;\ldots\; (-1)^n.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} = \overset{-1}{C_n} \text{ (breviter).}$$

2°)

Ex hisce

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = \underset{i=0}{\overset{i=\infty-1}{S}} C_i x^i \\ \text{et} \\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = \underset{i=0}{\overset{i=\infty-1}{S}} C_i x^i \end{array} \right.$$

---

*) Conf. tamen ea, quae, in nota I. sub finem opusculi hujus relata, de hac re admonendi ansam nobis dedit Commentatio, cujus supra mentionem fecimus, Celeb. Schlömilch.

**) Nos quid hac phrasi „producto serierum“ intellectum volumus, id nullâ sane hoc tempore opus habet explicatione. Nec omnino locus

Digitized by Google

consequitur *) esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-2}$ et $(1+\beta x)^{-2}$ comparatarum isthanc

$$\overset{-2}{C_n} = \underset{i=0}{\overset{i=n-1}{S}} \overset{-1}{C_{n-i}} \overset{-1}{C_i},$$

ideoque, secundum (1),

$$(1)....(-1)^n(\alpha-\beta)^2 . \overset{-2}{C_n} = \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}).$$

Jam, quoniam $\alpha\beta=1$ est, membrum hoc posterius abit in

$$\alpha^{n+1} . \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (\alpha-\beta^{2i+1}) - \beta^{n+1} . \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (\alpha^{2i+1}-\beta)$$

seu

$$(2) \ldots . (n+1)(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}) - [\alpha^n . \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} \beta^{2i} + \beta^n . \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} \alpha^{2i}].$$

At habetur

$$\underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} \alpha^{2i} = \frac{\alpha^{2n+2}-1}{\alpha^2-1},$$

ideoque quantitas illa intra uncos [ ] in (2), vi relationum illarum

$$(3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{1}{\alpha-\beta} = -\frac{\beta}{\beta^2-1},$$

conficit

$$2 . \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

atque aequatio illa (1) abit in

---

est dubitandi, quin seriei illi, quae hoc ipsum conficit „productum", summa sit isthaec $(1+\alpha x)^{-(m+1)}(1+\beta x)^{-(m+1)}$ seu $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$, dum x numerice < 1 est, — quippe quoniam tunc serierum utraque earum, quas evolutae seorsim ambae illae (δ), convergentes remanerent, etiamsi in iis terminorum loco substituerentur ipsi moduli.

*) In hoc ipso, ut patet, cardo ipse artificii vertitur: esse (inquam) coëfficientem ipsius x^n in producto serierum, ex evolutis seorsim ambabus

$$(1+\alpha x)^{-m}(1+\beta x)^{-m} \text{ et } (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}$$

comparatarum, eodem usque valore ac coëffic. ipsius x^n in producto serierum ex evolutis seorsim ambabus illis

$$(1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)}$$

comparatarum, — quippe quoniam ambobus his „serierum productis" summa cedit communis (γ), x quâlibet numerice < 1.

Digitized by Google

$$(\text{II}) \ldots\ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^2.\overset{-2}{C_n}=(n+1)(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-2.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

3⁰)

Tum ex hisce

$$\left\{\begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-2}(1+\beta x)^{-2}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-2}{C_i}x^i \\ \text{et} \\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_i}x^i \end{array}\right.$$

consequitur esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-3}$ et $(1+\beta x)^{-3}$ comparatarum isthanc

$$\overset{-3}{C_n}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_{n-i}}\overset{-2}{C_i},$$

ideoque, secundum (II),

$$(4) \ldots\ldots\ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^3.\overset{-3}{C_n}$$

$$=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})\left[(i+1)_1(\alpha^{i+2}+\beta^{i+2})-2.\frac{\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}}{\alpha-\beta}\right]$$

$$=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+1)_1(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+2}+\beta^{i+2})$$

$$-\frac{2}{\alpha-\beta}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}),$$

seu breviter

$$(4') \ldots\ldots = S_2-\frac{2}{\alpha-\beta}S_1,$$

scilicet posito (brevitatis ergo), p denotante numerum integrum aut 0,

$$S_{p+1}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})(\alpha^{i+p+1}+(-1)^{p+1}.\beta^{i+p+1}).$$

At, vi naturae ipsarum α et β, habetur relatio ista (dum p numerus est integer):

$$(\text{A})\ldots\; S_{p+1}=(n+p+1)_{p+1}(\alpha^{n+p+2}+(-1)^{p+2}.\beta^{n+p+2})-\frac{S_p}{\alpha-\beta} \quad ^{*)},$$

cujus ope formula (4') reducitur in

*) Vid. Notam II. sub finem hujusce Commentationis.

Digitized by Google

$$(n+2)_2(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3})-\frac{3}{\alpha-\beta}S_1;$$

adhibitâque demum, quae ex allatis in 2⁰) consequitur, formulâ

$$(A')\ldots\ldots S_1=(n+1)(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})-2.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta},$$

patet aequationem (4) abire in

$$(III)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^3.\overset{-3}{C_n}=(n+2)_2(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3})-3(n+1)_1\frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}$$
$$+6.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^2}.$$

4⁰)

Porro ex hisce

$$\left\{\begin{array}{l}(1+\alpha x)^{-3}(1+\beta x)^{-3}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-3}{C_i}x^i\\ \text{et}\\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1}=\overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_i}x^i\end{array}\right.$$

consequitur esse coëfficientem ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-4}$ et $(1+\beta x)^{-4}$ comparatarum isthanc

$$\overset{-4}{C_n}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}\overset{-1}{C_{n-i}}\overset{-3}{C_i},$$

ideoque, secundum (III),

$$(5)\ldots(-1)^n(\alpha-\beta)^4.\overset{-4}{C_n}=\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})\Big[(i+2)_2(\alpha^{i+3}-\beta^{i+3})$$
$$-3(i+1)_1\frac{\alpha^{i+2}+\beta^{i+2}}{\alpha-\beta}+6.\frac{\alpha^{i+1}-\beta^{i+1}}{(\alpha-\beta)^2}\Big]$$
$$=S_3-\frac{3}{\alpha-\beta}.S_2+\frac{6}{(\alpha-\beta)^2}S_1.$$

At secundum aequationem illam (A) habentur

$$S_3=(n+3)_3(\alpha^{n+4}+\beta^{n+4})-\frac{S_2}{\alpha-\beta},$$

$$S_2=(n+2)_2(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3})-\frac{S_1}{\alpha-\beta};$$

earumque ope, adhibitâ insuper aequat. illâ (A'), patet abire aequat. (5) in

Digitized by Google

$$\text{(IV)} \ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^4 . \overset{-4}{C_n} = (n+3)_3(\alpha^{n+4}+\beta^{n+4}) - 4(n+2)_2 \frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}$$
$$+ 10(n+1)_1 \frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2} - 20 . \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^3} .$$

5⁰)

Ulterius ex hisce

$$\left\{\begin{array}{l} (1+\alpha x)^{-4}(1+\beta x)^{-4} = \overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}} \overset{-4}{C_i}\, x^i \\ \text{et} \\ (1+\alpha x)^{-1}(1+\beta x)^{-1} = \overset{i=\infty}{\underset{i=0}{S}} \overset{-1}{C_i}\, x^i \end{array}\right.$$

eàdem usque ratione ac in praecedentibus concludi licebit, ita esse comparatam coëfficientem $\overset{-5}{C_n}$ ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-5}$ et $(1+\beta x)^{-5}$ coortarum, ut sit

$$\text{(V)} \ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^5 . \overset{-5}{C_n} = (n+4)_4(\alpha^{n+5}-\beta^{n+5}) - 5(n+3)_3 \frac{\alpha^{n+4}+\beta^{n+4}}{\alpha-\beta}$$
$$+ 15(n+2)_2 \frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{(\alpha-\beta)^2} - 35(n+1)_1 \frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^3}$$
$$+ 70 \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^4} .$$

2. Jamque per inductionem conjici licet esse (dum m denotat numerum integrum aut 0) ita comparatam coëfficientem $\overset{-(m+1)}{C_n}$ ipsius x^n in „producto" serierum ex evolutis $(1+\alpha x)^{-(m+1)}$ et $(1+\beta x)^{-(m+1)}$ coortarum, ut sit

$$\text{(VI)} \ldots (-1)^n(\alpha-\beta)^{m+1} . \overset{-(m+1)}{C_n} = (n+m)_m(\alpha^{n+m+1}+(-1)^{m+1} . \beta^{n+m+1})$$
$$- \overset{m}{F_1}(n+m-1)_{m-1} \frac{\alpha^{n+m}+(-1)^m . \beta^{n+m}}{\alpha-\beta}$$
$$+ \overset{m}{F_2}(n+m-2)_{m-2} \frac{\alpha^{n+m-1}+(-1)^{m-1} . \beta^{n+m-1}}{(\alpha-\beta)^2} - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^m . \overset{m}{F_m} . \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^m} ,$$

(VI′)

$$= \overset{k=m}{\underset{k=0}{S}} (-1)^k (m+k)_k (n+m-k)_{m-k} \frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^{m+1-k}\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^k} .$$

Valere hanc legem pro $m=0, 1, 2, 3, 4$, jam supra erat expertum. Concesso, valere eam usque ad m quemdam (inclusive), probabitur jam vera esse pro sequenti $m+1$.

Reverâ habetur, ut solitum,

$$\overset{-(m+2)}{C_n} = \overset{i=n}{\underset{i=0}{S}} \overset{-1}{C_{n-i}} \overset{-(m+1)}{C_i} ,$$

ideoque, secundum (VI′),

$$(6)\ldots\; (-1)^n(\alpha-\beta)^{m+2}\,.\,\overset{-(m+2)}{C_n} = \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}}\Big[(\alpha^{n+1-i}-\beta^{n+1-i})\underset{k=0}{\overset{k=m}{S}}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\,\frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^{m+1-k}\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^k}\Big],$$

i. e. (posito success. $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots m$)

$$(6')\ldots = S_{m+1} - \frac{(m+1)_1}{\alpha-\beta}S_m + \frac{(m+2)_2}{(\alpha-\beta)^2}S_{m-1} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)_{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m-1}}S_2 + (-1)^m\frac{(2m)_m}{(\alpha-\beta)^m}S_1.$$

At ope aequationis illius (A) adhibitisque insuper relationibus illis

$$\left\{\begin{array}{c} (m+2)_1+(m+2)_2=(m+3)_2, \\ (m+3)_2+(m+3)_3=(m+4)_3, \\ \text{etc. in genere} \\ (m+p)_{p-1}+(m+p)_p=(m+p+1)_p, \end{array}\right.$$

reducuntur in (6′) — [ponendo success. $p=m,\ m-1,\ \ldots 3,\ 2,\ 1$] — successive termini

primi ambo in

$$(n+m+1)_{m+1}(\alpha^{n+m+2}+(-1)^{m+2}\beta^{n+m+2}) - \frac{(m+2)_1}{\alpha-\beta}S_m,$$

primi tres in

$$\underset{k=0}{\overset{k=1}{S}}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k} + \frac{(m+3)_2}{(\alpha-\beta)^2}S_{m-1}.$$

primi quatuor in

$$\underset{k=0}{\overset{k=2}{S}}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k} - \frac{(m+4)_3}{(\alpha-\beta)^3}S_{m-2}.$$

Digitized by Google

et sic porro: adeo ut primi m termini (h. e. omnes ultimo excepto) reducantur in

$$\underset{k=0}{\overset{k=m-2}{S}}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}$$

$$+(-1)^{m-1}\frac{(2m)_{m-1}}{(\alpha-\beta)^{m-1}}S_2,$$

ideoque tota quantitas (6′) in

$$\underset{k=0}{\overset{k=m-1}{S}}(-1)^k(m+1+k)_k(n+m+1-k)_{m+1-k}\frac{\alpha^{n+m+2-k}+(-1)^{m+2-k}\beta^{n+m+2-k}}{(\alpha-\beta)^k}$$

$$+(-1)^m\frac{(2m+1)_m}{(\alpha-\beta)^m}S_1;$$

cujus quum terminus novissimus secundum aequat. (A′), ope relationis

$$(2m+1)_m.2=(2m+2)_{m+1},$$

abit in

$$(-1)^m(2m+1)_m(n+1)_1\frac{\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^m}+(-1)^{m+1}(2m+2)_{m+1}.\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{(\alpha-\beta)^{m+1}},$$

jam omni absque dubio patet reduci (6′) in ipsum membrum posterius aequat. (VI′) mutato ibi m in $(m+1)$.

Q. E. D.

3. Quae cum ita sint, habetur ex aequat. (VI′)

$$(-1)^n.\overset{-(m+1)}{C_n}=$$

dum m par est aut 0:

$$\underset{k=0}{\overset{k=m}{S}}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}-(-1)^k\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^{m+1+k}},$$

dum vero impar:

$$\underset{k=0}{\overset{k=m}{S}}(-1)^k(m+k)_k(n+m-k)_{m-k}\frac{\alpha^{n+m+1-k}+(-1)^k\beta^{n+m+1-k}}{(\alpha-\beta)^{m+1+k}};$$

seu, quod idem valet,

dum m par est aut 0:

(VI″) . . . . $(-1)^n.\overset{-(m+1)}{C_n}$

$$=\left\{\begin{array}{l}\underset{i=0}{\overset{i=\frac{m}{2}}{S}}(m+2i)_{2i}(n+m-2i)_{m-2i}\dfrac{\alpha^{n+m+1-2i}-\beta^{n+m+1-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+1+2i}}\\-\underset{i=0}{\overset{i=\frac{m}{2}-1}{S}}(m+2i+1)_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1}\dfrac{\alpha^{n+m-2i}+\beta^{n+m-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+2+2i}},\end{array}\right.$$

Digitized by Google

dum vero impar:

$$(\text{VI}'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (-1)^n . \overset{-(m+1)}{C_n}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (m+2i)_{2i}(n+m-2i)_{m-2i} \dfrac{\alpha^{n+m+1-2i} + \beta^{n+m+1-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+1+2i}} \\ - \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (m+2i+1)_{2i+1}(n+m-2i-1)_{m-2i-1} \dfrac{\alpha^{n+m-2i} - \beta^{n+m-2i}}{(\alpha-\beta)^{m+2+2i}}; \end{array} \right.$$

quae quidem aequationes, debitâ ratione habitâ relationum

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \\ \beta\end{array}\right\} = \cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}\,{}^{*)} = -(\cos\frac{\pi}{3} \mp \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$2\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \; 2\cos\frac{\pi}{3} = 1,$$

perfectisque nonnullis reductionibus **) tandemque loco ipsius $\overset{-(m+1)}{C_n}$ substitutâ expressione illâ (α) [in prooemio], in aequationem ipsam (I) theorematis nostri abeunt: cui praeterea novam hanc immutatam aliquantulum magisque concinnam reddere juvat formam:

Theorema.

Denotantibus $\overset{m}{F_0}(=1)$, $\overset{m}{F_1}$, $\overset{m}{F_2}$, $\overset{m}{F_3}$, etc. Numeros m^{ti} ordinis Figuratos, nempe

$$m_0, \; (m+1)_1, \; (m+2)_2, \; (m+3)_3, \text{ etc.}$$

atque n numerum integrum quemlibet, habetur

dum m par est aut 0:

$$\text{"(I)"} \ldots 1.(n+m)_m - \overset{m}{F_1}.(n+m-1)_{m+1} + \overset{m}{F_2}.(n+m-2)_{m+2} \\ - \overset{m}{F_3}.(n+m-3)_{m+3} + \text{etc.}$$

---

*) Scilicet (ut patet) aequationibus praecedentibus nil refert, cuinam potissimum ipsarum $\cos\frac{2\pi}{3} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{3}$ nomen α aut β referatur.

**) Quibus in perficiendis probe erit tenendum, p et r numeros integros aut 0 denotantibus, haberi

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha-\beta = \pm 2\sin\frac{\pi}{3}.\sqrt{-1} = \pm\sqrt{3}.\sqrt{-1}, \\ (\alpha-\beta)^{2r} = (-3)^r, \\ \dfrac{\alpha^p+\beta^p}{(\alpha-\beta)^{2r}} = (-1)^{p+r}.\dfrac{2\cos p\frac{\pi}{3}}{(\sqrt{3})^{2r}} = (-1)^p(-\tfrac{1}{3})^r\dfrac{\cos p\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}, \\ \dfrac{\alpha^p-\beta^p}{(\alpha-\beta)^{2r+1}} = (-1)^{p+1+r}.\dfrac{2\sin p\frac{\pi}{3}}{(\sqrt{3})^{2r+1}} = (-1)^{p+1}(-\tfrac{1}{3})^r\dfrac{\sin p\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}; \end{array} \right.$$

Digitized by Google

(usque ad primum terminum evanescentem)

$$= \sum_{i=0}^{i=\frac{m}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\sin(n+m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (n+m-2i)_{m-2i}$$

$$- \sum_{i=0}^{i=\frac{m-2}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+2}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\cos(n+m-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (n+m-2i-1)_{m-2i-1},$$

dum vero m impar:

$$= \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\cos(n+m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (n+m-2i)_{m-2i}$$

$$- \sum_{i=0}^{i=\frac{m-1}{2}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\sin(n+m-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (n+m-2i-1)_{m-2i-1}.$$

Ex. gr. Posito success. $m=0, 1, 2, 3$ habentur *):

$$(a) \ldots\ldots\ 1-(n-1)_1+(n-2)_2-(n-3)_3+\text{etc.} = \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}};$$

$$(b) \ldots\ldots\ 1.(n+1)_1-2n_2+3(n-1)_3-4(n-2)_4+\text{etc.}$$

$$= -\tfrac{1}{3}.\left[\frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 - 2.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right];$$

$$(c) \ldots\ldots\ 1.(n+2)_2-3(n+1)_3+6n_4-10(n-1)_5+\text{etc.}$$

$$= -\tfrac{1}{3}.\left[\frac{\sin(n+3)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}(n+2)_2 + \frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 - 2.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right];$$

$$(d) \ldots\ 1.(n+3)_3-4(n+2)_4+10(n+1)_5-20n_6+\text{etc.}$$

$$= \tfrac{1}{3}.\left[\frac{\cos(n+4)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+3)_3 - 4.\frac{\sin(n+3)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}(n+2)_2\right.$$

$$\left. - \tfrac{10}{3}.\frac{\cos(n+2)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}(n+1)_1 + \tfrac{20}{3}.\frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right].$$

4. Quo ex theoremate rectâ consequitur hocce

---

quarum ope relationum nova, quam heic exposuimus, Theorematis forma perfacili negotio prodibit.

*) Conf. loc. supra cit. T. VII. pag. 266 et 267.

Corollarium.

Denotante p numerum integrum $>m$, habetur dum m par est aut 0:

$$\text{"(II)"} \ldots\ p_m - \overset{m}{F}_1 . (p-1)_{m+1} + \overset{m}{F}_2 . (p-2)_{m+2} - \overset{m}{F}_3 . (p-3)_{m+3} + \text{etc.}$$

(usque ad primum term. evanesc.)

$$= \overset{i=\frac{m}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\sin(p-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (p-2i)_{m-2i}$$

$$- \overset{i=\frac{m-2}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+2}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\cos(p-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (p-2i-1)_{m-2i-1},$$

dum vero m impar:

$$= \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\cos(p-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} (p-2i)_{m-2i}$$

$$- \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} (-\tfrac{1}{3})^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\sin(p-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} (p-2i-1)_{m-2i-1}.$$

Nec id solum; vera est haecce aequatio, etiamsi p numerus est integer $=m$. Quod ut probetur, sufficit ut ostendatur constare sibi Theorema ipsum, etiamsi $n=0$ sit, certe nisi simul $m=0$ fuerit: id quod paucis his expediri licebit. — Prius aequationis "(I)" membrum in hoc casu ($=1$) coëfficiens est ipsius x^0 in evolutâ functione

$$[1-x(1-x)]^{-(m+1)};$$

posterius autem, ut ex ipsa demonstratione supra expositâ patet *), coëfficiens est ipsius x^0 in „producto" serierum ex evolutis

---

*) Scilicet in eo res vertitur, ut aequatio illa (VI) aut (VI′) valere probetur, etiamsi $n=0$ fuerit. Valere eam (in hoc quoque casu) pro $m=1$ et 2, ex eo patet quod posito $n=0$ aequationes illae (II) et (III) identicae evadunt. Concesso igitur valere eam usque ad m quemdam (inclusive), reliquum est ut probetur vera esse pro sequenti $m+1$. Eodem usque modo ac in art. 2 praecedenti aquatio illa (6′) vera esse probatur, etiamsi $n=0$ fuerit, extensâ quidem ad hunc quoque casum ($n=0$) definitione illâ signi S_{p+1}, i. e. posito tunc

$$S_{p+1} = (\alpha-\beta)(\alpha^{p+1} + (-1)^{p+1} \beta^{p+1}).$$

Tum nullo negotio patet, aequationes illas (A) et (A′) in hoc quoque casu valere. Caetera verbotenus ut in art. 2. sequuntur.

Digitized by Google

$$(1+\alpha x)^{-(m+1)} \text{ et } (1+\beta x)^{-(m+1)}$$

comparatarum.

Quae cum ita sint, jam constat verum esse, quod loco cit. (T. VII. p. 268.) expositum est Corollarium, cujus praeterea aequationi (II) immutatam aliquantulum magisque concinnam heic dedimus formam "(II)". — Ideoque nec gutta quidem superest dubii, quin rata sit Numerorum Figuratorum relatio ea, quam ibid. (p. 269.) exposuimus: cui praeterea, posito $p=m$ in aequat. "(II)", potiorem hanc reddere juvat formam:

1⁰) dum *m* numer. est integer par (aut 0):

$$1 = \overset{i=\frac{m}{2}}{\underset{i=0}{S}} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{m}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\sin(m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$- \overset{i=\frac{m-2}{2}}{\underset{i=0}{S}} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{m+2}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\cos(m-2i)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}};$$

"(III)"

2⁰) dum *m* impar est:

$$1 = \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i} \frac{\cos(m-2i+1)\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$- \overset{i=\frac{m-1}{2}}{\underset{i=0}{S}} \left(-\tfrac{1}{3}\right)^{\frac{m+1}{2}+i} . \overset{m}{F}_{2i+1} \frac{\sin(m-2i)\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}.$$

Nota I.

(Vid. pag. 234.)

Specie forsan haec via ea ipsa esse videatur, quâ postquam coëfficiens ipsius x^n in „evolutione" functionis $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$, formâ illâ $(1+\alpha x)^{-(m+1)}(1+\beta x)^{-(m+1)}$ indutae, exhibita fuerit ope cognitae illius legis, quam in commentatione suâ numero (1) insignivit Cel. Schlömilch, deinceps ponatur coëfficiens haecce expressioni illi (α) aqualis. — Quod si ita foret; revera res gesta foret talis, cui jure quodam epitheton illud cedat „wissenschaftlich höchst unbedeutend" (vid. Comment. Cel. Schlömilch, sub finem), quippe quâ non nisi duae, quâ formam diversae aliquatenus, expressiones ipsius $\frac{F^{(n)}(0)}{1.2....n}$ [$F(x)$ breviter denotante ipsam $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$] in medium prolatae fuissent: et quidem tali in re multo melius Analysi fuisset consultum, si — ut praeterea rem gessit Cel. Schlömilch — generalis uno ictu petita fuisset expres-

Digitized by Google

sio ipsius $F^{(n)}(x)$ i. e. Coëffic. Different. $n$ti ordinis functionis $(1-x+x^2)^{-(m+1)}$ vel potius functionis hujus universae

$$(x^2+ax+b)^{-(\mu+1)},\ [\mu \text{ reali quâlibet}].$$

Namque — [ut heic caetera omittam cognitae demum functionis $F^{(n)}(x)$ emolumenta] — uti primum forte contigit duas quâ formam diversas hujusce $F^{(n)}(x)$ expressiones inveniri; aequatis sibi invicem hisce, generalis jam conciliata erit relatio talis, cujus in speciebus innumeris non nisi unam conficiat, quam supra commemoravimus, identitas illa ambarum ipsius $F^{(n)}(0)$ expressionum.

At vero „species nonnumquam fallit": recta non haec erat via. Hanc quisquis fuerit insecutus, ulterius in tali re provehi non poterit, quam donec relationem demum talem, qualem in Commentatione suâ numero (9) insignivit Cel. Schlömilch, assequi bene contigerit. Quae quidem relatio quamvis praeterea notatu sit vere condigna, celari non potest temere aliquatenus latam esse sententiam Cel. Auctoris (pag. 364.) istam: „Für $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ergiebt sich aus der Gleichung (9) eine Relation, aus welcher sich sämmtliche von Herrn Dr. Björling im VII. Theile S. 266. mitgetheilte Formeln ableiten lassen, wenn man sich auf die Unterscheidung von geraden und ungeraden n" (?) „einlässt und einige Transformationen vornimmt." Verum quidem est, si ponatur $\mu=m$ (num. int. aut 0), abire posterius hujusce aequationis membrum in

$$n_0(m+n)_n(2\cos\varphi)^n-(n-1)_1(m+n-1)_{n-1}(2\cos\varphi)^{n-2}$$
$$+(n-2)_2(m+n-2)_{n-2}(2\cos\varphi)^{n-4}-$$
$$\text{etc. (usque ad primum term. evanesc.)}$$

$$=n_0(n+m)_m(2\cos\varphi)^n-(n-1)_1(n+m-1)_m(2\cos\varphi)^{n-2}$$
$$+(n-2)_2(n+m-2)_m(2\cos\varphi)^{n-4}-$$
$$\text{etc.}$$

$$=1.(n+m)_m(2\cos\varphi)^n-(m+1)_1(n+m-1)_{m+1}(2\cos\varphi)^{n-2}$$
$$+(m+2)_2(n+m-2)_{m+2}(2\cos\varphi)^{n-4}-$$
$$\text{etc.}$$

quae quidem reverâ, dum $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ponitur, prius ipsum aequationis nostrae "(I)" membrum conficit. Verumtamen fore ut prius aequationis hujus (9) membrum in formulam reduci liceret talem, quae, dum $\varphi=\frac{\pi}{3}$ ponitur, in membrum aequationis nostrae 2um aut 3um (ideoque in formulam ex $m+1$ terminis confectam), prout n par est aut impar, abeat, — id quonam jure contendi liceat, nescio. Etenim quis est qui ne videat ab n minime pendere hanc reductionem, utpote quam e contrario perfici non omnino liceat, nisi forte μ numerus integer aut 0 (et quidem $=m$) fuerit? quo in casu singulari reapse, pro $\varphi=\frac{\pi}{3}$, una prodibit vel altera forma, prout m

Digitized by Google

par est (0 inclusive) aut impar. Qua tamen de re id insuper est admonendum, fieri non posse — [certe quod nos quidem sciamus] — ut prius illud membrum aequat. (9) in $m+1$ terminos reducendi negotium eo modo, quem vulgo „einige Transformationen" *) vocant, perfici liceat; sed ejusdem omnino generis impedimentis obnoxia est (uti nobis videtur) ista reductio, ac si posterius ipsum aequationis membrum in formam, cujus heic mentio est, reducendi consilium iniveras.

Quae cum ita sint, his fere (ut nobis videtur) loco citato potissimum uti verbis decuisset Cel. Auctorem: Dum $\mu = m$ (num. int. aut 0) est, valorem utriusque membrorum aequationis (9) formulâ quâdam ex $m+1$ terminis confectâ exprimi licebit tali, quae casu illo $\varphi = \frac{\pi}{3}$ singulari in 2um aut 3um membrum aequationis (I) in pag. 267. T. VI. expositae abeat. Quae si quando inventa fuerit $m+1$ terminorum formula vehementer optanda, novum eâ demum constitutum erit Theorema nostro tanto latius patens, quanto φ ipsa universa singularem illam $\frac{\pi}{3}$ generalitate superet. Ipsam autem hujusce formulae indagationem — fiatne ista ratione illi analogâ, quam nos quidem in casu $\frac{\pi}{3}$ singulari secuti fuimus, nec ne — velit propense Celeb. Prof. Schlömilch occasione datâ suscipere formulamque demum inventam promulgare, est quod vehementer optamus atque speramus. Nostra interea profecto haud parvi interfuit hoc ipsum Theorema pro $\varphi = \frac{\pi}{3}$ eo, quem supra exposuimus, modo probare: praesertim quum nobis videatur expositio ista haud modici futura esse emolumenti conaturo, quicumque erit, generalem quam diximus formulam edere inventam.

Nota II.

In demonstrationem aequationis (A).

[p numerum integr. denotat.].

Ex definitione habetur

$$(1)\ldots\; S_{p+1} = \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (i+p)_p (\alpha^{n+1-i} - \beta^{n+1-i})(\alpha^{i+p+1} + (-1)^{p+1}.\beta^{i+p+1}),$$

seu, quoniam $\alpha\beta = 1$ est,

$$= (\alpha^{n+p+2} + (-1)^{p+2}\beta^{n+p+2}) \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (i+p)_p$$
$$- [\beta^{n-p} \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (i+p)_p \alpha^{2i} + (-1)^p \alpha^{n-p} \underset{i=0}{\overset{i=n}{S}} (i+p)_p \beta^{2i}];$$

*) Sic verba habent Cel. Schlömilch pag. 364 l. cit.

Digitized by Google

i. e.

$$(2) \ldots\ldots = (n+p+1)_{p+1}(\alpha^{n+p+2}+(-1)^{p+2}\beta^{n+p+2})$$
$$-[\beta^{n-p}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\alpha^{2i}+(-1)^p\alpha^{n-p}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\beta^{2i}],$$

quoniam vi naturae Numerorum Figuratorum habetur formula

$$(3)\;\ldots\ldots\;\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p=(n+p+1)_{p+1}\;\;{}^{*)}.$$

Praeterea, quod

$$\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p\alpha^{2i}=(n+p)_p\alpha^{2n}+\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p\alpha^{2i}$$
$$=(n+p)_p\alpha^{2n}+\frac{(n+p)_p\alpha^{2n}-1-\alpha^2\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i}}{\alpha^2-1}\;\;{}^{*)}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2}-(1+\alpha^2\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i})\}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2}-(1+\alpha^2\overset{i=n-1}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_{p-1}\alpha^{2i})\}$$
$$=\frac{1}{\alpha^2-1}\{(n+p)_p\alpha^{2n+2}-\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\alpha^{2i}\},$$

---

*) Vid. ex gr. Cauchy, Anal. Alg. Note VI. Théor. 1er. — Praeterea rem paucis, si placet, sic licet expediri. Signo $\overset{i}{\underset{i=0}{\Sigma}}\varphi i$ denotante functionem ipsius i eam, cujus differentia [dum $\Delta i=1$] sit φi, deminutam valore suo pro $i=0$, habetur

$$\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p)_p=(n+p)_p+\overset{i=n}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p,$$

vi cujus, ratione insuper habitâ formularum

$$\overset{i}{\underset{i=0}{\Sigma}}(i+p)_p=(i+p)_{p+1},\;(n+p)_p+(n+p)_{p+1}=(n+p+1)_{p+1},$$

rectâ provenit formula (3).

**) Scilicet ex eo, quod $\alpha^{2i}=e^{2i.\log\alpha}$ est, consequitur, posito $r=2\log\alpha$ atque i loco ipsius x in formula illa cognita

$$\Sigma(e^{rx}\varphi x)=\frac{e^{rx}\varphi x}{e^r-1}-\frac{e^r}{e^r-1}.\Sigma(e^{rx}.\Delta\varphi x),\text{ scil. }\Delta x=1,$$

legitimam esse quam supra descripsimus aequationem. [Si cui forte offenderit usurpasse nos hoc loco signum illud „$\log\alpha$“, quamvis α heic quantitas sit parte reali negativâ instructa; solum id admonuisse sufficiet, nos heic quidem signo „$\log\alpha$“ e logarithmorum quantitatis α quemlibet cumque voluisse intellectum. Videlicet Exponente $2i$ numerum integrum conficiente, ut facili patet negotio, nil adest periculi quin juste statuatur aequatio $\alpha^{2i}=e^{2i\cdot\log\alpha}$, quivis fuerit „$\log\alpha$“ logarithmorum ipsius α].

Digitized by Google

propterea quantitas intra uncos [ ] in (2), vi relationum illarum

$$\frac{\alpha}{\alpha^2-1}=\frac{1}{\alpha-\beta}=-\frac{\beta}{\beta^2-1},$$

reduci potest in

$$\frac{(n+p)_p(\alpha^{n+p+1}+(-1)^{p+1}\beta^{n+p+1})-[\beta^{n-p+1}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\alpha^{2i}+(-1)^{p-1}.\alpha^{n-p+1}\overset{i=n}{\underset{i=0}{S}}(i+p-1)_{p-1}\beta^{2i}]}{\alpha-\beta};$$

cujus quum numerator ipsum conficit membrum posterius aequationis (2), mutato ibi p in $p-1$, jam patet aequationem hancce (2) in ipsam (A) abire.

Q. E. D.

XXIII.

Das geradlinige Dreieck in Beziehung auf die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte seiner Ebene auf seine Seiten fällen kann, betrachtet.

Von dem
Herrn Doctor E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

I.

Von einem Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks seien Perpendikel auf die Seiten desselben herabgelassen, man verlangt, dass die Summe der Quadrate dieser Perpendikel ein Minimum werde.

Die Auflösung der Aufgabe

$$x^2+y^2+z^2=M$$

unter der Bedingung

$$ax+by+cz=2\Delta$$

bietet keine Schwierigkeit dar, und führt zu den Resultaten

$$[1]\quad \left\{\begin{aligned} x&=\frac{2\Delta a}{a^2+b^2+c^2},\\ y&=\frac{2\Delta b}{a^2+b^2+c^2},\\ z&=\frac{2\Delta c}{a^2+b^2+c^2};\end{aligned}\right.$$

welche man auch ausdrücken kann:

Digitized by Google

$$[2] \quad \begin{cases} x=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}, \\ y=\dfrac{b\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}, \\ z=\dfrac{c\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}. \end{cases}$$

Da hiernach die Perpendikel von dem Punkte innerhalb des Dreiecks, welchen wir für den Augenblick den Minimumpunkt nennen wollen, den Dreiecksseiten, auf welchen sie stehen, proportional sind, so ergibt sich hieraus folgende Construction des Minimumpunktes. Man verzeichne über den drei Seiten des Dreiecks ABC (Taf. VI. Fig. 1.) Quadrate, verlängere die den Dreiecksseiten parallelen Seiten der letzteren bis zur Erzeugung des dem ursprünglichen ähnlichen Dreiecks $A'B'C'$ und ziehe dann $A'A$, $B'B$, $C'C$, so werden sich diese Linien in M als dem Minimumpunkte sowohl für ABC als für $A'B'C'$ schneiden. Es ist übrigens nicht nöthig, dass man die Quadrate wie in Taf. VI. Fig. 1. nach Aussen zeichnet; man kann dieselben auch wie in Taf. VI. Fig. 2. nach Innen construiren. Zu einer andern Construction des Minimumpunktes gelangt man, wenn man in Taf. VI. Fig. 3., wo S den Schwerpunkt des Dreiecks ABC und K den Mittelpunkt des in dasselbe beschriebenen Kreises vorstellt, berücksichtigt, dass z. B. CS den W. ACB so theilt, dass

$$\sin ACS:\sin BCS=a:b.$$

Soll nun CM bewirken, dass

$$\sin BCM:\sin ACM=a:b,$$

so muss W. $ACM=$ W. BCS, und also W. $MCK=$ W. SCK, auf dieselbe Weise auch W. $MBK=$ W. SBK, W. $MAK=$ W. SAK sein.

Als kleinste Summe der Perpendikelquadrate ergibt sich

$$[3] \quad M=\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$[4] \quad M=\frac{a^2\sin\beta^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}=\frac{b^2\sin\alpha^2\sin\gamma^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2}$$
$$=\frac{c^2\sin\alpha^2\sin\beta^2}{\sin\alpha^2+\sin\beta^2+\sin\gamma^2};$$

und, weil allgemein $a^2+b^2+c^2=4\Delta(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma)$:

$$[5] \quad M=\frac{\Delta}{\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma}.$$

Die Perpendikel vom Minimumpunkte aus theilen jede Dreiecksseite in zwei Abschnitte. Für diese Abschnitte (Taf. VI. Fig. 4.) erhält man die Werthe

Digitized by Google

$$[6]\quad \begin{cases} CX = \dfrac{a(b^2+ab\cos\gamma)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{a(\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ BX = \dfrac{a(c^2+ac\cos\beta)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{a(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ CY = \dfrac{b(a^2+ab\cos\gamma)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{b(\frac{3}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ AY = \dfrac{b(c^2+bc\cos\alpha)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{b(-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2+\frac{3}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ BZ = \dfrac{c(a^2+ac\cos\beta)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{c(\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}, \\ AZ = \dfrac{c(b^2+bc\cos\alpha)}{a^2+b^2+c^2} = \dfrac{c(-\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2)}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

Die Abstände des Minimumpunktes von den Eckpunkten des Dreiecks (Taf. VI. Fig. 3.) lassen sich so ausdrücken:

$$[7]\quad \begin{cases} MA = \dfrac{bc\sqrt{(-a^2+2b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ MB = \dfrac{ac\sqrt{(2a^2-b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ MC = \dfrac{ab\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

und bezeichnet man die, die Seiten a, b, c halbirenden Transversalen bezüglich mit t_a, t_b, t_c, so ist:

$$[8]\quad \begin{cases} MA = \dfrac{2bct_a}{a^2+b^2+c^2}, \\ MB = \dfrac{2act_b}{a^2+b^2+c^2}, \\ MC = \dfrac{2abt_c}{a^2+b^2+c^2}. \end{cases}$$

Für die Verbindungslinien YZ, XZ, XY (Taf. VI. Fig. 4.) findet man:

$$[9]\quad \begin{cases} YZ = \dfrac{2\Delta\sqrt{(-a^2+2b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ XZ = \dfrac{2\Delta\sqrt{(2a^2-b^2+2c^2)}}{a^2+b^2+c^2}, \\ XY = \dfrac{2\Delta\sqrt{(2a^2+2b^2-c^2)}}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$[10]\qquad \begin{cases} YZ = \dfrac{4\varDelta t_a}{a^2+b^2+c^2}, \\ XZ = \dfrac{4\varDelta t_b}{a^2+b^2+c^2}, \\ XY = \dfrac{4\varDelta t_c}{a^2+b^2+c^2}; \end{cases}$$

$$[11]\qquad YZ = \frac{Mt_a}{\varDelta},\ XZ = \frac{Mt_b}{\varDelta},\ XY = \frac{Mt_c}{\varDelta}.$$

Sucht man nun ferner die Werthe für die Transversalen, welche die Seiten des Dreiecks XYZ halbiren, und multiplicirt dieselben mit $\frac{2}{3}$, so erhält man die oben [1] angegebenen Ausdrücke für MX, MY und MZ. Es folgt hieraus, dass der Minimumpunkt des Dreiecks ABC zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks XYZ ist. Bekanntlich hat auch der Schwerpunkt eines Dreiecks die Eigenschaft, dass die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Winkelpunkten des Dreiecks ein Kleinstes ist.

II.

Denkt man sich alle Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks, für welche die Quadrate der Perpendikel auf die drei Seiten eine gleichgrosse Summe geben, durch Curven verbunden, so ist die Natur und Lage dieser Curven näher zu untersuchen.

Nehmen wir vorläufig B (Taf. VI. Fig. 5.) zum Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, und setzen $BQ = x$, $QP = y$, so muss sein

$$PQ^2 + PR^2 + PS^2 = M + G,$$
$$PQ^2 + (QT - QV)^2 + (QU - QW)^2 = M + G,$$
$$y^2 + ((c-x)\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = M + G.$$

Bringen wir diese Gleichung auf die Form

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = G,$$

so ist

$$[12]\qquad \begin{cases} A = 1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2, \\ B = 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin\beta\cos\beta, \\ C = \sin\alpha^2 + \sin\beta^2, \\ D = -2c\sin\alpha\cos\alpha, \\ E = -c\sin\alpha^2, \\ F = c^2\sin\alpha^2 - M. \end{cases}$$

Nebenbei wollen wir bemerken, dass, wenn wir in dieser Gleichung G zum Minimum machen, sich die Werthe von x und y übereinstimmend mit [1] und [6] ergeben, wodurch ein etwaiger

Digitized by Google

Zweifel daran, dass die Formeln [1] auf einen und denselben Punkt zu beziehen seien, niedergeschlagen wird.

Gehen wir nun zu einem mit dem vorigen parallelen Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Minimumpunkt ist, über, so verschwinden die Glieder mit D, E und F, und die Gleichung unserer Curve ist

[13] $$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = G.$$

Das mittlere Glied auf der linken Seite fällt von selbst weg, wenn entweder $\alpha = \beta$ oder $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Wir wollen hier dem rechtwinkeligen und dem gleichschenkeligen Dreieck besondere Betrachtungen widmen.

Für ein bei γ rechtwinkeliges Dreieck geht die Gleichung [13] in

[14] $$2y^2 + x^2 = G$$

über. Die in Frage stehenden Curven sind ähnliche Ellipsen um den Minimumpunkt, für welche das Verhältniss der Axen $\sqrt{2}:1$ stattfindet. Die specielle Gestalt des rechtwinkeligen Dreiecks äussert also auf die Gestalt dieser Ellipsen durchaus keinen Einfluss. Die grosse Axe ist mit der Hypotenuse parallel. Da ferner, wenn man in [6] $c^2 = a^2 + b^2$ setzt, $BZ = \frac{a^2}{c}$ und $AZ = \frac{b^2}{c}$ wird, so liegt der Minimumpunkt in der auf der Hypotenuse stehenden Höhe. Setzt man diese $= h$, also $2\Delta = hc$, so ergibt sich aus [1] $z = \frac{1}{2}h$, und eine Ellipse, welche, wie in Taf. VI. Fig. 6. durch den Scheitel des rechten Winkels geht, berührt zugleich die Hypotenuse. Aus [3] ergibt sich für unsern Fall $M = \frac{1}{2}h^2$ und aus [11]

$$YZ = \frac{ht_a}{c},\ XZ = \frac{ht_b}{c},\ XY = \frac{ht_c}{c}.$$

Ist unser Dreieck in Beziehung auf c als Grundlinie gleichschenkelig, so erhalten wir aus [13]

$$(1 + 2\cos\alpha^2)y^2 + 2\sin\alpha^2 x^2 = G,$$

oder, wenn wir alles auf den Winkel γ beziehen,

[15] $$(2 - \cos\gamma)y^2 + (1 + \cos\gamma)x^2 = G.$$

Nun ist aber $2 - \cos\gamma \gtreqless 1 + \cos\gamma$, jenachdem $\gamma \gtreqless \frac{\pi}{3}$ oder $c \gtreqless a$. Für das gleichseitige Dreieck liefert mithin die Gleichung [15] Kreise, deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt mit den übrigen Mittelpunkten des gleichseitigen Dreiecks übereinstimmt, und M wird gemäss der Formeln [4] $= \frac{a^2}{4}$. Bei den übrigen gleichschenkeligen Dreiecken erhalten wir wieder Ellipsen, deren grosse Axe mit der Grundlinie des Dreiecks parallel ist, wenn letztere, wie in Taf. VI. Fig. 7. grösser, und auf derselben senkrecht steht, wenn sie, wie in Taf. VI. Fig. 8. kleiner ist, als eine der übrigen Dreiecksseiten.

Digitized by Google

Ist nun aber das Dreieck weder rechtwinkelig noch gleichschenkelig, so muss die durch die Gleichung [13] dargestellte Curve auf ein um den Winkel φ gedrehtes Coordinatensystem bezogen werden, so dass

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{B}{C-A}.$$

Alsdann wird die Gleichung der Curve

$$[16] \qquad Py^2 + Qx^2 = G,$$

und die Werthe von P und Q sind gleichzeitig in dem Ausdrucke

$$\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}$$

enthalten. Man kann

$$[17] \qquad \begin{cases} P = \tfrac{3}{2} + \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}, \\ Q = \tfrac{3}{2} - \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))} \end{cases}$$

setzen, und erhält so den Vortheil, x immer auf die grosse und y immer auf die kleine Axe der durch [16] dargestellten Ellipse beziehen zu dürfen, muss jedoch auf Anwendung der Relation $2\varphi < \pi$ verzichten, vielmehr die Lage der grossen Axe in besonderen Fällen durch Zurückgehen auf die Gleichung [13] zu bestimmen suchen. Es zeigt sich dann, dass die Lage der grossen Axe immer mit der Lage der grössten Dreiecksseite möglichst conform ist. Beispiele ungleichseitiger Dreiecke gewähren Taf. VI. Fig. 9. und Taf. VI. Fig. 10. Davon übrigens, dass die Gleichung [16] unter allen Umständen einer Ellipse, die nur in dem einzigen oben bereits erwähnten Falle in einen Kreis übergeht, angehöre, überzeugt man sich bald, wenn man den Formeln [17] einige Aufmerksamkeit schenkt. Der Ausdruck $\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2$ kann niemals den Werth $\tfrac{9}{4}$, welchen er für $\alpha = \beta = \gamma$ erreicht, überschreiten; daher können P und Q nicht imaginär werden. Der genannte Ausdruck ist ferner stets positiv, und desshalb hat auch Q diese Eigenschaft, die sich bei P ohnehin von selbst versteht.

In Beziehung auf das mit jedem Dreieck nach dem Bisherigen in Verbindung stehende System von Ellipsen könnte man noch die Fragen aufwerfen: wie gross muss G sein, damit die Ellipse eine Seite, z. B. c, berühre? oder: wie gross mus G sein, damit die Ellipse durch einen Winkelpunkt des Dreiecks, z. B. C, gehe? Die Antworten auf diese Fragen zeichnen sich durch Einfachheit aus, und mögen desshalb hier Platz finden. Bei der ersten ist

$$[18] \qquad G = \frac{4\Delta^2}{a^2 + b^2},$$

bei der zweiten

$$[19] \qquad G = \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

Nach dem Obigen war ferner

Digitized by Google

$$\tang 2\varphi = \frac{B}{C-A}$$

oder

[20] $$\tang 2\varphi = \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 2\beta}.$$

Setzt man nun auch

[21] $$\begin{cases} \tang 2\chi = \dfrac{\sin 2\gamma - \sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma}, \\ \tang 2\psi = \dfrac{\sin 2\alpha - \sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma + \cos 2\alpha}; \end{cases}$$

so folgt daraus

[22] $$\begin{cases} \cos 2\varphi = \dfrac{\frac{3}{2} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2)}{\pm\sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}}, \\ \cos 2\chi = \dfrac{\frac{3}{2} - (\sin\beta^2 + \sin\gamma^2)}{\pm\sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}}, \\ \cos 2\psi = \dfrac{\frac{3}{2} - (\sin\gamma^2 + \sin\alpha^2)}{\pm\sqrt{(\frac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}}. \end{cases}$$

Sind die Winkel φ, χ und ψ in Beziehung auf die drei Drecksseiten in einerlei Sinn genommen, so müssen in diesen Formeln, welche durch blosses Fortrücken der Bezeichnung in einander übergehen, entweder nur die obe n oder nur die untern Zeichen gelten, und man hat folglich

[23] $$\tfrac{1}{2}\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos\chi + \tfrac{1}{2}\cos\psi = \pm\sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))},$$

[24] $$\cos\varphi^2 + \cos\chi^2 + \cos\psi^2 = \tfrac{3}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))},$$

[25] $$\sin\varphi^2 + \sin\chi^2 + \sin\psi^2 = \tfrac{3}{2} \mp \sqrt{(\tfrac{9}{4} - (\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 + \sin\gamma^2))}.$$

Daher ist endlich auch nach [17]

[26] $$\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \Bigg\} = \begin{cases} \cos\varphi^2 + \cos\chi^2 + \cos\psi^2, \\ \sin\varphi^2 + \sin\chi^2 + \sin\psi^2. \end{cases}$$

III.

Bisher wurden die Quadrate der Perpendikel, welche man von einem Punkte in der Ebene eines geradlinigen Dreiecks auf die Seiten desselben fällen kann, immer zu einer Summe vereinigt. Künftighin soll der Unterschied zwischen der Summe von zwei solchen Quadraten und dem dritten die Stelle jener vertreten.

Stellen wir daher jetzt zuvörderst wieder die Aufgabe, $x^2+y^2-z^2$ unter der Bedingung $ax+by+cz=2\Delta$ zum Minimum zu machen, so erhalten wir die Auflösung:

Digitized by Google

$$[27] \quad \begin{cases} x = \dfrac{2\Delta a}{a^2 + b^2 - c^2}, \\ y = \dfrac{2\Delta b}{a^2 + b^2 - c^2}, \\ z = \dfrac{-2\Delta c}{a^2 + b^2 - c^2}; \end{cases}$$

oder

$$[28] \quad \begin{cases} x = \dfrac{a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}, \\ y = \dfrac{a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}, \\ z = \dfrac{-a \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}; \end{cases}$$

oder auch

$$[29] \quad \begin{cases} x = \tfrac{1}{2} a \tang\gamma, \\ y = \tfrac{1}{2} b \tang\gamma, \\ z = -\tfrac{1}{2} c \tang\gamma. \end{cases}$$

Ganz dieselben Resultate können wir erhalten, wenn wir nach Anleitung von Taf. VI. Fig. 5., wie oben $x^2 + y^2 + z^2$, so jetzt $x^2 + y^2 - z^2$ ausdrücken, den erhaltenen Werth

$$-y^2 + ((c-x)\sin\alpha - y\cos\alpha)^2 + (x\sin\beta - y\cos\beta)^2 = H,$$

in welchem nunmehr x und y Coordinaten sind, zu einem Minimum machen, und die Abstände des Punktes, für welchen das Minimum stattfindet, von den drei Dreiecksseiten berechnen. Die letzte Gleichung gilt dann wieder für die Curven, welche die Punkte von einerlei H verbinden. Verlegen wir auch hier, zu einem mit dem vorigen parallelen System von Coordinaten übergehend, den Anfangspunkt der letzteren nach dem durch die Formeln [27] bezeichneten Punkte, so erhalten wir wieder die Gleichung [13], nur mit dem Unterschiede, dass jetzt

$$[30] \quad A = -1 + \cos\alpha^2 + \cos\beta^2.$$

Die dermalige Gleichung [13] gehört jedoch, wie die nachherige Discussion derselben lehren wird, nur dann einer Ellipse (oder einem Kreise) an, wenn das Dreieck ABC bei C stumpfwinkelig ist, und in der That zeigt auch die Betrachtung des zweiten Differenzials, dass die Function $x^2 + y^2 - z^2$ mit der Bedingungsgleichung $ax + by + cz = 2\Delta$ nur dann ein Minimum hat, wenn $c^2 > a^2 + b^2$. Unsere dermalige Aufgabe verdient wohl als ein besonders instructives Beispiel für die Lehrbücher der Differenzialrechnung empfohlen zu werden. Im Vorbeigehen sei bemerkt, dass das sonst so vortreffliche neue Lehrbuch von Schlömilch (Greifswald. 1847.) sich auf Seite 168. einer Ungenauigkeit schuldig gemacht hat. Aus dem dort Gesagten würde folgen, dass

Digitized by Google

auch bei unserer Aufgabe immer ein Minimum vorhanden sei. Findet nun zwar ein wirkliches Minimum nur dann statt, wenn γ stumpf ist, so lässt sich doch wohl erwarten, dass auch, wenn γ spitz ist, der Punkt, auf welchen die Formeln [27], [28] und [29] hinweisen, eine gewisse geometrische Merkwürdigkeit haben werde. Ist γ ein rechter Winkel, so kann von diesem Punkte, dem wir für alle Fälle wenigstens den Titel Minimumpunkt belassen wollen, nicht mehr die Rede sein, weil er alsdann, wie am Deutlichsten aus [29] erhellt, ins Unendliche hinausgeschoben wird.

Der Werth von H im Minimumpunkte ist

$$[31] \qquad M = \frac{4\varDelta^2}{a^2 + b^2 - c^2},$$

$$[32] \qquad M = \frac{a^2 \sin\beta^2 \sin\gamma^2}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2} = \frac{b^2 \sin\alpha^2 \sin\gamma^2}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2}$$
$$= \frac{c^2 \sin\alpha^2 \sin\beta^2}{\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2},$$

$$[33] \qquad M = \varDelta \operatorname{tang} \gamma.$$

Das G der Gleichung [13] ist $H - M$, so dass, was auch oben der Fall war, G in dem Minimumpunkte immer $= 0$ ist.

Der dermalige Minimumpunkt kann durch Verzeichnen von Quadraten auf den Dreiecksseiten u. s. w. auf ähnliche Weise wie oben gefunden werden. Es findet hier nur der Unterschied statt, dass das Quadrat der Seite c nach Innen beschrieben werden muss, wenn die Quadrate der beiden andern Seiten nach Aussen beschrieben sind, und umgekehrt. In Taf. VI. Fig. 11. ist beides gleichzeitig dargestellt. Der gefundene Punkt M ist auch hier nicht bloss für das Dreieck ABC, sondern auch für $A'B'C'$ und für $A''B''C''$ der Minimumpunkt.

Dreht man auch in unserem Fall die Coordinatenaxen um den Winkel φ, damit das Glied Bxy in [13] verschwinde, so erhält man wieder die Gleichung [16], jedoch mit den Werthen

$$[34] \qquad \left\{ \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right\} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \sin\alpha^2 + \sin\beta^2 - \sin\gamma^2)}.$$

Ist der Winkel γ spitz, so ist

$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 > \sin\gamma^2,$$

die Wurzelgrösse daher $> \frac{1}{2}$, und folglich einer der Werthe P und Q negativ. Die Curven, welche die Gleichung [16] und somit auch [13] darstellt, sind alsdann Hyperbeln, welche nur, wenn $G = 0$ ist, in zwei sich in dem Minimumpunkte durchschneidende gerade Linien übergehen. Taf. VI. Fig. 12. versinnlicht dieses; die spitzwinkeligen Hyperbeln gehören dort zu negativen, die stumpfwinkeligen zu positiven Werthen von G.

Ist aber γ stumpf, so ist

$$\sin\alpha^2 + \sin\beta^2 < \sin\gamma^2.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen erreicht alsdann seinen kleinsten Werth, welcher $=0$ ist, wenn $\alpha=\beta=\frac{1}{6}\pi$, $\gamma=\frac{2}{3}\pi$. Die Werthe von P und Q bleiben immer reell, und in dem eben angeführten Falle werden die Curven Kreise, in allen übrigen Fällen sind sie Ellipsen. Ist das Dreieck noch obendrein gleichschenkelig, so läuft die grosse Axe der Ellipse mit c parallel, wenn $\gamma>\frac{2}{3}\pi$ (Taf. VI. Fig. 13.), steht dagegen auf c senkrecht (Taf. VI. Fig. 14.), wenn $\gamma<\frac{2}{3}\pi$.

XXIV.

Ueber einen Satz des Herrn Professor J. Steiner.

Von dem

Herrn Observator Thomas Clausen

zu Dorpat.

Im zwei und dreissigsten Bande von Crelle's Journal für Mathematik stellt Steiner S. 300. folgenden Satz auf: „Durch jeden Punkt D einer Ellipse gehen drei Krümmungskreise der letztern, welche sie in irgend drei andern Punkten A, B, C osculiren; und jedesmal liegen die vier Punkte A, B, C, D in einem Kreise."

Um diesen schönen Satz zu beweisen, will ich der grössern Allgemeinheit wegen untersuchen, wie viele Krümmungskreise eines gegebenen Kegelschnitts durch einen gegebenen Punkt desselben gehen.

Ich nehme an, die Figur F, die aus dem gegebenen Kegelschnitte und den durch den Punkt D gehenden Krümmungskreisen besteht, sei die stereographische Projection einer Figur F' auf einer Kugelfläche; und D die Projection des Pols derselben. Es ist klar, dass die Krümmungskreise Projectionen von Kreisen auf der Kugel sind, die alle durch den Pol gehen, und zugleich die sphärischen Krümmungskreise der dem Kegelschnitte entsprechenden Figur sind. Projicirt man nun wieder diese Figur F' stereographisch, indem man zum Pol den Augenpunkt in der ersten Projection nimmt, und umgekehrt; so werden alle durch den vorigen Pol gehenden Kreise in gerade Linien projicirt, die ebenfalls die dem Kegelschnitte entsprechende Figur osculiren. Die dem Kegelschnitte entsprechende Figur muss also eben so viele Wendungspunkte haben, als der Kegelschnitt Krümmungskreise hat, die durch den Punkt D gehen; und umgekehrt.

Digitized by Google

Die unmittelbare Ableitung der Gleichung für die dem Kegelschnitte entsprechende letztgenannte Figur aus der Gleichung für den Kegelschnitt geschieht durch Substitution der Gleichungen:

$$x = \frac{\xi}{\varrho^2},\quad y = \frac{v}{\varrho^2},\quad \varrho^2 = \xi^2 + v^2$$

in die Gleichung für den Kegelschnitt. x und y bedeuten die rechtwinkligen Coordinaten des Kegelschnitts; ξ und v die der abgeleiteten Figur.

In der durch diese Substitution abgeleiteten Figur werden die geraden Linien in Kreise verwandelt; die Kreise in Kreise oder gerade Linien; überdies bleiben die Winkel der Tangenten an den respectiven Durchschnitten der Curven in beiden Figuren dieselben, oder die respectiven kleinsten Theile beider Figuren sind sich ähnlich, welches bekanntlich allgemeine Eigenschaften der stereographischen Projection sind. Uebrigens bemerke ich, dass die eben erwähnte Uebertragung von Figuren schon von Plücker analytisch angegeben, aber nicht so sehr in Anwendung gekommen ist, als sie zu verdienen scheint.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist, wenn man einen Punkt derselben als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, und die Tangente an demselben Punkte als Axe der x:

$$y = axx + 2bxy + cyy. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Die Gleichung der aus dieser abgeleiteten Figur ist:

$$v(\xi\xi + vv) = a\xi\xi + 2b\xi v + cvv. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Diese Gleichung entspricht einer Curve des dritten Grades. Man soll nun die Wendungspunkte derselben bestimmen. Um diese bequemer bestimmen zu können, nehme ich eine perspectivische Projection derselben, die bekanntlich in den entsprechenden Punkten ebenfalls Wendungspunkte hat; und zwar nur in diesen, folglich genau dieselbe Anzahl derselben. Eine solche Projection erhält man durch die Substitution: $\xi = \frac{\xi'}{v'}$, $v = \frac{1}{v'}$; wodurch man die Gleichung derselben erhält:

$$v' = \frac{1 + \xi'\xi'}{a\xi'\xi' + 2b\xi' + c}. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

In den Wendungspunkten der Curve ist $\frac{\partial^2 v'}{\partial \xi'^2} = 0$, folglich:

$$0 = \xi'^3 + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{c-a}{b}\,\xi'^2 - 3\xi' + \frac{ac - cc - 4b^2}{2ab} = u. \quad \ldots \quad (4)$$

Als besondere Fälle dieser Gleichung sind zu bemerken: wenn $b = 0$, oder wenn der Punkt D in einer Hauptaxe liegt. In diesem Falle wird die Gleichung (4)

Digitized by Google

$$3(c-a)\xi'^2=(c-a)\frac{c}{a}.$$

Schliesst man nun den Fall $a=c$ oder den Kreis aus, so wird $\xi'^2=\frac{c}{3a}$. In der Ellipse, wo a und c gleiche Zeichen haben, finden zwei Werthe von ξ' Statt; in der Hyperbel kein Werth; in der Parabel, wo $c=0$, wird $\xi'=0$.

Schliessen wir nun den Fall $b=0$ aus: so hat die Gleichung (4) bekanntlich entweder eine oder drei reelle Wurzeln. Die Gleichung hat ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\xi'^2+\frac{c-a}{b}\xi'-1=0, \text{ oder } \xi'=\frac{a-c\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b}.$$

Die diesen beiden Werthen von ξ' entsprechenden Werthe der Gleichung (4) sind:

$$u=-\frac{(a-c)^2+4b^2}{2b^2}\left\{\frac{a-c+\frac{2b^2}{a}\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2b}\right\} \quad \ldots..(5)$$

Soll die cubische Gleichung (4) reelle Wurzeln haben, so müssen 1) die beiden Werthe von (5) entgegengesetzte Zeichen haben, oder der eine positiv, der andere negativ sein. Dieses findet nur Statt, wenn $a^2((a-c)^2+4b^2)>(a(a-c)+2b^2)^2$ oder $ac>b^2$, oder wenn der Kegelschnitt eine Ellipse ist. Ueberdies muss 2) der Werth von u für den kleinsten der Werthe von ξ', bei dem u ein Maximum oder Minimum, positiv sein. Dieses findet wirklich Statt, da man für ein negatives b das obere Zeichen vor der Quadratwurzel nehmen muss, wodurch u einen positiven Werth bekömmt; eben so für ein positives b, wo man das untere Zeichen nehmen muss.

Ist $ac=bb$, oder der Kegelschnitt eine Parabel, so sind zwei Wurzeln sich gleich, da u und $\frac{\partial u}{\partial \xi'}$ gleichzeitig $=0$.

In der Hyperbel ist $ac<bb$; folglich in diesem Falle nur eine Wurzel der Gleichung (4).

Da der Krümmungskreis, der im Punkte D selbst osculirt, nicht in der Formel enthalten, oder nicht mitgerechnet worden ist; da für diesen Punkt $x=0$, $y=0$; $\xi=\infty$, $v=a$; $\xi'=\infty$; so giebt es ausser diesem Kreise, wenn der Punkt D nicht in einer Hauptaxe liegt: in der Ellipse drei, in der Parabel zwei und in der Hyperbel nur einen Krümmungskreis, der durch den Punkt D geht.

Durch die Durchschnitte der Hauptaxen mit dem Kegelschnitte gehen in der Ellipse zwei; in der Parabel einer, und zwar unendlich grosser; in der Hyperbel keiner der Krümmungskreise: den im Punkte D selbst osculirenden in allen drei Fällen ausgenommen.

Den zweiten Theil des Satzes betreffend; so liegen die drei Wendungspunkte der Curve (2), wie an einem andern Orte erwie-

Digitized by Google

sen ist, wenn sie vorhanden sind, in einer geraden Linie. Es sei die Gleichung derselben

$$A\xi + Rv + C = 0.$$

Die dieser Geraden entsprechende Curve in der Figur des Kegelschnittes wird gefunden durch die Substitution $\xi = \frac{x}{r^2}$, $v = \frac{y}{r^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$. Dies giebt

$$Ax + By + C(x^2 + y^2) = 0,$$

welches die Gleichung eines durch den Punkt D gehenden Kreises ist.

W. z. b. w.

XXV.

Ueber eine Beziehung zwischen den Flächeninhalten zweier Dreiecke, von denen das eine dem andern und zugleich dem, diesem zugehörigen äusseren Kreise umschrieben ist. — Verallgemeinerung dieser Beziehung.

Von dem
Herrn Doctor A. R. Luchterhandt
zu Berlin.

Ist

$$x^2 + y^2 = r^2$$

die Gleichung eines Kreises und sind x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten dreier auf demselben gelegener Punkte, so hat man bekanntlich für die letzteren entsprechenden Tangenten die Gleichungen

$$xx_1 + yy_1 = r^2, \qquad (1)$$

$$xx_2 + yy_2 = r^2, \qquad (2)$$

$$xx_3 + yy_3 = r^2. \qquad (3)$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes der Linien (1) und (2), (1) und (3), (2) und (3) mit ξ_3, η_3; ξ_2, η_2; ξ_1, η_1: so erhält man

$$\xi_3 = \frac{r^2(y_1 - y_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}, \quad \eta_3 = \frac{r^2(x_2 - x_1)}{x_2y_1 - x_1y_2};$$
$$\xi_2 = \frac{r^2(y_1 - y_3)}{x_3y_1 - x_1y_3}, \quad \eta_2 = \frac{r^2(x_3 - x_1)}{x_3y_1 - x_1y_3};$$
$$\xi_1 = \frac{r^2(y_2 - y_3)}{x_3y_2 - x_2y_3}, \quad \eta_1 = \frac{r^2(x_3 - x_2)}{x_3y_2 - x_2y_3}.$$

Nun ist, wenn wir den Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks mit Δ, so wie den des umgeschriebenen mit D bezeichnen, abgesehen von dem Vorzeichen:

$$2\Delta = x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1,$$
$$2D = \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 + \xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3 + \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1$$
$$= r^4\{x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1\}\left\{\frac{1}{(x_3y_2 - x_2y_3)(x_1y_3 - x_3y_1)}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_1 - x_1y_2)} + \frac{1}{(x_3y_2 - x_2y_3)(x_2y_1 - x_1y_2)}\right\}$$
$$= \frac{r^4\{x_2y_1 - x_1y_2 + x_3y_2 - x_2y_3 + x_1y_3 - x_3y_1\}^2}{(x_3y_2 - x_2y_3)(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_1 - x_1y_2)}$$
$$= \frac{4r^4\Delta^2}{(x_3y_2 - x_2y_3)(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_1 - x_1y_2)}.$$

Es bedeuten nun aber die drei Factoren im Nenner dieses Ausdrucks nichts anderes, als den doppelten Inhalt je eines der drei Dreiecke, welche zwei der ursprünglichen Punkte und jedesmal den Mittelpunkt des Kreises (den Anfangspunkt der Coordinaten) zu Eckpunkten haben. Bezeichnet man die Inhalte dieser Dreiecke mit Δ_1, Δ_2, Δ_3, so spricht sich die zu erweisende Relation in der Gleichung

$$D = \frac{r^4\Delta^2}{4\Delta_1 \, \Delta_2 . \Delta_3} \tag{A}$$

aus.

Nun hat man aber auch, wenn man x_1, y_1 u. s. w. durch ξ_1, η_1 u. s. w. ausdrückt:

$$x_1 = \frac{r^2(\eta_2 - \eta_3)}{\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3}, \quad y_1 = \frac{r^2(\xi_3 - \xi_2)}{\xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3};$$
$$x_2 = \frac{r^2(\eta_1 - \eta_3)}{\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3}, \quad y_2 = \frac{r^2(\xi_3 - \xi_1)}{\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3};$$
$$x_3 = \frac{r^2(\eta_1 - \eta_2)}{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2}, \quad y_3 = \frac{r^2(\xi_2 - \xi_1)}{\xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2};$$

und deshalb auch die Relation

Digitized by Google

$$\Delta=\frac{r^4 D^2}{4 D_1 . D_2 . D_3} \qquad \text{(B)}$$

wo D_1, D_2, D_3 die Inhalte der Dreiecke bezeichnen, welche je zwei der Ecken des umschriebenen Dreiecks und jedesmal den Mittelpunkt des Kreises zu Eckpunkten haben.

Aus den Ausdrücken (A) und (B) ergeben sich noch zwischen allen acht in Rede stehenden Dreiecken die Beziehungen, welche durch die Gleichungen

$$\frac{\Delta^3}{\Delta_1 . \Delta_2 . \Delta_3}=\frac{D^3}{D_1 . D_2 . D_3} \qquad \text{(C)}$$

und

$$r^8 \Delta . D = 16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 D_1 D_2 D_3 \qquad \text{(D)}$$

ausgedrückt sind.

Da man auch

$$(\xi_3\eta_2-\xi_2\eta_3)(\xi_1\eta_3-\xi_3\eta_1)(\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2)$$
$$=\frac{r^{12}\{x_2y_1-x_1y_2+x_3y_2-x_2y_3+x_1y_3-x_3y_1\}^3}{(x_3y_2-x_2y_3)^2(x_2y_1-x_1y_2)^2(x_1y_3-x_3y_1)^2}$$

hat, so ist

$$r^{12}\Delta^3=64\Delta_1{}^2\Delta_2{}^2\Delta_3{}^2 . D_1 D_2 D_3 \qquad \text{(E)}$$

und ebenso

$$r^{12} D^3=64 D_1{}^2 D_2{}^2 D_3{}^2 . \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \qquad \text{(F)}$$

aus welchen beiden Ausdrücken wieder die Relationen (C) und (D) folgen.

Man kann diese Ergebnisse noch allgemeiner fassen, wobei zugleich der eigentliche Grund für die entsprechenden Relationen deutlich hervortritt. Die Gleichungen (1), (2) und (3) sind nichts anderes als die Polargleichungen der Punkte x_1, y_1 u. s. w., wenn man den Kreis als Directrix betrachtet. Da es nun für den Verlauf der Rechnung ganz gleichgültig ist, ob diese Punkte auf dem Kreise liegen oder nicht, so gelten die angegebenen Relationen überhaupt für solche zwei Dreiecke, von denen die Seiten des einen die Ecken des anderen zu Polen haben. Betrachtet man nicht einen Kreis, sondern eine Ellipse oder Hyperbel mit den Halbaxen a und b, so ändert sich die in (C) ausgesprochene Relation nicht; die übrigen gehen aber in folgende über:

$$D=\frac{a^2 b^2 \Delta^2}{4\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}, \qquad \text{(A')}$$

$$\Delta=\frac{a^2 b^2 D^2}{4 D_1 D_2 D_3}, \qquad \text{(B')}$$

$$a^4 b^4 \Delta D = 16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 D_1 D_2 D_3, \qquad \text{(D')}$$

$$a^6 b^6 \Delta^3 = 64 \Delta_1{}^2 \Delta_2{}^2 \Delta_2{}^2 D_1 D_2 D_3, \qquad \text{(E')}$$

$$a^6 b^6 D^3 = 64 D_1{}^2 D_2{}^2 D_3{}^2 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3. \qquad \text{(F')}$$

Digitized by Google

Für die Parabel lassen sich sehr leicht die entsprechenden Ausdrücke finden. Bezeichnet man mit λ (l) die Summe oder Differenz der Abstände zweier Punkte von der Axe der Parabel, jenachdem dieselben auf verschiedenen oder auf derselben Seite der Axe liegen, so hat man, unter p den Parameter der Parabel verstanden:

$$D=\frac{p\Delta^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}; \qquad (A'')$$

$$\Delta=\frac{pD^2}{l_1l_2l_3}; \qquad (B'')$$

$$\frac{\Delta^3}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}=\frac{D^3}{l_1l_2l_3}; \qquad (C'')$$

$$p^2\Delta D=\lambda_1\lambda_2\lambda_3l_1l_2l_3; \qquad (D'')$$

$$p^3\Delta^3=\lambda_1{}^2\lambda_2{}^2\lambda_3{}^2l_1l_2l_3; \qquad (E'')$$

$$p^3D^3=l_1{}^2l_2{}^2l_3{}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \qquad (F'')$$

XXVI.

Ueber die Bewegung in den Krümmungen der Eisenbahnen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Herr Major Glünder hat in seiner so eben erschienenen interessanten kleinen Schrift: „Abhandlung über die Bewegungshindernisse in den Krümmungen der Eisenbahnen“ (Hannover bei Hahn) die bei diesem Gegenstande eintretenden Beziehungen mit einer Klarheit und Umsicht entwickelt, dass dieselbe mit Recht allen betreffenden Technikern zur Kenntnissnahme empfohlen werden kann. Wenn wir nun dessen ungeachtet den genannten Gegenstand hier noch einmal einer Betrachtung unterwerfen, so haben wir dabei mehr einen rein mathematischen Zweck. Der Verfasser jener Schrift hat sich nämlich sogleich von vorn herein bei seiner mathematischen Grundlegung mehrfache Abweichungen von der mathematischen Strenge gestattet, welche, wenn sie auch vielleicht für die Ausübung ohne Belang sein mögen, dennoch bei dem Leser das Gefühl einer Unsicherheit

Digitized by Google

hervorbringen, für welche keinerlei Art von Massstab gegeben wird. Es scheint uns aber vielmehr, es müsse jede derartige, ein Problem der Praxis behandelnde Theorie, so lange sie sich auf rein mathematischem Boden hält, überall mit vollkommener Strenge zu Werke gehen und ihre Endresultate als völlig scharf, oder wenigstens mit Angabe der Fehlergränzen, der Praxis überliefern. Dieser mag es sodann überlassen bleiben, sich in ihren Ausführungen mehr oder weniger, so weit sie es für gut findet, von dem Ergebnisse der Theorie zu entfernen.

Wir werden deshalb, den Entwickelungsgang der genannten Schrift verlassend, den Gegenstand hier unter eine neue Auffassung zu bringen versuchen, von welcher wir hoffen, dass sie eben so wenig an Einfachheit, als an Strenge, zu wünschen übrig lasse.

§. 1.

Unsere Betrachtung wird sich auf die Bewegung eines einzigen Räderpaares beschränken, welches fest auf seiner Achse sitzt. Wir nehmen ferner an, die Räder seien konisch gestaltet, so dass die Erweiterungen der rollenden Oberflächen beider Räder einen Doppelkegel $MPNQ$ (Taf. VII. Fig. 1.) bilden, welchen man sich durch Umdrehung des gleichschenkligen Dreiecks MQN um seine Basis MN als Achse entstanden denken kann. Endlich setzen wir die Schienen als Cylinder voraus, welche von dem rollenden Doppelkegel in A und B berührt werden, da in der Praxis wenigstens derjenige Theil der gebräuchlichen Ω-Schienen, welcher mit den Rädern in Berührung kommt, cylindrisch abgerundet zu sein pflegt.

Wir stellen dieser Auffassung sogleich noch eine andere zur Seite, welche sich durch die Rechnung bequemer handhaben lässt. Statt des gleichschenkligen Dreiecks MQN (Taf. VII. Fig. 1.) denken wir uns einen Kreisbogen MQN (Taf. VII. Fig. 2.), dessen Mittelpunkt in D liegt, um seine Sehne MN als Achse gedreht, und den also entstandenen Körper als rollend auf cylindrischen Schienen, die er in A und B berührt. Wir stellen hier mithin an die Praxis die Forderung, dass die Radkränze nicht rein konisch, sondern auch im Sinne der Achse gekrümmt seien, d. h. dass man sich dieselben nicht sowohl durch Rotation einer geraden Linie um eine andere, als vielmehr durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne entstanden zu denken habe.

Wie wenig übrigens dieser letzte Unterschied, bei der üblichen geringen Breite der Radkränze, für die Praxis von Belang ist: davon kann man sich durch eine leichte Rechnung überzeugen. Es sei der Abstand $AB = 58$ Zoll Engl. (s. die Glündersche Abhandlung) und die Tangente der Neigung der konischen Radkränze, welche man sich als berührend in A und B zu denken hat, gegen die Radachse betrage $\frac{1}{7}$, so entspricht dieser berührenden Linie ein Kreisbogen MQN, dessen Halbmesser $AD = BD = 205{,}06$ Zoll hält. Die Abweichung dieses Kreisbogens von seiner Tangente aber, in der Richtung des Halbmessers gemessen, beträgt für 1 Zoll Entfernung vom Berührungspunkte nicht völlig 0,03 Linien, eine Grösse, deren Vorhandensein bei der Art, wie die Räder angefertigt werden, schwerlich noch wird verbürgt werden

Digitized by Google

können. Diese Abweichung wird aber noch kleiner dadurch, dass man den Rädern in der Regel nur einen geringern Spielraum als 1 Zoll zu beiden Seiten der Mitte verstattet; sie nimmt nämlich im quadratischen Verhältnisse dieses Spielraums ab. Dazu kommt, dass die Abnutzung der Räder nach einer kurzen Zeit ihres Gebrauchs schon viel beträchtlicher ist, wovon man sich sofort durch den blossen Augenschein überzeugen kann; und es wird mithin für die Bedürfnisse der Praxis zuverlässig keinen Unterschied machen, ob wir von vorn herein rein konische Räder voraussetzen, oder Räder, deren rollende Oberflächen auch im Sinne der Achse eine Krümmung von der angegebenen Stärke besitzen.

§. 2.

Es ist jetzt ohne Mühe zu übersehen, dass wenn man den Körper $MPNQ$ (Taf. VII. Fig. 1. und 2.) so in A und B auf die Schienen legt, dass seine Achse MN eine Neigung gegen den Horizont besitzt, ein Gleichgewicht im Allgemeinen nicht eintreten könne. Denn es sei C der Schwerpunkt, in welchem das Gewicht des Körpers $CG=g$ (die Masse $=1$ gesetzt) vertikal abwärts wirkt, so erzeugen sich durch den Druck auf die Unterlagen in A und B zwei Normal-Widerstände in den Richtungen AD und BD, welche, wie auch ihre Grösse sein mag, sich zu einer Resultante vereinigen lassen, die durch den Punkt D geht. Soll nun Gleichgewicht bestehen, so muss diese Resultante dem Gewichte CG das Gleichgewicht halten, welches nur möglich ist, wenn der Punkt D in der durch den Schwerpunkt C gezogenen Vertikallinie liegt; in jedem andern Falle wird sich statt des gesuchten Gleichgewichts ein Kräftepaar ergeben, welches den Körper durch Drehung um eine auf der Ebene ABD normale Achse in die Gleichgewichtslage zu bringen strebt.

Von der Reibung auf den Schienen in A und B, welche den ruhenden Körper in einer andern als der angegebenen Gleichgewichtslage festzuhalten im Stande sein würde, kann hier völlig abgesehen werden. Denn da der Körper dazu bestimmt ist, fortzurollen, so wird er, von jener Reibung nicht gehindert, rollend jederzeit von selbst die genannte Gleichgewichtslage annehmen.

Nun liegt allerdings der Schwerpunkt eines Eisenbahnfuhrwerkes niemals in der Mitte C der Radachse, sondern oberhalb derselben in irgend einem andern Punkte der Linie PQ, und es könnte sich demnach treffen, dass dieser Schwerpunkt genau mit dem Punkte D (Taf. VII. Fig. 2.) zusammenfiele. In diesem Falle würde Gleichgewicht bestehen, welche Neigung man auch der Achse MN geben wollte. Es könnte ferner der Schwerpunkt über D fallen, wo sodann eine vorhandene Neigung der Radachse das Bestreben haben würde, sich noch zu vergrössern. Beide Fälle aber will man in der Praxis, wo ein stabiles Gleichgewicht gefordert wird, nicht haben, folglich ergiebt sich die Regel:

> die Neigung der Radkränze stets so gering zu wählen, dass der Mittelpunkt D des Bogens MQN merklich höher liegt, als der Schwerpunkt des Fuhrwerks.

Digitized by Google

So hat man in dem oben §. 1. gegebenen Beispiele $DH =$ 203 Zoll = 16 Fuss 11 Zoll, welche Grösse sicher in allen Fällen die Höhe des Schwerpunkts in einem Eisenbahnfuhrwerke um ein beträchtliches übertrifft, so dass mithin die Praxis, so wie sie von de Pambour ausgeht, schon unwillkührlich durch den ihr eigenen sicheren Takt das Richtige getroffen hat.

Allgemein sei die grösste Höhe, welche der Schwerpunkt eines Eisenbahnfuhrwerks annehmen kann, von der unveränderlichen Horizontalen AB (Taf. VII. Fig. 2.) aus gerechnet $= h$, und die halbe Breite der Bahn $AH = BH = e$, so muss die Tangente der Neigung der Radkränze gegen die Radachse immer geringer sein als der Bruch $\frac{e}{h}$; oder wenn man diesen Neigungswinkel, welcher mit dem Winkel $ADE = BDE$ übereinstimmt, mit ε, und den Halbmesser $AD = BD$ mit r bezeichnet, so kann man die obige Regel auf die beiden Bedingungen reduciren:

$$\operatorname{tg} \varepsilon < \frac{e}{h}, \quad r > \sqrt{e^2 + h^2} \qquad (1)$$

wo die Grössen ε und r durch die Gleichung $r \sin \varepsilon = e$ an einander gebunden sind.

In Taf. VII. Fig. 1. sind die genannten Beziehungen nicht mit der nämlichen Evidenz zu erkennen, weil hier der Punkt D seinen Ort verändert; indessen nimmt man ohne Mühe wahr, dass die aufgestellte Regel auch hier das Gleichgewicht stets zu einem stabilen machen wird, während eine Ueberschreitung dieser Regel dem Eintreten des nicht stabilen Gleichgewichts wenigstens schon sehr nahe führt.

§. 3.

Aus den bisherigen Andeutungen geht sofort hervor, dass eine geneigte Lage der Achse MN (Taf. VII. Fig. 1. u. 2.) stets nur dadurch dauernd hergestellt werden kann, dass zu den vorhandenen Kräften noch eine neue in geeigneter Weise hinzutritt. Es sei diese Kraft die horizontal wirkende und im Schwerpunkte C angebrachte $CF = f$, so wird jetzt Gleichgewicht vorhanden sein, sobald die Resultante aus f und g in ihrer Verlängerung den Punkt D trifft, d. h. sobald man hat

$$\frac{f}{g} = \operatorname{tg} CDE \qquad (2)$$

wobei jedoch die Beschränkung zu machen ist, dass Winkel $CDE < $ W. ADE bleiben muss, wenn nicht der Körper aus seiner Bahn gehoben werden soll. — Die Frage aber, woher diese Kraft? und wozu überhaupt eine Neigung der Achse gegen den Horizont? führt uns nun zu dem eigentlichen Gegenstande unserer Untersuchung.

Wenn bei geneigter Lage der Achse MN der Körper $MPNQ$ durch die Kraft der Locomotive auf den Schienen vorwärts getrie

Digitized by Google

ben wird, so kommen nur Punkte zweier Kreisperipherien fortwährend mit den Schienen in Berührung, deren Durchmesser AA' und BB' sind. Man kann zur Erleichterung der Auffassung diese beiden Kreisperipherien als angehörig einem rollenden Kegel ansehen, dessen Spitze in T liegt *).

Ist nun die Bahn geradlinig, so wird allen Punkten der Achse MN die nämliche Linear-Geschwindigkeit ertheilt; folglich muss, wenn der grössere Kreis AA' eine rein wälzende Bewegung annimmt, der kleinere Kreis BB' einen Theil seines Weges gleitend oder schleifend zurücklegen; oder umgekehrt, wenn etwa der kleinere Kreis BB' eine rein wälzende Bewegung besitzt, so wird der grössere Kreis eine rückwärts gleitende Bewegung annehmen müssen. Indessen, da in diesem Falle, wenn man von zufälligen Einwirkungen absieht, das Gleichgewicht eine horizontale Stellung der Achse erfordert, so wird der fortrollende Körper sehr bald von selbst diese Lage annehmen, mithin ein Gleiten des einen oder des andern Rades und folglich auch das daraus entstehende Bewegungshinderniss nicht weiter stattfinden.

Anders dagegen verhält sich die Sache in Bahnkrümmungen. Hier darf nicht mehr jeder Punkt der Achse MN die nämliche Linear-Geschwindigkeit besitzen, sondern die Geschwindigkeiten verschiedener Punkte derselben müssen sich verhalten wie ihre horizontalen Abstände vom Krümmungsmittelpunkte der Bahn, und es wird nicht nur bei horizontaler Lage der Achse, sondern im Allgemeinen auch bei einer willkührlichen Neigung derselben, das eine oder das andere Rad einen Theil seines Weges entweder vorwärts oder rückwärts gleitend zurücklegen müssen, folglich ein Bewegungshinderniss eintreten. Nur Eine bestimmte Neigung der Achse giebt es, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen. Soll dieser Fall nämlich eintreten, so müssen die Geschwindigkeiten der Mittelpunkte der Kreisperipherien

---

*) Dieser rollende Kegel hat einen Recensenten der Glünderschen Abhandlung in der Eisenbahn-Zeitung (Stuttgart. 1846. 12. Juli) zu so seltsamen Missdeutungen geführt, dass wir uns nicht enthalten können, die Leser des Archivs auf dieses Curiosum aufmerksam zu machen. Daraus nämlich, dass (wie sich sogleich zeigen wird) bei Neigung der Achse MN Schwere und Centrifugalkraft einander aufheben sollen, schliesst der gelehrte Recensent weiter, dass „der ganze Kegel (ATA') zufolge der Schwerkraft ein Bestreben haben muss, sich nach der Richtung seiner Achse fortzubewegen, welches Bestreben dann auch in wirkliches Fortschieben auf horizontaler Ebene übergehen muss, sobald die Drehung des Kegels, mithin die Centrifugalkraft, wegfällt. Also muss hiernach jeder Kegel, wenn seine Achse nur die erforderliche Neigung hat, zufolge der Schwerkraft sofort zu rutschen beginnen, sobald man ihn mit der Seite auf eine horizontale Ebene legt! Dieser frappante Satz würde wahrlich ein Perpetuum mobile der einfachsten Natur möglich machen, was sich ganz besonders zum Ziehen von Lasten auf horizontalen Wegen eignen dürfte."

Dass sich der geistreiche Recensent (der wohlweislich seinen Namen verschweigt) noch über manches andere wundert, was die Glündersche Schrift enthält, wird man nach dieser Probe leicht erklärlich finden. Eine Kritik erscheint uns, einem so groben Unverstande gegenüber, als völlig überflüssig.

Digitized by Google

AA' und BB' sich verhalten wie diese Kreisperipherien selbst, letztere aber verhalten sich wieder wie ihre Abstände von der Spitze T des schon gedachten Kegels; folglich muss die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn liegen, oder mit andern Worten, es muss die Sache so angesehen werden können, als ob der Kegel ATA' eine rein wälzende Bewegung annimmt, bei welcher seine Spitze T unverrückt liegen bleibt.

Zur Herstellung der für diese Verhältnisse erforderlichen Neigung der Achse MN bietet sich nun die Centrifugalkraft dar. Es sei demnach jetzt $CF=f$ die Centrifugalkraft des Punktes C, seine Geschwindigkeit in der Bahn $=v$, und sein Krümmungshalbmesser $TU=\varrho$, so hat man bekanntlich (die Masse des Körpers $MPNQ$ wie oben $=1$ setzend)

$$f=\frac{v^2}{\varrho},$$

wodurch sich die obige Gleichgewichtsbedingung (2) umwandelt in

$$\left.\begin{aligned}\frac{v^2}{g\varrho}&=\operatorname{tg} CDE\\ v&=\sqrt{g\varrho\operatorname{tg} CDE}\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Da in dieser Gleichung die Grössen ϱ und CDE nicht unabhängig von einander sind, indem mit dem Wachsen der einen die andere abnimmt, so giebt es mithin

> bei jeder gegebenen Krümmung der Bahn nur Eine bestimmte Geschwindigkeit, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen.

Jede andere Geschwindigkeit, sie sei kleiner oder grösser als die genannte, bringt mithin dasjenige Bewegungshinderniss hervor, welches aus einem theilweisen Schleifen des einen oder des andern Rades entsteht; und zwar übersieht man ohne Mühe, dass dieses Bewegungshinderniss desto grösser ausfallen wird, je mehr man sich nach der einen oder andern Seite hin von jener Geschwindigkeit entfernt.

§. 4.

Für die Praxis ist es von Wichtigkeit, die so eben näher bezeichnete Geschwindigkeit, welche wir zur Abkürzung die Normal-Geschwindigkeit nennen wollen, für eine gegebene Bahnkrümmung ermitteln zu können. Wir gelangen dazu durch folgende Rechnungen, bei deren Herleitung wir uns auf Taf. VII. Fig. 2. beschränken.

Es sei die Neigung der Achse MN gegen den Horizont oder der Winkel $MTA=\varphi$, so hat man in Taf. VII. Fig. 2. auch $CDE=\varphi$, folglich aus (3)

$$v=\sqrt{g\varrho\operatorname{tg}\varphi}\qquad(4)$$

Digitized by Google

oder, da $\varrho \operatorname{tg} \varphi = CU$ ist:

$$v = \sqrt{g . CU}. \qquad (5)$$

Hieraus aber erhalten wir leicht eine angenäherte Bestimmung von v, welche für alle Verhältnisse, die die Praxis bietet, vollkommen zureichend sein wird. Der Winkel φ nämlich muss nach dem Obigen stets merklich kleiner bleiben als $ADE = \varepsilon$, wenn das Fuhrwerk nicht in Gefahr gerathen soll, über den Berührungspunkt A hinweg aus der Bahn geschleudert zu werden; und da man diesen Winkel ε nach §. 2. schon möglichst klein zu wählen hat, so wird um so mehr der Winkel φ klein bleiben und kaum jemals die Grösse von 1 oder 2 Graden übersteigen dürfen. Unter der Voraussetzung also, dass man mit einer hinreichend geringen Anzahl von Decimalstellen rechnet, machen wir jetzt die Annahme, der Winkel φ sei so klein, dass man ohne bemerkbaren Einfluss

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \varphi \text{ und } \cos \varphi = 1$$

setzen dürfe. In den Anwendungen hat man alsdann, sobald der Winkel φ gefunden ist, jedesmal sofort ein Mittel in Händen, um über den Grad der Genauigkeit der gefundenen Resultate zu urtheilen.

Es sei nun c der mittlere Halbmesser der Räder, d. h. diejenige Grösse, in welche die Halbmesser der Kreise AA' und BB' bei Horizontalstellung der Achse MN übergehen; und es sei ferner die Länge $CD = p$, so hat man

$$DH = p \cos \varphi + CU = p + c,$$

folglich, wegen $\cos \varphi = 1$:

$$CU = c,$$

und aus (5)

$$v = \sqrt{gc}. \qquad (6)$$

Diese Gleichung schliesst den beachtenswerthen Satz in sich:

> dass für die in der Praxis vorkommenden Gränzen die Normal-Geschwindigkeit, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen, als unabhängig von dem Krümmungshalbmesser, und mithin für die ganze Bahn als constant anzusehen ist.

Das einzige bestimmende Element, aus welchem die Normal-Geschwindigkeit gefunden wird, ist demnach der mittlere Radhalbmesser; und setzt man diesen, wie gewöhnlich, $= 1\frac{1}{2}$ Fuss Engl., während $g = 32{,}2$ Fuss Engl. ist, so erhält man

$$v = 6{,}95 \text{ Fuss}$$

als diejenige Geschwindigkeit, mit welcher eine Bahn ihrer ganzen Erstreckung nach, welche Krümmungen sie auch bilden mag,

Digitized by Google

befahren werden kann, ohne dass ein Schleifen des einen oder des andern Radkranzes auf den Schienen eintreten wird.

Die Grösse der Neigung φ, welche der so eben gefundenen Normal-Geschwindigkeit entspricht, bestimmt man nun ohne Mühe aus der jedesmaligen Grösse des Krümmungshalbmessers. Die oben gegebene Gleichung $\varrho \operatorname{tg} \varphi = CU$ verwandelt sich nämlich jetzt, nach den geschehenen Voraussetzungen, in

$$\varrho\varphi = c,$$

woraus

$$\varphi = \frac{c}{\varrho}; \tag{7}$$

und diese Gleichung zeigt, dass man, mit Beibehaltung des obigen Werthes von c, selbst noch für einen Krümmungshalbmesser $\varrho = 50$ Fuss einen Werth von φ erhält, nämlich

$$\varphi = 0{,}03, \text{ d. i. 1 Grad 43 Min.},$$

für welchen man $\cos\varphi = 1$ und $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ setzen darf, ohne einen Fehler zu begehen, der die Grösse von einer halben Einheit der dritten Decimalstelle erreicht; eine für alle Anwendungen zureichende Genauigkeit. Noch mehr verringert sich offenbar dieser Fehler für grössere Krümmungshalbmesser; so z. B. für $\varrho = 300$ Fuss würde man nur haben

$$\varphi = 0{,}005, \text{ d. i. 17 Min.}$$

Es ist zu bemerken, dass ein gegebener Krümmungshalbmesser sich stets auf die Mitte H der Bahn zu beziehen pflegt, während in den vorliegenden Rechnungen dieser Krümmungshalbmesser stets auf den Punkt U bezogen wurde; doch ist der Unterschied zwischen den Werthen TU und TH, nämlich $UH = p\varphi$, welcher höchstens einige Zoll betragen kann, so gering, dass er im Vergleich mit dem ganzen Krümmungshalbmesser ohne bemerkbaren Einfluss vernachlässigt werden darf.

Schliesslich bleibt uns noch eine Grösse zu bestimmen, die für die Praxis von Wichtigkeit ist, nämlich die Grösse derjenigen Verschiebung, welche der Körper $MPNQ$ auf den Schienen zu erleiden hat, wenn die Achse aus der horizontalen in die so eben festgestellte geneigte Lage übergehen soll. Diese Verschiebung wird nämlich unmittelbar durch den Bogen QE ausgedrückt, und setzen wir denselben $= m$, so erhalten wir unter der Voraussetzung, dass der Halbmesser $AD = BD = r$ bekannt sei,

$$m = r\varphi = r.\frac{c}{\varrho}. \tag{8}$$

Nun ist es für die Praxis von Belang, dass diese Verschiebung möglichst gering ausfalle, weil davon die nöthige Breite der Räder abhängt. Da dieselbe sich nun hier als abhängig von dem Halbmesser r zeigt, dieser aber wieder, bei gegebener Bahnbreite, durch den Neigungswinkel ε der Radkränze gegen die Radachse bedingt wird, so ergiebt sich die praktische Forderung:

Digitized by Google

die Neigung der Radkränze stets so gross zu wählen, dass die Verschiebung m der Räder auf den Schienen eine gewisse gegebene Grösse nicht übersteigt.

Diese Forderung tritt mithin als Ergänzung zu der im §. 2. aufgestellten Regel hinzu, und beide zusammen genommen schliessen erst die Neigung der Radkränze in zwei Gränzen ein, deren numerische Werthe zu bestimmen indessen der Praxis überlassen bleiben muss.

Um ein erläuterndes Beispiel hinzuzufügen, so haben wir oben unter der Annahme $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{7}$ gefunden $r = 205{,}06$ Zoll, und daraus ergiebt sich für einen Krümmungshalbmesser $\varrho = 300$ Fuss beim Eintritt der Normal-Geschwindigkeit eine Verschiebung

$$m = 1{,}0253 \text{ Zoll.}$$

Betrachtet man diese Verschiebung, die nur um ein Geringes die Grösse von 1 Zoll übertrifft, als die äusserste, welche man einem Rade von der üblichen Breite von 3 Zoll noch auferlegen darf, so folgt, dass für Radkränze von $\frac{1}{7}$ Neigung der Krümmungshalbmesser von 300 Fuss eine Gränze abgiebt, unter welche man bei Anlegung einer Eisenbahn nicht hinabgehen darf. Wenn es aber erlaubt ist, die Neigung der Radkränze grösser anzunehmen, als sie durch die Gleichung $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{1}{7}$ bestimmt wird, ohne dass man zu befürchten hat, dass der Mittelpunkt D des Bogens MQN der höchsten möglichen Lage des Schwerpunkts in einem Eisenbahnfuhrwerke zu nahe rückt oder gar darunter fällt, so werden unter Voraussetzung derselben äussersten Verschiebung auch noch geringere Krümmungshalbmesser für die Bahn zulässig sein.

Allgemein findet man als **die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers** aus der Gleichung (8)

$$\varrho = \frac{r}{m} \cdot c, \qquad (9)$$

indem man hierin für m und r gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt.

§. 5.

Die bisher entwickelten Gesetze enthalten insofern noch keine den Forderungen der Praxis vollkommen genügende Theorie, als die oben gefundene Normal-Geschwindigkeit $v = 6{,}95$ Fuss, welche sich nur durch Vergrösserung der Radhöhe noch etwas erhöhen lässt, bei weitem nicht diejenige Geschwindigkeit erreicht, mit welcher durchschnittlich die Eisenbahnen pflegen befahren zu werden. Diese Geschwindigkeit beträgt nämlich bei voller Kraft der Maschine 30 Fuss und darüber, und vermindert sich nur in der Nähe der Haltstellen; es wird demnach in der Wirklichkeit im Allgemeinen nicht vermieden werden können, dass dasjenige Bewegungshinderniss, welches aus einem theilweisen Schleifen des einen oder des andern Rades auf seinen Schienen entspringt, in beträchtlicher Grösse sich einstelle, worüber weitere Rechnung zu

Digitized by Google

führen wir uns hier versagen wollen, indem wir auf die Glündersche Abhandlung verweisen.

Zugleich aber zeigt sich noch ein zweiter Uebelstand. Jener in der Wirklichkeit vorhandenen grössern Geschwindigkeit entspricht nämlich auch eine stärkere Neigung der Radachse gegen den Horizont, und folglich auch eine stärkere Verschiebung der Räder auf den Schienen, welche Verschiebung aber, bei einem nach den bisherigen Gesetzen construirten Fuhrwerke, keineswegs in allen Fällen sich noch wird ausführen lassen. Aus (3) erhält man nämlich, indem man wie bisher $\operatorname{tg} CDE = \operatorname{tg}\varphi = \varphi$ setzt,

$$\varphi = \frac{v^2}{g\varrho},$$

und da wir jetzt nicht mehr die Annahme machen, es sei v identisch mit der oben sogenannten Normalgeschwindigkeit, so fällt auch nicht mehr die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, man darf nicht mehr TU mit dem Krümmungshalbmesser der Bahn verwechseln, d. h. $\varrho\varphi = c$ setzen, sondern die Gleichung (8) zur Bestimmung der Grösse $QE = m$ der Verschiebung der Räder auf den Schienen nimmt jetzt die Gestalt an:

$$m = r\varphi = \frac{rv^2}{g\varrho}, \qquad (10)$$

woraus man sodann umgekehrt als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers statt (9) erhält

$$\varrho = \frac{rv^2}{mg}, \qquad (11)$$

wenn man hierin für m, r und v gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt.

Es sei zum Beispiel die äusserste zulässige Verschiebung $m = 1$ Zoll, ferner $v = 30$ Fuss, so erhält man mit Beibehaltung der übrigen Zahlen, so wie sie eben benutzt wurden,

$$\varrho = 5731 \text{ Fuss}$$

als denjenigen Werth des Krümmungshalbmessers, unter welchen hinab bei der Anlage der Eisenbahn nicht gegangen werden darf Diese Gränze lässt sich allerdings noch dadurch etwas hinabdrücken, dass man die Neigung der Radkränze vergrössert (wodurch r kleiner wird); aber sie wird sofort wieder zunehmen, sobald die Bahn mit noch grössern Geschwindigkeiten als 30 Fuss befahren werden soll, so dass wir nicht zu weit gehen werden, wenn wir in runder Zahl 6000 Fuss als niedrigste Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers unter den hier vorausgesetzten Verhältnissen annehmen.

Beide Uebelstände zusammengenommen, nämlich:

1) dass man es bei den üblichen bedeutenden Geschwindigkeiten niemals in seiner Gewalt hat, in den Bahnkrümmungen eine rein wälzende Bewegung beider Räder her-

Digitized by Google

zustellen, sondern immer durch theilweises Schleifen des einen oder andern Rades ein mehr oder weniger bedeutendes Bewegungshinderniss eintritt; so wie

2) dass selbst bei Zulassung dieses Bewegungshindernisses dennoch wegen der bedeutenden Verschiebung, welche die Räder auf den Schienen erfordern würden, stärkere Bahnkrümmungen als solche mit 6000 Fuss Halbmesser gar nicht zugelassen werden dürfen;

haben es von grosser Wichtigkeit erscheinen lassen, eine Anordnung zu erdenken, bei welcher diese Uebelstände entweder ganz oder wenigstens theilweise wegfallen. Diese Anordnung besteht aber in der Erhöhung der äussern Schienenreihe, und es bleibt uns mithin jetzt noch zu untersuchen übrig, wie bei dieser Abänderung in den bisherigen Voraussetzungen die Bewegung in den Bahnkrümmungen sich gestaltet.

§. 6.

Nehmen wir also jetzt an, es sei die Linie AB, welche die Berührungspunkte zwischen Räder und Schienen mit einander verbindet, nicht mehr horizontal wie in Taf. VII. Fig. 2., sondern um den Winkel $ATK = \omega$, Taf. VII. Fig. 3, gegen den Horizont geneigt; alsdann wird die Neigung der Achse MN gegen den Horizont gemessen durch den Winkel $MTK = \varphi + \omega$, indem $MTA = \varphi$ wie früher denjenigen Winkel bezeichnet, welchen die Achse MN mit der Linie AB einschliesst. Die Richtung der Schwere CG steht jetzt rechtwinklig auf TK, und demnach verwandelt sich die Gleichgewichtsbedingung (3) jetzt in

$$\left.\begin{aligned}\frac{v^2}{g\varrho} &= \operatorname{tg} CDO \\ &= \operatorname{tg}(\varphi + \omega)\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

so dass wir statt (4) erhalten

$$v = \sqrt{g\varrho \operatorname{tg}(\varphi + \omega)} \qquad (13)$$

und nehmen wir jetzt an, es liege die Kegelspitze T in einerlei Vertikallinie mit dem Krümmungsmittelpunkte der Bahn, so wie es zur Erlangung einer rein wälzenden Bewegung beider Räder nothwendig ist, so ist mithin $TV = \varrho$ der Krümmungshalbmesser für den Punkt C, folglich $\varrho \operatorname{tg}(\varphi + \omega) = CV$, so dass statt (5) der Ausdruck für die Normal-Geschwindigkeit wird:

$$v = \sqrt{g . CV}. \qquad (14)$$

Hieraus lässt sich wiederum eine angenäherte, aber für die Praxis völlig genügende Formel herstellen, wenn man der obigen Annahme gemäss nicht nur den Winkel φ, sondern auch den Winkel ω so klein voraussetzt, dass man ohne bemerkbaren Fehler

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \varphi \text{ und } \cos\varphi = 1,$$

Digitized by Google

sowie

$$\sin\omega = \operatorname{tg}\omega = \omega \text{ und } \cos\omega = 1$$

setzen könne. Alsdann nämlich wird, indem man gleichzeitig wieder den mittleren Radhalbmesser c einführt,

$$CV = c + \varrho\omega,$$

so dass wir statt der Gleichung (6) jetzt die folgende erhalten:

$$v = \sqrt{g(c + \varrho\omega)}. \tag{15}$$

Hier zeigt sich nun, dass die Normal-Geschwindigkeit nicht mehr als unabhängig vom Krümmungshalbmesser angesehen werden darf, sobald man der äussern Schiene eine Erhöhung über die innere Schiene giebt, sondern dass sie zugleich mit dieser Erhöhung und dem Krümmungshalbmesser wächst Man kann hier mithin erreichen — was bei der frühern Anordnung nicht möglich war — dass die Normal-Geschwindigkeit, bei welcher beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen, jeden beliebigen Werth erhält, wenn man nur ϱ und ω angemessen feststellt; und wenn (wie der Fall in der Praxis vorzuliegen pflegt) diejenige Geschwindigkeit v bekannt ist, mit welcher eine Bahnkrümmung vom Halbmesser ϱ befahren werden soll, so kann man dieselbe zur Normal-Geschwindigkeit in dem hier gebrauchten Sinne des Worts machen, indem man nach (15)

$$\omega = \frac{v^2}{g\varrho} - \frac{c}{\varrho} \tag{16}$$

annimmt. Diese Grösse kann man sodann weiter benutzen, um die lineare Erhöhung des Punktes A über B, oder die Differenz $AK - BL = \delta$ zu bestimmen, wenn die Breite der Bahn $AB = 2e$ bekannt ist; nämlich

$$\delta = 2e\omega. \tag{17}$$

Soll z. B. die Normal-Geschwindigkeit in einer Bahnkrümmung von 300 Fuss Halbmesser 30 Fuss betragen, so hat man, mit Beibehaltung der übrigen Werthe von oben,

$$\omega = 0{,}088, \text{ d. i. 5 Grad 2 Min.}$$

und daraus

$$\delta = 5{,}10 \text{ Zoll.}$$

Der Winkel ω ist hier so gross ausgefallen, dass die Uebereinstimmung von $\sin\omega$ und $\operatorname{tg}\omega$ mit ω selbst, und von $\cos\omega$ mit der Einheit, nur noch bis auf weniger als eine halbe Einheit der zweiten Decimalstelle verbürgt werden kann; welche Genauigkeit indessen für die Anwendungen noch immer vollkommen ausreichend sein würde, wenn so grosse Erhöhungen überhaupt noch in der Praxis vorkommen könnten, worüber §. 7. das Weitere enthalten wird.

Digitized by Google

Zugleich aber übersieht man noch aus den gegebenen Formeln, dass wenn alles übrige ungeändert bleibt, ω sowie δ im umgekehrten Verhältnisse des Krümmungshalbmessers sich ändern müssen; mithin z. B. für eine Krümmung von 600 Fuss Halbmesser

$$\omega = 0{,}044, \quad \delta = 2{,}55 \text{ Zoll},$$

für eine Krümmung von 900 Fuss Halbmesser

$$\omega = 0{,}029, \quad \delta = 1{,}70 \text{ Zoll},$$

u. s. f.

Was die Grösse der Verschiebung der Räder auf ihren Schienen betrifft, so wird dieselbe auch hier durch den Bogen $QE = m$ gemessen, und man hat wie oben

$$m = r\varphi.$$

Für den Winkel φ aber erhält man aus (12)

$$\varphi = \frac{v^2}{g\varrho} - \omega, \tag{18}$$

und wenn hier v diejenige Normal-Geschwindigkeit bedeutet, für welche die Krümmung gebauet, d. h. ω bestimmt ist, so giebt die Zuziehung von (16)

$$\varphi = \frac{c}{\varrho},$$

wie in (7), und daraus

$$m = r\varphi = r \cdot \frac{c}{\varrho},$$

wie in (8). Es gelten mithin wieder genau alle diejenigen Folgerungen, welche sich oben im §. 4. an die Gleichungen (7) und (8) angeknüpft haben, und demnach leistet die Erhöhung der äussern Schienenreihe allen den Anforderungen Genüge, welche man an die Bewegungen in Bahnkrümmungen stellen kann. Denn nicht nur ist man jetzt im Stande, für jede gegebene Geschwindigkeit eine Bahn herzustellen, in welcher durchgängig eine rein wälzende Bewegung beider Räder stattfindet, sondern es gilt auch nicht mehr jener Halbmesser von 6000 Fuss als Gränze, welche von der Krümmung der einzelnen Bahnstrecken nicht überschritten werden darf. Im Gegentheil findet man hier wieder als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers aus (8) den Werth

$$\varrho = \frac{r}{m} \cdot c,$$

wie in (9), wenn man hierin für m und r gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe setzt; also unter den oben gemachten Voraussetzungen $\varrho = 300$ Fuss.

Digitized by Google

§. 7.

Wenn eine Bahnkrümmung, in welcher die äussere Schienenreihe eine angemessene Erhöhung gegen die innere erhalten hat, nicht mit derjenigen Normal-Geschwindigkeit befahren wird, für welche sie gebaut, d. h. der Werth von ω festgestellt ist, — ein Fall, der in der Praxis offenbar nicht vermieden werden kann, — so treten hier wieder Betrachtungen in Kraft, ähnlich denjenigen, welche den Gegenstand des §. 5. ausmachen. In diesem Falle werden nämlich nicht mehr beide Räder eine rein wälzende Bewegung annehmen, sondern es wird durch das Schleifen des einen oder des andern Rades auf seinen Schienen das mehrerwähnte Bewegungshinderniss sich einstellen, welches wir, wie schon gesagt, hier nicht weiter der Rechnung unterwerfen. Zugleich wird aber auch die Verschiebung der Räder auf den Schienen, m, eine andere werden, da der Neigungswinkel φ sich ändert; und nennen wir demnach v diejenige von der Normalgeschwindigkeit verschiedene Geschwindigkeit, mit welcher die Bahn befahren werden soll, so haben wir mit Zuziehung der Gleichung (18)

$$m = r\varphi = r\left(\frac{v^2}{g\varrho} - \omega\right) \tag{19}$$

als die Grösse der einer beliebigen Geschwindigkeit v entsprechenden Verschiebung. Diese Grösse fällt mit (8) zusammen, wenn man für v die Normal-Geschwindigkeit an die Stelle setzt; sie wird Null, wenn v den Werth $v = \sqrt{g\varrho\omega}$ hat, in welchem Falle die Achse MN parallel zu der Basis AB liegt; und endlich kann sie auch negativ werden, und kommt dem Werthe $m = -r\omega$ desto näher, je mehr die Geschwindigkeit sich dem Werthe Null nähert, in welchem letztern Falle die Achse MN horizontal liegt. Alles dieses erhellet auch unmittelbar aus der Betrachtung der Natur der Sache.

Nehmen wir beispielsweise an, die oben vorausgesetzte Bahnkrümmung von 300 Fuss Halbmesser, welche für eine Normal-Geschwindigkeit von 30 Fuss eine Neigung $\omega = 0{,}088$ besitzen muss, solle mit einer Geschwindigkeit von 32 Fuss befahren werden, so ergiebt sich aus (19) die zugehörige Verschiebung

$$m = 3{,}7 \text{ Zoll},$$

dessgleichen wenn dieselbe mit einer Geschwindigkeit von 28 Fuss befahren werden soll, so erhält man die Verschiebung

$$m = -1{,}4 \text{ Zoll},$$

während für die Normal-Geschwindigkeit von 30 Fuss die Verschiebung beträgt

$$m = 1{,}0 \text{ Zoll}.$$

Die, wie dieses Beispiel zeigt, so beträchtlich ausfallenden Differenzen in der Grösse der Verschiebung bei einer so geringen Abweichung von ± 2 Fuss von der Normal-Geschwindigkeit, welche die ursprünglich festgestellte Gränze von $m = \pm 1$ Zoll weit über-

Digitized by Google

schreiten, machen hier zum Schluss noch eine eigene Untersuchung nöthig, um ihre Ursachen aufzusuchen, und daraus für die Praxis Regeln zur Vermeidung derselben herzuleiten.

Es seien zu dem Ende v und v' irgend zwei Geschwindigkeiten und resp. m und m' die ihnen entsprechenden Verschiebungen, so folgt aus (19)

$$m - m' = r.\frac{v^2 - v'^2}{g\varrho},$$

und lässt man hierin v' die Normal-Geschwindigkeit bedeuten, wodurch m' den Werth

$$m' = r.\frac{c}{\varrho}$$

annimmt, so erhält man

$$m = \frac{r}{\varrho}\left(\frac{v^2 - v'^2}{g} + c\right) \qquad (20)$$

welche Gleichung sofort erkennen lässt, wie die in jedem besondern Falle gegebenen Data auf die Grösse von m von Einfluss sind. Bezeichnet nämlich v die äusserste Geschwindigkeit, mit welcher die der Normal-Geschwindigkeit v' entsprechende Bahnkrümmung noch befahren werden soll, so wird die ihr zugehörige Verschiebung m desto kleiner ausfallen, je kleiner r, d. h. je grösser die Neigung der Radkränze gegen die Radachse ist, und je grösser ϱ angenommen wird. Es zeigt sich hier mithin abermals die Nothwendigkeit, die Neigung der Radkränze so gross wie möglich zu wählen, wodurch der im §. 2. gegebenen Regel eine Gränze gestellt wird. Ist aber die Neigung der Radkränze ein für alle Mal auf ein Aeusserstes festgestellt, so bleibt nur der Krümmungshalbmesser noch das einzige veränderliche Element, und man erhält mithin, sobald durch die Breite der Räder eine äusserste zulässige Grösse der Verschiebung vorgeschrieben ist, jetzt als die äusserste zulässige Gränze für die Grösse des Krümmungshalbmessers aus (20) den Werth

$$\varrho = \frac{r}{m}\left(\frac{v^2 - v'^2}{g} + c\right) \qquad (21)$$

wenn man hierin für m, r und v gleichfalls ihre äussersten zulässigen Werthe an die Stelle setzt.

Da es für v zwei äusserste Werthe giebt, nämlich einen grössten und einen kleinsten, so hat man die Rechnung doppelt zu führen und von den gefundenen beiden Krümmungshalbmessern den grössern beizubehalten. Im allgemeinen wird v' das arithmetische Mittel aus jenen beiden äussersten Geschwindigkeiten sein, in welchem Falle man nur für die grösste Geschwindigkeit die Rechnung durchzuführen braucht; doch ist jenes nicht nothwendig, sondern vielmehr ist es der Praxis angemessener, die am häufigsten vorkommende Geschwindigkeit als Normal-Geschwindigkeit dem Bau der Bahnkrümmungen zum Grunde zu legen.

Es seien zum Beispiel wie oben die äussersten Geschwindigkeiten, mit welcher eine für die Normal-Geschwindigkeit $v' = 30$

Digitized by Google

Fuss einzurichtende Bahnstrecke noch befahren werden soll, die von 32 und 28 Fuss, und als äusserste Grösse der Verschiebung werde $m = \pm 1$ Zoll festgestellt, so hat man

$$1)\quad \varrho = \frac{205,06}{+1}\left(\frac{32^2 - 30^2}{32,2} + 1,5\right) = 1097 \text{ Fuss,}$$

$$2)\quad \varrho = \frac{205,06}{-1}\left(\frac{28^2 - 30^2}{32,2} + 1,5\right) = 431 \text{ Fuss;}$$

und es dürfen demnach auf der genannten Bahnstrecke Krümmungshalbmesser unter 1100 Fuss nicht zugelassen werden, wenn nicht Gefahr entstehen soll, dass der Wagenzug die Schienen verlässt. Und so in ähnlichen Fällen.

Aus diesem Grunde werden also auch sowohl die der Normal-Geschwindigkeit entsprechende Verschiebung, als auch die Erhöhung der äussern Schienenreihe gegen die innere, in der Praxis weit geringer ausfallen, als sie oben im §. 6. beispielsweise berechnet wurden.

XXVII.

In ein gegebenes Dreieck ein ähnliches zu zeichnen, dessen Seiten mit den homologen des ersteren einen gegebenen Winkel φ bilden.

Von dem

Herrn Doctor H. Hoffmann,

Lehrer am Gymnasium zu Danzig.

Diese Aufgabe bietet zwei wesentlich von einander verschiedene Fälle dar; wenn nämlich

I. jede Ecke des einbeschriebenen Dreiecks in der Gegenseite des gleichen Winkels liegt, und wenn

II. jede Ecke des einbeschriebenen Dreiecks in der Gegenseite eines ungleichen Winkels liegt.

Digitized by Google

I. Erster Fall.

1) Geometrische Auflösung.

§. 1.

Gegeben ist das Dreieck ABC (Taf. VIII. Fig. 1. u. 2.). Man suche den Mittelpunkt, O, des umbeschriebenen Kreises mittels der drei Perpendikel OD, OE, OF in der Mitte der Dreiecksseiten; trage an diese Perpendikel in O den gegebenen Winkel immer nach derselben Seite an, so dass

$$\angle DOa = \angle EOb = \angle FOc = \varphi$$

und verbinde die Schnittpunkte a, b, c mit einander; dann ist Δabc das verlangte Dreieck.

Der Beweis zerfällt in zwei Theile:

1) $\Delta abc \sim \Delta ABC.$

Da $\angle ObE = \angle OcF = \angle OaD$, so sind die Vierecke

$$ObAc,\ OcBa,\ OaCb$$

Kreisvierecke; zieht man daher noch OA, OB, OC und bedenkt, dass

$$\angle OAE = \angle OCE,\ \angle OBF = \angle OAF,\ \angle OCD = \angle OBD;$$

so hat man:

$$\angle OAC = \angle Oab,\ \angle OBA = \angle Obc,\ \angle OCB = \angle Oca,$$
$$\angle OAB = \angle Oac,\ \angle OBC = \angle Oba,\ \angle OCA = \angle Ocb.$$

Addirt man die unter einander stehenden Gleichungen, so erhält man:

$$\angle CAB = \angle cab,\ \angle ABC = \angle abc,\ \angle BCA = \angle bca;$$

d. h. $\Delta ABC \sim \Delta abc.$

2) Die Neigung der homologen Seiten ist $= \varphi$ oder

$$\angle (BC, bc) = \angle (CA, ca) = \angle (AB, ab) = \varphi.$$

Aus den eben benutzten sechs Gleichungen folgt auch:

$$\angle Oab = \angle Ocb,\ \angle Obc = \angle Oac,\ \angle Oca = \angle Oba.$$

Schreibt man diese Gleichungen noch folgendermassen darunter:

$$\angle Oba = \angle Oca,\ \angle Ocb = \angle Oab,\ \angle Oac = \angle Obc,$$
$$\angle Obc = \angle Oac,\ \angle Oca = \angle Oba,\ \angle Oab = \angle Ocb;$$

und addirt die unter einander stehenden, so hat man:

Digitized by Google

$$\angle Oab + \angle abc = \angle bca + \angle Oac = 1R,$$
$$\angle Obc + \angle bca = \angle cab + \angle Oba = 1R,$$
$$\angle Oca + \angle cab = \angle abc + \angle Ocb = 1R.$$

Daher ist O für das Dreieck abc der Höhenpunkt, folglich:

$$Oa \perp bc, \quad OD \perp BC,$$
$$Ob \perp ca, \quad \text{aber auch:} \quad OE \perp CA,$$
$$Oc \perp ab; \quad OF \perp AB;$$

da nun nach der Construction

$$\angle DOa = \angle EOb = \angle FOc = \varphi,$$

so ist auch:

$$\angle (BC, bc) = \angle (CA, ca) = \angle (AB, ab) = \varphi.$$

§. 2.

Trägt man den Winkel φ nach der einen Seite (wie in Taf. VIII Fig. 1.) oder nach der andern Seite (wie in Taf. VIII. Fig. 2.) auf die angegebene Art an, so erhält man das Dreieck abc oder das Dreieck $a'b'c'$. Von diesen beiden Lösungen ist zu bemerken, dass sie congruente Dreiecke liefern; denn aus den congruenten Dreiecken

$$\Delta ObE \cong \Delta O'b'E', \ \Delta OcF \cong \Delta O'c'F', \ \Delta OaD \cong \Delta O'a'D'$$

folgt:

$$Ob = O'b', \ Oc = O'c', \ Oa = O'a';$$

aber es ist auch:

$$\angle bOc = \angle b'O'c', \ \angle cOa = \angle c'O'a', \ \angle aOb = \angle a'O'b';$$

folglich:

$$bc = b'c', \ ca = c'a', \ ab = a'b':$$

$$\text{d. h. } \Delta abc \cong \Delta a'b'c'.$$

§. 3.

Von den Kreisvierecken

$$ObAc, \ OcBa, \ OaCb$$

ist zu merken, dass die Radien der umbeschriebenen Kreise gleich sind, da nach einem bekannten Satze die Radien der Kreise, welche man durch zwei Ecken und den Höhenpunkt legt, gleich dem Radius des umbeschriebenen Kreises sind. Wendet man dies auf das Dreieck abc und seinen Höhenpunkt O an, so folgt der ausgesprochene Satz.

Für das Dreieck *ABC* kann man den Satz so aussprechen: Beschreibt man drei Kreise mit gleichen Radien, welche durch den Mittelpunkt des umbeschriebenen Kreises und eine Ecke eines Dreiecks gehen und liegt der Schnittpunkt zweier in einer Dreiecksseite, so liegen auch die andern Schnittpunkte in den Dreiecksseiten.

Oder: Wenn drei Kreise mit gleichem Radius beschrieben werden, von denen jeder durch die Ecke eines Dreiecks geht und der eine die beiden andern in einer Dreiecksseite schneidet, so schneiden sich auch diese in einer Dreiecksseite und alle drei in dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Dreiecks.

Das Minimum der Grösse dieser Radien ist der halbe Radius des umbeschriebenen Kreises; von diesem Minimum können sie bis in das Unendliche wachsen.

2) Trigonometrische Auflösung.

§. 4.

Da die Neigung der homologen Seiten $=\varphi$ ist, so ist

$$\angle Abc = C+\varphi,\ \angle Bca = A+\varphi,\ \angle Cab = B+\varphi$$

und

$$\angle Bac = C-\varphi,\ \angle Cba = A-\varphi,\ \angle Acb = B-\varphi.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$Ac = \frac{bc}{\sin A}\sin(C+\varphi),\ Ba = \frac{ca}{\sin B}\sin(A+\varphi),\ Cb = \frac{ab}{\sin C}\sin(B+\varphi)$$

und

$$Bc = \frac{ac}{\sin B}\sin(C-\varphi),\ Ca = \frac{ba}{\sin C}\sin(A-\varphi),\ Ab = \frac{cb}{\sin A}\sin(B-\varphi).$$

Da aber $\frac{bc}{\sin A} = \frac{ac}{\sin B} = \frac{ab}{\sin C}$ ist, so erhält man durch Addition

$$AB = \frac{ab}{\sin C}(\sin(C+\varphi)+\sin(C-\varphi)),\ BC = \frac{bc}{\sin A}(\sin(A+\varphi)+\sin(A-\varphi)),$$
$$= 2ab\cos\varphi \qquad\qquad = 2bc\cos\varphi$$

$$AC = \frac{ac}{\sin B}(\sin(B+\varphi)+\sin(B-\varphi));$$
$$= 2ac\cos\varphi$$

also

$$ab = \frac{AB}{2\cos\varphi},\ bc = \frac{BC}{2\cos\varphi},\ ac = \frac{AC}{2\cos\varphi}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke für die Abschnitte der Seiten des Dreiecks *ABC*, so erhält man:

Digitized by Google

$$Ac = \frac{AB\sin(C+\varphi)}{2\sin C\cos\varphi},\quad Ba = \frac{BC\sin(A+\varphi)}{2\sin A\cos\varphi},\quad Cb = \frac{CA\sin(B+\varphi)}{2\sin B\cos\varphi};$$

$$Bc = \frac{AB\sin(C-\varphi)}{2\sin C\cos\varphi},\quad Ca = \frac{BC\sin(A-\varphi)}{2\sin A\cos\varphi},\quad Ab = \frac{CA\sin(B-\varphi)}{2\sin B\cos\varphi}.$$

Setzt man in die gefundenen Ausdrücke statt φ den Winkel $360-\varphi$, so ändern sich die Seiten *ab*, *bc*, *ac* nicht, dagegen gehen die Abschnitte der Seiten *AB*, *BC*, *AC* in einander über. Für $\varphi=0$ fallen beide Lösungen zusammen. In diesem Falle ist das einbeschriebene Dreieck ein Minimum und halbirt mit seinen Ecken die Seiten des Dreiecks *ABC*.

II. Zweiter Fall.

1) Geometrische Auflösung.

§. 5.

Die Auflösung des ersten Falles beruht wesentlich auf der Eigenschaft des Höhenpunktes und des Mittelpunktes des umbeschriebenen Kreises; hier sollen die Eigenschaften eines anderen Punktes benutzt werden, der wie jene als Schnittpunkt dreier Kreise definirt werden kann.

Beschreibt man (Taf. VIII. Fig. 3.) über *AB* als Sehne einen Kreis, der in *A* die *AC*, und über *BC* einen Kreis, der in *B* die *AB* berührt; zieht dann die Scheitellinien *OA*, *OB*, *OC*, so ist

$$\angle OAC = \angle OBA = \angle OCB = x;$$

es wird daher auch ein Kreis, der durch *A*, *O* und *C* gelegt wird, die *BC* in *C* berühren.

Es werden sich also drei Kreise, welche durch zwei Ecken eines Dreiecks beschrieben werden und von denen jeder in einer andern Ecke eine andere Dreiecksseite berührt, in einem Punkte *O* schneiden, der innerhalb des Dreieckes liegt. Dieser Punkt *O* hat die Eigenschaft, dass die Scheitellinien, die sich in ihm schneiden, mit je einer Dreiecksseite gleiche Winkel bilden.

In jedem Dreiecke hat man zwei Punkte der angegebenen Eigenschaft, *O* und *O'* (Taf. VIII. Fig. 4.), deren gleiche Winkel eine Wechsellage haben und unter sich gleich sind.

Um dieses zu beweisen, wollen wir uns eines allgemeinen Satzes bedienen, dessen Beweis hier folgen soll, weil dieser Satz zwar in C. Adam's: Die merkw. Eig. d. geradl. Dr. (S. VI.) vorkommt, aber in einer andern Form ausgesprochen ist. Dieser Satz heisst:

Schneiden sich drei Scheitellinien *Aa*, *Bb*, *Cc* eines Dreiecks *ABC* in einem Punkte *O*, so dass also stattfindet:

$$Ba\,.\,Cb\,.\,Ac = Ca\,.\,Ab\,.\,Bc,$$

so schneiden sich auch diejenigen Scheitellinien *Aa'*, *Bb'*, *Cc'* in einem Punkte *O'*, für welche die Winkeltheile ihre Lage gewechselt haben.

Digitized by Google

Es finden dann nämlich folgende sechs Proportionen statt:

$$\triangle BAa : \triangle CAa' = AB.Aa : AC.Aa' = Ba : Ca',$$
$$\triangle CBb : \triangle ABb' = BC.Bb : BA.Bb' = Cb : Ab',$$
$$\triangle ACc : \triangle BCc' = CA.Cc : CB.Cc' = Ac : Bc'$$

und

$$\triangle BAa' : \triangle CAa = AB.Aa' : AC.Aa = Ba' : Ca,$$
$$\triangle CBb' : \triangle ABb = BC.Bb' : BA.Bb = Cb' : Ab,$$
$$\triangle ACc' : \triangle BCc = CA.Cc' : CB.Cc = Ac' : Bc.$$

Multiplicirt man diese sechs Proportionen, so werden die Producte der dritten und vierten Glieder gleich, man hat daher auch

$$Ba.Cb.Ac \times Ba'.Cb'.Ac' = Ca'.Ab'.Bc' \times Ca.Ab.Bc,$$

oder mit Hülfe der Voraussetzung:

$$Ba'.Cb'.Ac' = Ca'.Ab'.Bc',$$

d. h. die Scheitellinien Aa', Bb', Cc' schneiden sich in einem Punkte O'.

Für unsern speciellen Fall hat man daher:

$$\angle O'AB = \angle O'BC = \angle O'CA = x,$$

woraus folgt, dass von den drei Kreisen, welche durch je zwei Ecken des Dreiecks und den Punkt O' gelegt werden, jeder eine andere Seite in einer anderen Ecke berührt.

Ausser diesen eben bewiesenen gemeinsamen Eigenschaften der Punkte O und O' ist noch zu merken, dass die Theile, in welche das Dreieck durch die Scheitellinien des Punktes O getheilt wird, ähnlich sind den Theilen, in welche ABC durch die Scheitellinien des Punktes O' getheilt wird. Denn als Summe der Aussenwinkel der anliegenden Dreiecke ist:

$$\angle AOB = \angle(B+C), \quad \angle BOC = \angle(C+A), \quad \angle COA = \angle(A+B),$$
$$= 180 - A \qquad\qquad = 180 - B \qquad\qquad = 180 - C$$

$$\angle AO'C = \angle(B+C), \quad \angle BO'A = \angle(C+A), \quad \angle CO'B = \angle(A+B);$$
$$= 180 - A \qquad\qquad = 180 - B \qquad\qquad = 180 - C$$

daher:

$$\triangle AOB \sim \triangle AO'C, \quad \triangle BOC \sim \triangle BO'A, \quad \triangle COA \sim \triangle CO'B.$$

Auch diese Dreiecke werden noch in ähnliche Theile getheilt, woraus folgt, dass die Scheitellinien in O und O' sich unter Winkeln schneiden, welche den Dreieckswinkeln gleich sind; eine Eigenschaft, welche diese Punkte mit dem Höhenpunkte und dem Mittelpunkte des umbeschriebenen Kreises theilen.

Digitized by Google

§. 6.

Der Punkt O führt nun zu folgender Auflösung des zweiten Falles.

Man suche in dem gegebenen Dreiecke ABC (Taf. VIII. Fig. 5.) den Punkt O und ziehe OA, OB, OC; trage dann an diese Scheitellinien nach der Seite des Winkels x hin in O den gegebenen Winkel φ *) an, so dass

$$\angle AOa = \angle BOb = \angle COc = \varphi,$$

und verbinde a, b und c mit einander, so ist Δabc das verlangte Dreieck.

Auch hier ist zu beweisen:

$$1) \quad \Delta abc \sim \Delta ABC.$$

Aus der Consruction folgt:

$$\angle ObA = \angle OcB = \angle OaC = x + \varphi,$$
$$\angle OaA = \angle ObB = \angle OcC = 180 - (x + \varphi);$$

daher

$$\angle ObA + \angle OaA = \angle OcB + \angle ObB = \angle OaC + \angle OcC = 180,$$

d. h.

$$ObAa, \quad OcBb, \quad OaCc$$

sind Kreisvierecke. Man hat also

$$\angle Oab = \angle OAB, \; \angle Obc = \angle OBC, \; \angle Oca = \angle OCA$$

oder

$$\angle Oac = x, \; \angle Oba = x, \; \angle Ocb = x.$$

Addirt man die über einander stehenden Gleichungen, so findet man

$$\angle cab = \angle CAB, \; \angle abc = \angle ABC, \; \angle bca = \angle BCA,$$

was bewiesen werden sollte.

$$2) \quad \angle Aba = \angle Bcb = \angle Cac = \varphi.$$

Aus den Kreisvierecken $ObAa$, $OcBb$, $OaCc$ folgt:

$$\angle AOa = \angle Aba, \; \angle BOb = \angle Bcb, \; \angle COc = \angle Cac$$

oder

$$\angle AOa = \angle BOb = \angle COc = \varphi;$$

folglich auch:

$$\angle Aba = \angle Bcb = \angle Cac = \varphi.$$

---

*) Der Bequemlichkeit der Zeichnung wegen ist der Winkel φ in den beiden Fällen nicht von gleicher Grösse genommen.

Digitized by Google

In Beziehung auf Δabc verdient noch bemerkt zu werden, dass

$$\angle Oac = \angle Oba = \angle Ocb = x,$$

d. h. dass der Punkt O für beide Dreiecke ABC und abc dieselbe Bedeutung hat.

§. 7.

Dieser Fall lässt vier Lösungen zu, welche in den Figuren 5. und 6., 7. und 8. auf Taf. VIII. dargestellt sind, indem man in Figur 5. und 6. den Winkel φ, in Figur 7. und 8. den Winkel $360-\varphi$ auf die vorgeschriebene Art angetragen hat. Von diesen vier Lösungen liefern je zwei congruente Dreiecke, indem Δabc (Fig. 5.) $\cong \Delta a'b'c'$ (Fig. 6.) und Δabc (Fig. 7.) $\cong \Delta a'b'c'$ (Fig. 8.)

Der Beweis dieser beiden Congruenzen ist folgender.

Aus der Construction ergeben sich folgende Aehnlichkeiten:

$$\Delta AOC \sim \Delta aOc,\ \Delta BOA \sim \Delta bOa,\ \Delta COB \sim \Delta cOb;$$
$$\Delta A'O'C' \sim \Delta a'O'c',\ \Delta B'O'A' \sim \Delta b'O'a',\ \Delta C'O'B' \sim \Delta c'O'b'$$

und

$$\Delta AOa \sim \Delta A'O'a',\ \Delta BOb \sim \Delta B'O'b',\ \Delta COc \sim \Delta C'O'c'.$$

Aus den beiden ersteren ergeben sich folgende Proportionen:

$$AC:ac = OA:Oa,\ BA:ba = OB:Ob,\ CB:cb = OC:Oc;$$
$$A'C':a'c' = O'A':O'a',\ B'A':b'a' = O'B':O'b',\ C'B':c'b' = O'C':O'c';$$

und aus der dritten hat man:

$$OA:Oa = O'A':O'a',\ OB:Ob = O'B':O'b',\ OC:Oc = O'C':O'c';$$

woraus folgt:

$$AC:ac = A'C':a'c',\ BA:ba = B'A':b'a',\ CB:cb = C'B':c'b'.$$

Da aber

$$AC = A'C',\ BA = B'A',\ CB = C'B';$$

so ist auch:

$$ac = a'c',\ ba = b'a',\ cb = c'b';$$

was zu beweisen war.

2) Trigonometrische Auflösung.

§. 8.

Aus den Dreiecken AOB, BOC, COA (Taf. VIII. Fig. 3.) folgt:

$$OB\sin x = OA\sin(A-x),$$
$$OC\sin x = OB\sin(B-x),$$
$$OA\sin x = OC\sin(C-x).$$

Digitized by Google

Multiplicirt man diese drei Gleichungen, so ergiebt sich als specieller Fall eines bekannten Satzes:

$$\sin^3 x = \sin(A-x)\sin(B-x)\sin(C-x).$$

Diese Gleichung, scheinbar von höherem Grade, ist in der That nur vom ersten Grade, wenn man $\operatorname{tg} x$ als Unbekannte daraus entwickelt. Wir wollen folgenden Gang der Entwickelung einschlagen. Durch Auflösung des Productes rechts vom Gleichheitszeichen erhält man zunächst:

$$\sin^3 x = \tfrac{1}{2}\sin(A-x)[\cos(B-C) - \cos(B+C-2x)],$$

dann

$$= \tfrac{1}{4}\sin(A+B-C-x) + \tfrac{1}{4}\sin(A+C-B-x)$$
$$- \tfrac{1}{4}\sin(A+B+C-3x) - \tfrac{1}{4}\sin(B+C-A-x);$$

da aber $A+B+C=180$, so wird

$$\sin^3 x + \tfrac{1}{4}\sin 3x = \tfrac{1}{4}[\sin(2A+x) + \sin(2B+x) + \sin(2C+x)]$$
$$= \tfrac{1}{4}\cos x(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\sin x(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C).$$

Vereinigt man jetzt wieder die Summen in der Parenthese, so hat man:

$$\sin^3 x + \tfrac{1}{4}\sin 3x = \cos x \sin A \sin B \sin C$$
$$- \sin x \cos A \cos B \cos C - \tfrac{1}{4}\sin x$$

oder

$$\sin^3 x + \tfrac{1}{4}\sin 3x + \tfrac{1}{4}\sin x = \cos x \sin A \sin B \sin C$$
$$- \sin x \cos A \cos B \cos C.$$

Nun aber ist bekanntlich:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$$

also

$$\sin x = \sin^3 x + \tfrac{1}{4}\sin 3x + \tfrac{1}{4}\sin x.$$

Man erhält daher:

$$\sin x(1 + \cos A\cos B\cos C) = \cos x . \sin A \sin B \sin C,$$

und endlich:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin A \sin B \sin C}{1 + \cos A \cos B \cos C}.$$

Noch einfacher erscheint der Werth für die Cotangente, der hier abgeleitet werden soll, weil er in der Folge eine Anwendung findet.

Es ist nämlich

Digitized by Google

$$1+\cos A\cos B\cos C = 1+\cos A(-\cos A+\sin B\sin C)$$
$$= \sin^2 A + \sin B\sin C\cos A$$
$$= \sin A\sin(B+C) + \sin B\sin C\cos A$$
$$= \sin A\sin B\cos C + \sin A\sin C\cos B + \sin B\sin C\cos A.$$

Dividirt man diesen Ausdruck durch $\sin A\sin B\sin C$, so erhält man:

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C.$$

§. 9.

So einfach auch der zuletzt gefundene Ausdruck für $\operatorname{ctg} x$ ist, so ist er doch nicht für die Untersuchung geschickt, wie sich x mit den Dreieckswinkeln A, B, C ändert. Um ihn für diesen Zweck umzuformen, wollen wir $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C$ vereinigen und erhalten dann:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin B}{\sin A\sin C} + \operatorname{ctg} B,$$

und wollen dann $A = 90 - \frac{1}{2}B + \xi$ und $C = 90 - \frac{1}{2}B - \xi$ setzen Dies giebt:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin B}{\cos(\frac{1}{2}B-\xi)\cos(\frac{1}{2}B+\xi)} + \operatorname{ctg} B$$
$$= \frac{\sin B}{\cos^2\frac{1}{2}B - \sin^2\xi} + \operatorname{ctg} B,$$

wo $2\xi = A - C$ ist. Es soll nun zuerst die Veränderung von x für $\xi = 0$ oder im gleichschenkligen Dreiecke untersucht werden, für welches

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin B}{\cos^2\frac{1}{2}B} + \operatorname{ctg} B = \frac{2(1-\cos B)}{\sin B} + \operatorname{ctg} B$$
$$= \frac{2-\cos B}{\sin B}.$$

Hieraus folgt, dass $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} B$, also $x < B$, dass also x stets kleiner ist, als der Winkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks, ferner, dass $\operatorname{ctg} x$ immer positiv ist, also x im ersten Quadranten liegt.

Setzt man für B die Werthe $B=0$ und $B=180$, so wird für beide Werthe $\operatorname{ctg} x = \infty$, $x=0$; es wird also zwischen $B=0$ und $B=180$ einen Werth geben, für welchen x ein Maximum wird. Die allgemeine Methode liefert dafür die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial \operatorname{ctg} x}{\partial B} = \frac{1-2\cos B}{\sin^2 B} = 0,\ \cos B = \tfrac{1}{2},\ B = 60^\circ;$$

so dass also x für das gleichseitige Dreieck ein Maximum wird. Man erhält nämlich:

Digitized by Google

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \quad x = 30^0.$$

Dieses Resultat erscheint auch bei einer andern Betrachtung, welche weiter unten folgen soll.

Wir wollen jetzt B constant annehmen und in der Formel

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin B}{\cos^2 \frac{1}{2} B - \sin^2 \xi} + \operatorname{ctg} B$$

ξ wachsen lassen. Da angenommen wurde $C = (90 - \frac{1}{2}B) - \xi$, so wird ξ nur von 0 bis $90 - \frac{1}{2}B$ oder $\sin \xi$ von 0 bis $\cos \frac{1}{2}B$ wachsen können; es wird also auch in den ungleichwinkligen Dreiecken x stets im ersten Quadranten liegen und dabei um so kleiner werden, je grösser ξ wird.

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so kann man sagen, dass x für das gleichseitige Dreieck ein Maximum ist und um so kleiner wird, je mehr sich das Dreieck von der Regelmässigkeit entfernt. Bleibt das Dreieck gleichschenklig, so haben die Dreiecke einen gleichen Winkel x, deren Winkel an der Spitze durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}B' = \operatorname{tg}^2 30 \quad {}^{*})$$

verbunden sind.

§. 10.

Für den Punkt O' (Taf. VIII. Fig. 4.) wird man einen Winkel x finden, welcher gleich ist dem Winkel, der für den Punkt O gefunden wurde; denn man erhält dieselbe Bedingungsgleichung

$$\sin^3 x = \sin(A - x) \sin(B - x) \sin(C - x),$$

aus welcher für den Punkt O der Werth für $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$ abgeleitet wurde.

§. 11.

Um in Taf. VIII. Fig. 4. alles durch Rechnung bestimmt zu haben, wollen wir die Werthe der Scheitellinien hieher setzen. Sie sind:

$$OA = AB\frac{\sin x}{\sin A}, \quad OB = BC\frac{\sin x}{\sin B}, \quad OC = AC\frac{\sin x}{\sin C};$$

$$O'A = AC\frac{\sin x}{\sin A}, \quad O'B = AB\frac{\sin x}{\sin B}, \quad O'C = BC\frac{\sin x}{\sin C}.$$

---

*) Den Winkel $\frac{1}{2}B'$ kann man construiren, wenn man in einer Ellipse, deren Axen a und b so beschaffen sind, dass $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 30^\circ$, einen Durchmesser mit der Neigung $\frac{1}{2}B$ gegen die grosse Axe zieht und dazu den conjugirten Durchmesser sucht. Seine Neigung ist $\frac{1}{2}B'$.

Digitized by Google

Es bleibt nun noch übrig, die Grösse von OO' zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten mittels des Dreiecks BOO', aus dem sich sogleich ergiebt:

$$OO'^2 = BO^2 + BO'^2 - 2BO.BO'\cos(B-2x).$$

Da jedoch OO' in Beziehung auf die Stücke des Dreiecks eine symmetrische Function ist, so muss sie sich auch so transformiren lassen, dass sie auch die Form einer symmetrischen Function hat. Zu dem Ende wollen wir setzen:

$$BO = BC\frac{\sin x}{\sin B} = AC\frac{\sin A\sin x}{\sin^2 B},\ BO' = AB\frac{\sin x}{\sin B} = AC\frac{\sin C\sin x}{\sin^2 B}$$

und erhalten dann:

$$OO'^2 = \frac{AC^2\sin^2 x}{\sin^2 B}\left(\frac{\sin^2 A + \sin^2 C}{\sin^2 B} - \frac{2\sin A\sin C}{\sin^2 B}\cos(B-2x)\right).$$

Für $(\sin^2 A + \sin^2 C)$ kann man setzen $(\sin^2 B + 2\sin A\sin C\cos B)$, so dass

$$OO' = \frac{AC^2\sin^2 x}{\sin^2 B}\left(1 + 2\frac{\sin A\sin C(\cos B - \cos(B-2x))}{\sin^2 B}\right),$$

oder, wenn man die beiden Cosinusse vereinigt:

$$OO' = \frac{AC^2\sin^2 x}{\sin^2 B}\left(1 - 4\sin x\frac{\sin A\sin C\sin(B-x)}{\sin^2 B}\right).$$

Nun aber fanden wir

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} B = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} C$$

oder

$$\frac{\sin(B-x)}{\sin B\sin x} = \frac{\sin B}{\sin A\sin C},$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{\sin A\sin C\sin(B-x)}{\sin^2 B} = \sin x.$$

Es wird daher

$$OO'^2 = \left(\frac{AC}{\sin B}\right)^2\sin^2 x(1 - 4\sin^2 x).$$

Diese Form ist symmetrisch, da

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BA}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = 2r,$$

wo r der Radius des umbeschriebenen Kreises ist.

Digitized by Google

Um den Werth von OO' für die logarithmische Berechnung einzurichten, schreiben wir

$$OO'^2 = 16r^2(\tfrac{1}{4} - \sin^2 x)\sin^2 x,$$

und bedenken, dass $\tfrac{1}{2} = \sin 30$; dann hat man

$$\begin{aligned} OO'^2 &= 16r^2 \sin^2 x (\sin^2 30 - \sin^2 x) \\ &= 16r^2 \sin^2 x \sin(30 + x)\sin(30 - x), \end{aligned}$$

und endlich

$$OO' = 4r \sin x \sqrt{\sin(30+x)\sin(30-x)}.$$

Da OO' immer eine reelle Grösse ist, so muss $\sin(30-x)$ immer positiv, d. h.

$$x < 30^0$$

sein, ein Resultat, welches mit dem §. 9. gefundenen übereinstimmt.

§. 12.

Die Grösse der Seiten des einbeschriebenen Dreiecks (Taf. VIII. Fig. 5. und 6.) hängt von dem gegebenen Winkel φ ab. Es ist nämlich:

$$AO : aO = BO : bO = CO : cO = \sin(x+\varphi) : \sin x,$$

aber auch

$$= AC : ac = BA : ba = CB : cb.$$

Man hat also:

$$ab = AB\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)},\ bc = BC\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)},\ ac = AC\frac{\sin x}{\sin(x+\varphi)}.$$

Wird statt φ der Winkel $360 - \varphi$ genommen, so erhält man die Seiten der Dreiecke Taf. VIII. Fig. 7. und 8.; sie werden:

$$ab = AB\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)},\ bc = BC\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)},\ ac = AC\frac{\sin x}{\sin(x-\varphi)}.$$

XXVIII.

Ueber die Bestimmung eines Kegelschnitts durch fünf gegebene Punkte.

Von

dem Herausgeber.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte oder der Linien des zweiten Grades ist bekanntlich

$$1)\quad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Wenn nun

$$x_1,\ y_1;\quad x_2,\ y_2;\quad x_3,\ y_3;\quad x_4,\ y_4;\quad x_5,\ y_5$$

die Coordinaten von fünf gegebenen Punkten sind, durch welche ein Kegelschnitt beschrieben werden soll, so hat man zur Bestimmung der Coefficienten

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F;$$

deren Anzahl sich aber, wie auf der Stelle erhellet, und hier wohl kaum noch besonders erinnert zu werden braucht, eigentlich auf fünf reducirt, die folgenden fünf Gleichungen des ersten Grades:

$$2)\quad \begin{cases} Ay_1{}^2+Bx_1y_1+Cx_1{}^2+Dy_1+Ex_1+F=0, \\ Ay_2{}^2+Bx_2y_2+Cx_2{}^2+Dy_2+Ex_2+F=0, \\ Ay_3{}^2+Bx_3y_3+Cx_3{}^2+Dy_3+Ex_3+F=0, \\ Ay_4{}^2+Bx_4y_4+Cx_4{}^2+Dy_4+Ex_4+F=0, \\ Ay_5{}^2+Bx_5y_5+Cx_5{}^2+Dy_5+Ex_5+F=0; \end{cases}$$

welche also zur Bestimmung der gesuchten Coefficienten hinreichen, woraus daher ersichtlich ist, dass durch fünf gegebene Punkte ein Kegelschnitt im Allgemeinen vollkommen bestimmt wird, was auch längst bekannt ist, und sich in jedem vollständigern Lehrbuche der Theorie der Linien des zweiten Grades ausgesprochen findet.

Digitized by Google

So einfach und sich in der That ganz von selbst darbietend dies aber auch ist, so ist mir doch nicht bekannt, dass die obigen fünf Gleichungen des ersten Grades schon wirklich aufgelöst und die gesuchten Coefficienten durch die zehn gegebenen Coordinaten in völlig entwickelten Ausdrücken dargestellt worden wären, was mich veranlasst, eine von mir gefundene vollständige Auflösung dieser Aufgabe, welche allerdings, wenn man sie nicht mit einigem Geschick anfasst, in nicht geringe Weitläufigkeiten führen kann, in dem vorliegenden Aufsatze mitzutheilen, und daran zugleich noch einige andere Betrachtungen zu knüpfen.

Zuerst erhält man aus den fünf Gleichungen 2) durch Subtraction auf der Stelle die vier folgenden Gleichungen:

$$3)\quad\left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}A(y_1^2-y_2^2)+B(x_1y_1-x_2y_2)+C(x_1^2-x_2^2)\\ +D(y_1-y_2)+E(x_1-x_2)\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}A(y_2^2-y_3^2)+B(x_2y_2-x_3y_3)+C(x_2^2-x_3^2)\\ +D(y_2-y_3)+E(x_2-x_3)\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}A(y_3^2-y_4^2)+B(x_3y_3-x_4y_4)+C(x_3^2-x_4^2)\\ +D(y_3-y_4)+E(x_3-x_4)\end{array}\right\}=0,\\
\left.\begin{array}{r}A(y_4^2-y_5^2)+B(x_4y_4-x_5y_5)+C(x_4^2-x_5^2)\\ +D(y_4-y_5)+E(x_4-x_5)\end{array}\right\}=0.
\end{array}\right.$$

Ueberlegt man aber, dass überhaupt, wie man durch leichte Rechnung findet:

$$\begin{aligned}
&(u^2-u_1^2)(v_1-v_2)-(u_1^2-u_2^2)(v-v_1)\\
&=u^2(v_1-v_2)+u_1^2(v_2-v)+u_2^2(v-v_1),\\
&(uv-u_1v_1)(v_1-v_2)-(u_1v_1-u_2v_2)(v-v_1)\\
&=uv(v_1-v_2)+u_1v_1(v_2-v)+u_2v_2(v-v_1),\\
&(v^2-v_1^2)(v_1-v_2)-(v_1^2-v_2^2)(v-v_1)\\
&=-(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v),\\
&(u-u_1)(v_1-v_2)-(u_1-u_2)(v-v_1)\\
&=u(v_1-v_2)+u_1(v_2-v)+u_2(v-v_1)
\end{aligned}$$

ist, so wird man sich leicht von der Richtigkeit der drei folgenden Gleichungen überzeugen:

$$4)$$

$$\left.\begin{array}{l}
A\{y_1^2(x_2-x_3)+y_2^2(x_3-x_1)+y_3^2(x_1-x_2)\}\\
+B\{x_1y_1(x_2-x_3)+x_2y_2(x_3-x_1)+x_3y_3(x_1-x_2)\}\\
-C(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\\
+D\{y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)\}
\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}
A\{y_2^2(x_3-x_4)+y_3^2(x_4-x_2)+y_4^2(x_2-x_3)\}\\
+B\{x_2y_2(x_3-x_4)+x_3y_3(x_4-x_2)+x_4y_4(x_2-x_3)\}\\
-C(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
+D\{y_2(x_3-x_4)+y_3(x_4-x_2)+y_4(x_2-x_3)\}
\end{array}\right\}=0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} A\{y_3^2(x_4-x_5)+y_4^2(x_5-x_3)+y_5^2(x_3-x_4)\} \\ +B\{x_3y_3(x_4-x_5)+x_4y_4(x_5-x_3)+x_5y_5(x_3-x_4)\} \\ -C(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3) \\ +D\{y_3(x_4-x_5)+y_4(x_5-x_3)+y_5(x_3-x_4)\} \end{array}\right\}=0.$$

Nun ist aber, wie man leicht findet, allgemein:

$$\begin{array}{l} \{u(v_1-v_2)+u_1(v_2-v)+u_2(v-v_1)\}(v_1-v_2)(v_2-v_3)(v_3-v_1) \\ -\{u_1(v_2-v_3)+u_2(v_3-v_1)+u_3(v_1-v_2)\}(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v) \\ =(v_1-v_2)\left\{\begin{array}{l} u(v_1-v_2)(v_2-v_3)(v_3-v_1) \\ -u_1(v_2-v_3)(v_3-v)(v-v_2) \\ +u_2(v_3-v)(v-v_1)(v_1-v_3) \\ -u_3(v-v_1)(v_1-v_2)(v_2-v) \end{array}\right\}, \end{array}$$

und man hat daher die beiden folgenden Gleichungen:

5)

$$\left.\begin{array}{l} A\left\{\begin{array}{l} y_1^2(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \\ -y_2^2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3) \\ +y_3^2(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4) \\ -y_4^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) \end{array}\right\} \\ +B\left\{\begin{array}{l} x_1y_1(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \\ -x_2y_2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3) \\ +x_3y_3(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4) \\ -x_4y_4(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) \end{array}\right\} \\ +D\left\{\begin{array}{l} y_1(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \\ -y_2(x_3-x_4)(x_4-x_1)(x_1-x_3) \\ +y_3(x_4-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_4) \\ -y_4(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1) \end{array}\right\} \end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A\left\{\begin{array}{l} y_2^2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3) \\ -y_3^2(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4) \\ +y_4^2(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5) \\ -y_5^2(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \end{array}\right\} \\ +B\left\{\begin{array}{l} x_2y_2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3) \\ -x_3y_3(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4) \\ +x_4y_4(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5) \\ -x_5y_5(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \end{array}\right\} \\ +D\left\{\begin{array}{l} y_2(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3) \\ -y_3(x_4-x_5)(x_5-x_2)(x_2-x_4) \\ +y_4(x_5-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_5) \\ -y_5(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2) \end{array}\right\} \end{array}\right\}=0.$$

Der Kürze wegen wollen wir diese beiden Gleichungen durch

Digitized by Google

$$6)\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A(py_1^2-qy_2^2+ry_3^2-sy_4^2)\\+B(px_1y_1-qx_2y_2+rx_3y_3-sx_4y_4)\\+D(py_1-qy_2+ry_3-sy_4)\end{array}\right\}=0,\\ \left.\begin{array}{l}A(p_1y_2^2-q_1y_3^2+r_1y_4^2-py_5^2)\\+B(p_1x_2y_2-q_1x_3y_3+r_1x_4y_4-px_5y_5)\\+D(p_1y_2-q_1y_3+r_1y_4-py_5)\end{array}\right\}=0\end{array}\right.$$

bezeichnen, wo die Bedeutung der Symbole

$$p,\ q,\ r,\ s,\ p_1,\ q_1,\ r_1$$

aus der Vergleichung mit dem Vorhergehenden von selbst erhellen wird.

Entwickeln wir nun durch gewöhnliche Multiplication die Grösse

$$(py_1^2-qy_2^2+ry_3^2-sy_4^2)(p_1y_2-q_1y_3+r_1y_4-py_5)$$
$$-(p_1y_2^2-q_1y_3^2+r_1y_4^2-py_5^2)(py_1-qy_2+ry_3-sy_4),$$

so erhalten wir für dieselbe nach einigen leichten Reductionen den Ausdruck:

$$\begin{array}{l}y_1y_2(y_1-y_2)pp_1\\-y_1y_3(y_1-y_3)pq_1\\+y_1y_4(y_1-y_4)pr_1\\-y_1y_5(y_1-y_5)pp\\+y_2y_3(y_2-y_3)(qq_1-rp_1)\\-y_2y_4(y_2-y_4)(qr_1-sp_1)\\+y_2y_5(y_2-y_5)pq\\+y_3y_4(y_3-y_4)(rr_1-sq_1)\\-y_3y_5(y_3-y_5)pr\\+y_4y_5(y_4-y_5)ps.\end{array}$$

Nun ist aber, wie man ebenfalls mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{array}{l}qq_1-rp_1=p(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1),\\qr_1-sp_1=p(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1),\\rr_1-sq_1=p(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1);\end{array}$$

und für die obige Grösse, welche wir der Kürze wegen durch Q bezeichnen wollen, erhält man also den folgenden Ausdruck:

$$7)\quad Q=\begin{array}{l}py_1y_2(y_1-y_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\-py_1y_3(y_1-y_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\+py_1y_4(y_1-y_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\-py_1y_5(y_1-y_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\+py_2y_3(y_2-y_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\-py_2y_4(y_2-y_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\+py_2y_5(y_2-y_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\+py_3y_4(y_3-y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\-py_3y_5(y_3-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\+py_4y_5(y_4-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).\end{array}$$

Digitized by Google

Entwickelt man ferner auch die Grösse

$$(px_1y_1 - qx_2y_2 + rx_3y_3 - sx_4y_4)(p_1y_2 - q_1y_3 + r_1y_4 - py_5)$$
$$-(p_1x_2y_2 - q_1x_3y_3 + r_1x_4y_4 - px_5y_5)(py_1 - qy_2 + ry_3 - sy_4)$$

durch gemeine Multiplication, so erhält man für dieselbe nach einigen leichten Reductionen den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&y_1y_2(x_1-x_2)pp_1\\
&-y_1y_3(x_1-x_3)pq_1\\
&+y_1y_4(x_1-x_4)pr_1\\
&-y_1y_5(x_1-x_5)pp\\
&+y_2y_3(x_2-x_3)(qq_1-rp_1)\\
&-y_2y_4(x_2-x_4)(qr_1-sp_1)\\
&+y_2y_5(x_2-x_5)pq\\
&+y_3y_4(x_3-x_4)(rr_1-sq_1)\\
&-y_3y_5(x_3-x_5)pr\\
&+y_4y_5(x_4-x_5)ps.
\end{aligned}$$

Führt man aber in diesen Ausdruck der obigen Grösse, welche wir der Kürze wegen durch P bezeichnen wollen, die schon vorher gefundenen Ausdrücke von

$$qq_1 - rp_1,\ qr_1 - sp_1,\ rr_1 - sq_1$$

und auch für die übrigen Grössen ihre aus dem Obigen bekannten Ausdrücke ein, so erhält man für P den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
8)\ P=\ &py_1y_2(x_1-x_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&-py_1y_3(x_1-x_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
&+py_1y_4(x_1-x_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
&-py_1y_5(x_1-x_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&+py_2y_3(x_2-x_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_2y_4(x_2-x_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_2y_5(x_2-x_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
&+py_3y_4(x_3-x_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_3y_5(x_3-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
&+py_4y_5(x_4-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 6) haben wir nun offenbar die Gleichung:

$$9)\ AQ + BP = 0.$$

Entwickelt man ferner die Grösse

$$(py_1^2 - qy_2^2 + ry_3^2 - sy_4^2)(p_1x_2y_2 - q_1x_3y_3 + r_1x_4y_4 - px_5y_5)$$
$$-(p_1y_2^2 - q_1y_3^2 + r_1y_4^2 - py_5^2)(px_1y_1 - qx_2y_2 + rx_3y_3 - sx_4y_4)$$

durch gemeine Multiplication, so erhält man für dieselbe den Ausdruck:

$$\begin{aligned}
&-y_1y_2(x_1y_2-x_2y_1)pp_1\\
&+y_1y_3(x_1y_3-x_3y_1)pq_1\\
&-y_1y_4(x_1y_4-x_4y_1)pr_1\\
&+y_1y_5(x_1y_5-x_5y_1)pp\\
&-y_2y_3(x_2y_3-x_3y_2)(qq_1-rp_1)\\
&+y_2y_4(x_2y_4-x_4y_2)(qr_1-sp_1)\\
&-y_2y_5(x_2y_5-x_5y_2)pq\\
&-y_3y_4(x_3y_4-x_4y_3)(rr_1-sq_1)\\
&+y_3y_5(x_3y_5-x_5y_3)pr\\
&-y_4y_5(x_4y_5-x_5y_4)ps,
\end{aligned}$$

und wenn wir nun wieder alle erforderlichen Substitutionen vornehmen, die obige Grösse aber der Kürze wegen durch S bezeichnen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
10)\quad S=&-py_1y_2(x_1y_2-x_2y_1).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
&+py_1y_3(x_1y_3-x_3y_1).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
&-py_1y_4(x_1y_4-x_4y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
&+py_1y_5(x_1y_5-x_5y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
&-py_2y_3(x_2y_3-x_3y_2).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_2y_4(x_2y_4-x_4y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
&-py_2y_5(x_2y_5-x_5y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
&-py_3y_4(x_3y_4-x_4y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
&+py_3y_5(x_3y_5-x_5y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
&-py_4y_5(x_4y_5-x_5y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1).
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen 6) haben wir aber, wie sogleich in die Augen fallen wird, die Gleichung

$$11)\quad AS-DP=0.$$

Aus den Gleichungen 9) und 11) ergiebt sich

$$\frac{A}{P}=-\frac{B}{Q}=\frac{D}{S},$$

und man kann also offenbar

$$A=P,\ B=-Q,\ D=S$$

setzen. Weil aber die drei Grössen P, Q, S den gemeinschaftlichen Factor p haben, so ist klar, dass wir, wenn kürzer

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
12)\ P' = {} & y_1y_2(x_1-x_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& -y_1y_3(x_1-x_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_4(x_1-x_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_5(x_1-x_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& +y_2y_3(x_2-x_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_4(x_2-x_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_5(x_2-x_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_3y_4(x_3-x_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_3y_5(x_3-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_4y_5(x_4-x_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1),
\end{aligned}
$$

ferner

$$
\begin{aligned}
13)\ Q' = {} & y_1y_2(y_1-y_2).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& -y_1y_3(y_1-y_3).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_4(y_1-y_4).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_5(y_1-y_5).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& +y_2y_3(y_2-y_3).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_4(y_2-y_4).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_5(y_2-y_5).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_3y_4(y_3-y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_3y_5(y_3-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& +y_4y_5(y_4-y_5).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
14)\ S' = {} & -y_1y_2(x_1y_2-x_2y_1).(x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\
& +y_1y_3(x_1y_3-x_3y_1).(x_2-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_2)\\
& -y_1y_4(x_1y_4-x_4y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_2)\\
& +y_1y_5(x_1y_5-x_5y_1).(x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\
& -y_2y_3(x_2y_3-x_3y_2).(x_1-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_2y_4(x_2y_4-x_4y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_5)(x_5-x_1)\\
& -y_2y_5(x_2y_5-x_5y_2).(x_1-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_1)\\
& -y_3y_4(x_3y_4-x_4y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_5)(x_5-x_1)\\
& +y_3y_5(x_3y_5-x_5y_3).(x_1-x_2)(x_2-x_4)(x_4-x_1)\\
& -y_4y_5(x_4y_5-x_5y_4).(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)
\end{aligned}
$$

gesetzt wird, auch

$$15)\ A=P',\ B=-Q',\ D=S'$$

setzen können.

Aus der Form der Gleichung 1) geht nun auf der Stelle und ganz von selbst hervor, dass sich die Werthe von C und E ergeben müssen, wenn respective in den Ausdrücken von A und D die Symbole x und y gegen einander vertauscht werden. Setzen wir also:

$$
\begin{aligned}
16)\quad R' = \;& x_1x_2(y_1-y_2).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
& -x_1x_3(y_1-y_3).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
& +x_1x_4(y_1-y_4).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
& -x_1x_5(y_1-y_5).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\
& +x_2x_3(y_2-y_3).(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\
& -x_2x_4(y_2-y_4).(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\
& +x_2x_5(y_2-y_5).(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\
& +x_3x_4(y_3-y_4).(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\
& -x_3x_5(y_3-y_5).(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\
& +x_4x_5(y_4-y_5).(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
17)\quad T' = \;& x_1x_2(x_1y_2-x_2y_1).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
& -x_1x_3(x_1y_3-x_3y_1).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
& +x_1x_4(x_1y_4-x_4y_1).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
& -x_1x_5(x_1y_5-x_5y_1).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\
& +x_2x_3(x_2y_3-x_3y_2).(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)\\
& -x_2x_4(x_2y_4-x_4y_2).(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)\\
& +x_2x_5(x_2y_5-x_5y_2).(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)\\
& +x_3x_4(x_3y_4-x_4y_3).(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)\\
& -x_3x_5(x_3y_5-x_5y_3).(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)\\
& +x_4x_5(x_4y_5-x_5y_4).(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1),
\end{aligned}
$$

wo R' aus P', T' aus S' durch Vertauschung der Symbole x und y gegen einander erhalten wird, so ist

$$18)\quad C=R',\; E=T'.$$

Aus der Gleichung 1) geht zwar auch von selbst hervor, dass der Ausdruck von B, d. h. die Grösse Q', ungeändert bleiben muss, wenn man die Symbole x und y gegen einander vertauscht; da es jedoch interessant ist, dies auch auf dem Wege der Rechnung nachgewiesen zu sehen, so wollen wir diese Entwickelung jetzt noch geben.

Zuvörderst überzeugt man sich durch ganz einfache Rechnung, dass überhaupt

$$
\begin{aligned}
&(u-v)(v-w)(w-u)\\
&=-\{uv(u-v)+vw(v-w)+wu(w-u)\}
\end{aligned}
$$

ist. Also ist nach 13):

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
Q' = & -y_1y_2(y_1-y_2)\{x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_3(x_5-x_3)\} \\
& +y_1y_3(y_1-y_3)\{x_2x_4(x_2-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_2(x_5-x_2)\} \\
& -y_1y_4(y_1-y_4)\{x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_5(x_3-x_5)+x_5x_2(x_5-x_2)\} \\
& +y_1y_5(y_1-y_5)\{x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_2(x_4-x_2)\} \\
& -y_2y_3(y_2-y_3)\{x_1x_4(x_1-x_4)+x_4x_5(x_4-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\} \\
& +y_2y_4(y_2-y_4)\{x_1x_3(x_1-x_3)+x_3x_5(x_3-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\} \\
& -y_2y_5(y_2-y_5)\{x_1x_3(x_1-x_3)+x_3x_4(x_3-x_4)+x_4x_1(x_4-x_1)\} \\
& -y_3y_4(y_3-y_4)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_5(x_2-x_5)+x_5x_1(x_5-x_1)\} \\
& +y_3y_5(y_3-y_5)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_4(x_2-x_4)+x_4x_1(x_4-x_1)\} \\
& -y_4y_5(y_4-y_5)\{x_1x_2(x_1-x_2)+x_2x_3(x_2-x_3)+x_3x_1(x_3-x_1)\},
\end{aligned}
$$

und folglich, wie leicht erhellen wird:

$$
\begin{aligned}
Q' = & -x_1x_2(x_1-x_2)\{y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_3(y_5-y_3)\} \\
& +x_1x_3(x_1-x_3)\{y_2y_4(y_2-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_2(y_5-y_2)\} \\
& -x_1x_4(x_1-x_4)\{y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_5(y_3-y_5)+y_5y_2(y_5-y_2)\} \\
& +x_1x_5(x_1-x_5)\{y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_2(y_4-y_2)\} \\
& -x_2x_3(x_2-x_3)\{y_1y_4(y_1-y_4)+y_4y_5(y_4-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\} \\
& +x_2x_4(x_2-x_4)\{y_1y_3(y_1-y_3)+y_3y_5(y_3-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\} \\
& -x_2x_5(x_2-x_5)\{y_1y_3(y_1-y_3)+y_3y_4(y_3-y_4)+y_4y_1(y_4-y_1)\} \\
& -x_3x_4(x_3-x_4)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_5(y_2-y_5)+y_5y_1(y_5-y_1)\} \\
& +x_3x_5(x_3-x_5)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_4(y_2-y_4)+y_4y_1(y_4-y_1)\} \\
& -x_4x_5(x_4-x_5)\{y_1y_2(y_1-y_2)+y_2y_3(y_2-y_3)+y_3y_1(y_3-y_1)\};
\end{aligned}
$$

daher ist nach der obigen allgemeinen Relation:

$$
\begin{aligned}
Q' = & \quad x_1x_2(x_1-x_2).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3) \\
& -x_1x_3(x_1-x_3).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2) \\
& +x_1x_4(x_1-x_4).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2) \\
& -x_1x_5(x_1-x_5).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2) \\
& +x_2x_3(x_2-x_3).(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1) \\
& -x_2x_4(x_2-x_4).(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1) \\
& +x_2x_5(x_2-x_5).(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1) \\
& +x_3x_4(x_3-x_4).(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1) \\
& -x_3x_5(x_3-x_5).(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1) \\
& +x_4x_5(x_4-x_5).(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1).
\end{aligned}
$$

Vergleicht man aber diesen Ausdruck der Grösse Q' mit dem Ausdrucke 13) dieser Grösse, so erhellet auf der Stelle, dass der letztere ungeändert bleibt, wenn man die Symbole x und y gegen einander vertauscht.

Digitized by Google

Wenn auch im Vorhergehenden

$$A=P',\ B=-Q',\ C=R',\ D=S',\ E=T'$$

gesetzt worden ist, so ist doch zu bemerken, dass dies nur der Kürze wegen geschehen, und allerdings eigentlich bloss

$$A:B:C:D:E=P':-Q':R':S':T'$$

ist.

Dividiren wir nun aber die Gleichung 1) durch y^2, so erhalten wir

$$A+B\frac{x}{y}+C\frac{x^2}{y^2}+D\frac{1}{y}+E\frac{x}{y^2}+F\frac{1}{y^2}=0,$$

also, wie leicht erhellet:

$$F\left(\frac{1}{y}\right)^2+E\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}+C\left(\frac{x}{y}\right)^2+D\frac{1}{y}+B\frac{x}{y}+A=0.$$

Vergleicht man aber diese Gleichung mit der Gleichung 1), so wird auf der Stelle erhellen, dass man das Verhältniss

$$F:C$$

aus dem vorher gefundenen Verhältnisse

$$A:C=P':R'$$

erhält, wenn man in letzterem für die Symbole x, y respective $\frac{x}{y}$, $\frac{1}{y}$ setzt. Dadurch ergiebt sich

$$\begin{aligned}
F:C= & \frac{1}{y_1y_2}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\cdot\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_3}{y_3}\right)\\
& -\frac{1}{y_1y_3}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
& +\frac{1}{y_1y_4}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
& -\frac{1}{y_1y_5}\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_2}{y_2}\right)\\
& +\frac{1}{y_2y_3}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
& -\frac{1}{y_2y_4}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
& +\frac{1}{y_2y_5}\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
& +\frac{1}{y_3y_4}\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_4}{y_4}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_5}{y_5}\right)\left(\frac{x_5}{y_5}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
& -\frac{1}{y_3y_5}\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_4}{y_4}\right)\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_1}{y_1}\right)\\
& +\frac{1}{y_4y_5}\left(\frac{x_4}{y_4}-\frac{x_5}{y_5}\right)\cdot\left(\frac{x_1}{y_1}-\frac{x_2}{y_2}\right)\left(\frac{x_2}{y_2}-\frac{x_3}{y_3}\right)\left(\frac{x_3}{y_3}-\frac{x_1}{y_1}\right)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
: \ & \frac{x_1x_2}{y_1y_2}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right).\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_3}\right)\\
-&\frac{x_1x_3}{y_1y_3}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_2}\right)\\
+&\frac{x_1x_4}{y_1y_4}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_2}\right)\\
-&\frac{x_1x_5}{y_1y_5}\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_2}\right)\\
+&\frac{x_2x_3}{y_2y_3}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
-&\frac{x_2x_4}{y_2y_4}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
+&\frac{x_2x_5}{y_2y_5}\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_1}\right)\\
+&\frac{x_3x_4}{y_3y_4}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_4}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_5}\right)\left(\frac{1}{y_5}-\frac{1}{y_1}\right)\\
-&\frac{x_3x_5}{y_3y_5}\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_4}\right)\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_1}\right)\\
+&\frac{x_4x_5}{y_4y_5}\left(\frac{1}{y_4}-\frac{1}{y_5}\right).\left(\frac{1}{y_1}-\frac{1}{y_2}\right)\left(\frac{1}{y_2}-\frac{1}{y_3}\right)\left(\frac{1}{y_3}-\frac{1}{y_1}\right).
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man nun die beiden Glieder des zweiten Verhältnisses mit

$$y_1^2y_2^2y_3^2y_4^2y_5^2,$$

so erhält man:

$$
\begin{aligned}
F:C= \ & (x_1y_2-x_2y_1).(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
-&(x_1y_3-x_3y_1).(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
+&(x_1y_4-x_4y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
-&(x_1y_5-x_5y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
+&(x_2y_3-x_3y_2).(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
-&(x_2y_4-x_4y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
+&(x_2y_5-x_5y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
+&(x_3y_4-x_4y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
-&(x_3y_5-x_5y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
+&(x_4y_5-x_5y_4).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
: \ & x_1x_2(y_1-y_2).(y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\
-&x_1x_3(y_1-y_3).(y_2-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_2)\\
+&x_1x_4(y_1-y_4).(y_2-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_2)\\
-&x_1x_5(y_1-y_5).(y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+x_2x_3(y_2-y_3).(y_1-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_1)$$
$$-x_2x_4(y_2-y_4).(y_1-y_3)(y_3-y_5)(y_5-y_1)$$
$$+x_2x_5(y_2-y_5).(y_1-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_1)$$
$$+x_3x_4(y_3-y_4).(y_1-y_2)(y_2-y_5)(y_5-y_1)$$
$$-x_3x_5(y_3-y_5).(y_1-y_2)(y_2-y_4)(y_4-y_1)$$
$$+x_4x_5(y_4-y_5).(y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)$$

d. i. nach 16), wenn wir

$$
\begin{aligned}
19)\quad U' = \;& (x_1y_2-x_2y_1).(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
&-(x_1y_3-x_3y_1).(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&+(x_1y_4-x_4y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&-(x_1y_5-x_5y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
&+(x_2y_3-x_3y_2).(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_2y_4-x_4y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&+(x_2y_5-x_5y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_3y_4-x_4y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_3y_5-x_5y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_4y_5-x_5y_4).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)
\end{aligned}
$$

setzen:

$$F:C=U':R';$$

und weil nun nach dem Obigen $C=R'$ ist, so ist

$$20)\quad F=U'.$$

Also sind jetzt alle sechs Coefficienten der Gleichung

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

des durch die fünf gegebenen Punkte, deren Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4; x_5, y_5 sind, gehenden Kegelschnitts durch die Formeln 15), 18), 20) mit Bezug auf die Formeln 12), 13), 14), 16), 17), 19) vollständig bestimmt.

Wenn sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen sollen, so denke man sich den einen derselben als Anfang der Coordinaten angenommen, und bezeichne die Coordinaten der fünf anderen Punkte wie vorher durch

$$x_1, y_1;\; x_2, y_2;\; x_3, y_3;\; x_4, y_4;\; x_5, y_5.$$

Ist nun

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

die Gleichung des durch die sechs gegebenen Punkte gehenden Kegelschnitts, so erhält man natürlich für

Digitized by Google

$$A, B, C, D, E, F$$

ganz dieselben Werthe wie vorher, weil dieser Kegelschnitt durch die fünf Punkte

$$(x_1y_1), (x_2y_2), (x_3y_3), (x_4y_4), (x_5y_5)$$

geht. Weil derselbe aber auch durch den als Anfang der Coordinaten angenommenen sechsten Punkt gehen soll, so muss die Gleichung

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

auch für $x=0$, $y=0$ erfüllt sein, d. h. es muss $F=0$, folglich nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}
21)\ 0=&(x_1y_2-x_2y_1).(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_3-x_3y_5)\\
&-(x_1y_3-x_3y_1).(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&+(x_1y_4-x_4y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_2-x_2y_5)\\
&-(x_1y_5-x_5y_1).(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_2-x_2y_4)\\
&+(x_2y_3-x_3y_2).(x_1y_4-x_4y_1)(x_4y_5-x_5y_4)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_2y_4-x_4y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_5-x_5y_3)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&+(x_2y_5-x_5y_2).(x_1y_3-x_3y_1)(x_3y_4-x_4y_3)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_3y_4-x_4y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_5-x_5y_2)(x_5y_1-x_1y_5)\\
&-(x_3y_5-x_5y_3).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_4-x_4y_2)(x_4y_1-x_1y_4)\\
&+(x_4y_5-x_5y_4).(x_1y_2-x_2y_1)(x_2y_3-x_3y_2)(x_3y_1-x_1y_3)
\end{aligned}$$

sein, welches also überhaupt die Bedingungsgleichung ist, die Statt finden muss, wenn die sechs gegebenen Punkte in einem Kegelschnitte liegen sollen.

Wenn wir die sechs gegebenen Punkte durch M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 bezeichnen, und

$$M_0,\ M_i,\ M_k$$

der Punkt M_0 und zwei beliebige andere Punkte M_i und M_k dieses Systems von sechs Punkten sind; so ist nach Archiv. Thl. III. S. 263. unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$x_iy_k-x_ky_i$$

der positiv oder negativ genommene doppelte Flächeninhalt des Dreiecks

$$M_0\ M_i\ M_k,$$

jenachdem man sich, um von dem Punkte M_0 durch den Punkt M_i zu dem Punkte M_k zu gelangen, nach derselben Richtung, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der x durch den rechten Winkel (xy) hindurch zu dem positiven Theile der Axe der y zu gelangen, oder nach der entgegengesetzten Richtung hin bewegen muss. Bezeichnen wir also

überhaupt den, jenachdem man sich, um von dem Punkte M_0 durch den Punkt M_i zu dem Punkte M_k zu gelangen, nach der einen oder nach der andern Seite hin bewegen muss, positiv oder negativ genommenen einfachen Flächeninhalt des Dreiecks $M_0 M_i M_k$ durch

$$\Delta_{0,i,k};$$

so ist nach 21) offenbar

$$
\begin{aligned}
22)\ 0 = \; & \Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,3}\\
& -\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,2}\\
& +\Delta_{0,1,4}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,5,2}\\
& -\Delta_{0,1,5}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,2}\\
& +\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,1,4}\cdot\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& -\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& +\Delta_{0,2,5}\cdot\Delta_{0,1,3}\cdot\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,4,1}\\
& +\Delta_{0,3,4}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,5}\cdot\Delta_{0,5,1}\\
& -\Delta_{0,3,5}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,4}\cdot\Delta_{0,4,1}\\
& +\Delta_{0,4,5}\cdot\Delta_{0,1,2}\cdot\Delta_{0,2,3}\cdot\Delta_{0,3,1}
\end{aligned}
$$

die Bedingungsgleichung, dass die sechs gegebenen Punkte in einem Kegelschnitte liegen.

Das Gesetz, nach welchem die Glieder dieser Gleichung gebildet sind, fällt auf der Stelle in die Augen und wird hier einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen.

Welchen der sechs gegebenen Punkte man für den Punkt M_0 setzen, und in welcher Ordnung man überhaupt die sechs gegebenen Punkte nehmen will, ist natürlich ganz willkührlich, was hier ebenfalls nicht weiter erläutert zu werden braucht. Die obige merkwürdige Gleichung findet ganz allgemein für jede sechs Punkte eines Kegelschnitts Statt, in welcher Ordnung man dieselben auch nehmen mag, und enthält daher zugleich eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft der Kegelschnitte.

Welche Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn der durch die fünf gegebenen Punkte

$$(x_1 y_1),\ (x_2 y_2),\ (x_3 y_3),\ (x_4 y_4),\ (x_5 y_5)$$

gehende Kegelschnitt eine Parabel, eine Ellipse oder eine Hyperbel sein soll, kann hier als aus der allgemeinen Theorie der Linien des zweiten Grades hinreichend bekannt vorausgesetzt werden, und soll für jetzt der Kürze wegen hier nicht weiter ausgeführt werden, wenngleich sich uns hierdurch noch Gelegenheit zu manchen andern Entwickelungen darbieten würde.

Eine der obigen ähnliche Bearbeitung der Aufgabe, durch neun Punkte im Raume eine Fläche des zweiten Grades zu legen, und die Entwickelung der Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn zehn Punkte im Raume in einer Fläche des zweiten Grades liegen sol-

Digitized by Google

len, oder wenn sich durch zehn gegebene Punkte im Raume eine Fläche des zweiten Grades legen lassen soll, hoffe ich der vorliegenden Abhandlung über die Linien des zweiten Grades späterhin nachfolgen lassen zu können. Vielleicht aber findet sich auch, was mir sehr lieb sein soll, einer der geehrten Leser des Archivs durch das Obige veranlasst, die genannte Aufgabe über die Flächen des zweiten Grades nach einer ähnlichen Methode zu bearbeiten, wie oben die einfachere analoge Aufgabe über die Linien des zweiten Grades bearbeitet worden ist. Sollte mir vielleicht ein desfallsiger Aufsatz zur Einrückung in's Archiv gütigst mitgetheilt werden, so werde ich für dessen möglichst baldigen Abdruck, wenn er mir überhaupt seinem Zwecke zu entsprechen scheint, Sorge tragen.

XXIX.

Zur Theorie des Integrallogarithmus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Unter die bemerkenswerthesten Eigenschaften des Integrallogarithmus darf man vielleicht die folgende, wie es scheint, noch nicht bekannte zählen, dass sich die Differenz

$$li(e^u) - li(e^{\frac{1}{u}})$$

immer in eine Reihe von der Form

$$\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots,$$

verwandeln lässt, wobei jedoch die Coeffizienten P für positive und negative u nicht dieselben sind. Um diess zu zeigen, gehen wir von der Aufgabe aus, die Funktion $e^{a\sqrt{1+x}}$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln, wovon die Lösung sehr leicht ist, wenn man in dem Taylorschen Theoreme

$$f(x+x)=f(x)+\frac{f'(x)}{1}x+\frac{f''(x)}{1.2}x^2+\ldots.$$

Digitized by Google

$f(z) = e^{a\sqrt{z}}$ und $x = 1$ nimmt. Es wird dann unter Anwendung einer Formel, welche ich in meiner Differenzialrechnung S. 93. bewiesen habe,

$$f^{(n)}(z) = \frac{\partial^n (e^{a\sqrt{z}})}{\partial z^n} =$$

$$\left(\frac{a}{2\sqrt{z}}\right)^n \left[1 - \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right) + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{(n+2)(n+1)\ldots.(n-3)}{2.4.6}\left(\frac{1}{a\sqrt{z}}\right)^3 + \ldots.\right] e^{a\sqrt{z}},$$

woraus für $z = 1$ und nach Division mit $1.2.3.\ldots n$ folgt, dass der Coeffizient von x^n, den wir mit Q_{2n} bezeichnen wollen, durch die Formel

$$Q_{2n} = \frac{a^n e^a}{2.4.6.\ldots.(2n)}\left[1 - \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{1}{a} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}\cdot\frac{1}{a^2} \right.$$
$$\left. - \frac{(n+2)(n+1)\ldots.(n-3)}{2.4.6}\cdot\frac{1}{a^3} + \ldots\ldots\right] \qquad (1)$$

ausgedrückt wird, und demnach für die so bestimmten Werthe von Q

$$e^{a\sqrt{1+x}} = Q_0 + Q_2 x + Q_4 x^2 + Q_6 x^3 + \ldots,$$

oder wenn man x^2 für x schreibt:

$$e^{a\sqrt{1+x^2}} = Q_0 + Q_2 x^2 + Q_4 x^4 + Q_6 x^6 + \ldots. \qquad (2)$$

ist. Die Gränzen für die Gültigkeit dieses Resultates sind leicht mittelst des Cauchy'schen Theoremes a priori abzusehen. Die Differenzialquotienten der Funktion $e^{\sqrt{1+x^2}}$ sind nämlich Brüche, welche verschiedene Potenzen von $1 + x^2$ zu Nennern haben und daher für $x = 1.\sqrt{-1}$ unstetig und unendlich werden; es muss daher der Modulus von x kleiner als der Modulus 1 desjenigen x sein, für welches die Discontinuität eintritt. Die Gültigkeit der Gleichung (2) ist daher an die Bedingung

$$1 > \text{mod}\, x > -1$$

geknüpft. Diess sieht man auch leicht a posteriori ein; nähme man z. B. $x = (1 + \omega)\sqrt{-1}$, wo ω eine positive Grösse ist, so würde die linke Seite in

$$e^{a\sqrt{2\omega+\omega^2}\sqrt{-1}} = \cos[a\sqrt{2\omega+\omega^2}] + \sqrt{-1}\sin[a\sqrt{2\omega+\omega^2}]$$

übergeben, und da die rechte Seite reell bleibt, so würde durch Vergleichung der reellen und imaginären Partieen das völlig absurde Resultat

$$\sin[a\sqrt{2\omega+\omega^2}] = 0$$

Digitized by Google

herauskommen. — Differenziren wir nun die Gleichung (2) nach x, so ergiebt sich für $1 > \operatorname{mod} x > -1$

$$\frac{a}{\sqrt{1+x^2}} e^{a\sqrt{1+x^2}} = 2Q_2 + 4Q_4 x^2 + 6Q_6 x^4 + \dots \qquad (3)$$

und diese Gleichung werde Seite für Seite mit der folgenden multiplizirt:

$$\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} = 1 + \frac{a^2 x^2}{1.2} + \frac{a^4 x^4}{1.2.3.4} + \dots.$$

Man findet so ohne Schwierigkeit:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{2\sqrt{1+x^2}} [e^{a(\sqrt{1+x^2}+x)} + e^{a(\sqrt{1+x^2}-x)}] \\ &= R_0 + R_2 x^2 + R_4 x^4 + R_6 x^6 + \dots. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

wobei die Werthe der mit R bezeichneten Coeffizienten durch die Formel

$$\left.\begin{aligned} R_{2n} = (2n+2)\, Q_{2n+2} + \frac{(2n)\, Q_{2n}}{1.2} a^2 + \frac{(2n-2)\, Q_{2n-2}}{1.2.3.4} a^4 + \dots \\ \dots + \frac{2Q_2}{1.2.3\dots(2n)} a^{2n} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

bestimmt werden. Setzen wir ferner in der Formel (4)

$$\sqrt{1+x^2} + x = u, \qquad (6)$$

also

$$\sqrt{1+x^2} - x = \frac{1}{u};$$

so wird $2\sqrt{1+x^2} = u + \frac{1}{u}$, $x = \frac{1}{2}(u - \frac{1}{u})$, und hiernach ergiebt sich

$$\frac{a}{u+\frac{1}{u}} [e^{au} + e^{\frac{a}{u}}] = R_0 + \frac{R_2}{2^2}(u - \frac{1}{u})^2 + \frac{R_4}{2^4}(u - \frac{1}{u})^4 + \dots,$$

und nach beiderseitiger Multiplikation mit

$$(1 + \frac{1}{u^2}) \partial u = \frac{1}{u}(u + \frac{1}{u}) \partial u$$

wird aus der vorigen Gleichung:

Digitized by Google

$$\frac{a}{u}[e^{au}+e^{\frac{a}{u}}]\partial u$$
$$=(1+\frac{1}{u^2})\partial u[R_0+\frac{R_2}{2^2}(u-\frac{1}{u})^2+\frac{R_4}{2^4}(u-\frac{1}{u})^4+\ldots]$$
$$=\partial[\frac{R_0}{1}(u-\frac{1}{u})+\frac{R_2}{3.2^2}(u-\frac{1}{u})^3+\frac{R_4}{5.2^4}(u-\frac{1}{u})^5+\ldots].$$

Nach der Definition des Integrallogarithmus ist nun bekanntlich

$$\int\frac{\partial z}{z}e^z=li(e^z)+\text{Const.},$$

woraus für $z=au$ und $z=\frac{a}{u}$ folgt:

$$\int\frac{\partial u}{u}e^{au}=li(e^{au})+C',$$
$$\int\frac{\partial u}{u}e^{\frac{a}{u}}=-li(e^{\frac{a}{u}})+C''.$$

Diese Formeln kann man zur Integration der vorhergehenden Gleichung benutzen; man erhält so:

$$a[li(e^{au})-li(e^{\frac{a}{u}})]+\text{Const.}$$
$$=\frac{1}{1}R_0(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}\frac{R_2}{2^2}(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}\frac{R_4}{2^4}(u-\frac{1}{u})^5+\ldots$$

Die Gültigkeit dieser Gleichung ist an die Gränzen

$$\sqrt{2}+1>u>\sqrt{2}-1 \qquad (7)$$

gebunden, wie man sogleich bemerken wird, wenn man in die Gleichung (6) die Gränzwerthe $+1$ und -1 für x einführt. Nehmen wir in der vorigen Gleichung $u=1$, wodurch die Bedingung (7) erfüllt ist, so ergiebt sich $C=0$, und wenn wir

$$\frac{R_{2n}}{2^{2n}a}=P_{2n+1}$$

setzen, so ist jetzt

$$\left.\begin{array}{l} li(e^{au})-li(e^{\frac{a}{u}}) \\ =\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots \end{array}\right\} \quad (8)$$

wobei noch die Bedingung (7) erfüllt sein muss. Wir wollen nun die beiden Spezialisirungen $a=+1$ und $a=-1$ untersuchen. Für die erste ist

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l} li(e^u)-li(e^{\frac{1}{u}}) \\ =\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots \end{array}\right\} \quad (9)$$

und nach dem Früheren

$$Q_{2n}=\frac{e}{2.4\ldots.(2n)}[1-\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}-\ldots.] \quad (10)$$

$$P_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}}\left[(2n)\,Q_{2n}+\frac{(2n-2)Q_{2n-2}}{1.2}+\ldots.+\frac{2Q_2}{1.2\ldots.(2n-2)}\right] \quad (11)$$

Für $n=1, 2, 3, \ldots.$ geben diese Formeln sehr leicht:

$$Q_2=\frac{e}{2},\ Q_4=0,\ Q_6=\frac{e}{2.4.6},\ldots.;$$

$$P_1=e,\ P_3=\frac{e}{2.4},\ P_5=\frac{4e}{2\ 4.6.8},\ldots.$$

Nimmt man dagegen in No. (8) a negativ, so wird

$$\left.\begin{array}{l} li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}}) \\ =\frac{1}{1}P_1(u-\frac{1}{u})+\frac{1}{3}P_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}P_5(u-\frac{1}{u})^5+\ldots \end{array}\right\} \quad (12)$$

und dabei ist

$$Q_{2n}=\frac{(-1)^n\frac{1}{e}}{2.4\ldots.(2n)}[1+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2.4}+\ldots.] \quad (13)$$

$$P_{2n-1}=-\frac{1}{2^{2n-2}}[(2n)\,Q_{2n}+\frac{(2n-2)Q_{2n-2}}{1.2}+\ldots+\frac{2Q_2}{1.2\ldots(2n)}] \quad (14)$$

Hieraus findet man leicht

$$Q_2=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e},\ Q_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e},\ Q_6=-\frac{7}{2.4.6}\cdot\frac{1}{e},\ldots.;$$

$$P_1=\frac{1}{e},\ P_3=-\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{e},\ P_5=\frac{10}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{e},\ldots;$$

also ganz andere Werthe für die Coeffizienten. Man sieht hieraus, dass die Formel (9) nicht für negative u in Anspruch genommen werden darf, weil sie dann ein von dem in (12) verzeichneten ganz verschiedenes und desshalb falsches Resultat geben würde. *)

---

*) Beispiele dieser Art widerlegen die Deklamationen, die man noch hie und da über die allgemeine Gültigkeit der Taylorschen Formel, über syntaktische Geheimnisse etc. hört, am allerbesten. Wäre die Taylorsche Reihe allgemein richtig, so müsste es auch die Formel (9) sein, sie müsste

Digitized by Google

Zu der Formel (12) kann man übrigens auch noch auf einem anderen Wege gelangen, der durch seine Kürze bemerkenswerth ist. Bezeichnet man nämlich mit T den unbekannten Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \operatorname{Arctan} \frac{x}{t} \partial x \qquad (15)$$

der offenbar nur von t abhängt, so ist

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\int_0^\infty \frac{\cos x}{t^2 + x^2} \partial x,$$

und der Werth des Integrales rechts ist nach einer sehr bekannten Formel $= -\frac{\pi}{2t} e^{-t}$, mithin $T = -\frac{\pi}{2} \int \frac{\partial t}{t} e^{-t}$ oder

$$-\frac{\pi}{2} \int \frac{\partial t}{t} e^{-t} + \text{Const} = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \operatorname{Arctan} \frac{x}{t} \partial x,$$

was aber nur für positive t gilt, weil die so eben benutzte Integralformel nur für solche t besteht. Setzen wir $t = \tau$, $t = \infty$ und subtrahiren die beiden so entstehenden Gleichungen, so wird

---

also auch für negative u gelten, was gegenüber der Gleichung (12) zu Resultaten wie $-e = \frac{1}{e}$ führen würde. Die Sache ist aber sehr einfach. Wer eine Gleichung von der Form

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

hinschreibt, der sagt eigentlich, ich will eine Parabel $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ construiren, die sich möglichst genau an eine gegebene Curve $y = f(x)$ anschliesst und zwar um so genauer, je höher der Grad der Parabel ist. Eine Parabel verläuft aber immer stetig, daher kann ihre Identität (Deckung) mit der Curve $y = f(x)$ nur so lange statt finden, als die letztere ebenfalls stetig verläuft; tritt also z. B. für $x = \xi$ eine Discontinuität in $f(x)$ ein, so hört an dieser Stelle die Identität zwischen $y = f(x)$ und $y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ auf, wenn sie vorher bestanden hat, weil sich eine unstetige und eine stetige Curve nicht durchweg decken können. Ueber $x = \xi$ hinaus giebt $y = A_0 + A_1 x + \ldots$ die Fortsetzung der Parabel, aber nicht der Curve $y = f(x)$, und beide Grössenformen haben gar keine Beziehung mehr mit einander, weil es unzählige Curven $y = f(x)$ geben kann, welche für $x < \xi$ identisch sind, für $x = \xi$ unstetig werden, aber für $x > \xi$ ganz willkührlich und von einander verschieden verlaufen. Es kann nun der Fall eintreten, dass die Funktion $y = f(x)$ stetig bleibt von $x = -\infty$ bis $x = \xi$, und von $x = \xi$ bis $x = +\infty$, aber bei ξ diskontinuirlich wird; dann giebt es zwei verschiedene Parabeln, welche mit den beiden Zweigen von $y = f(x)$ zusammenfallen, also zwei ganz verschiedene Reihen für $f(x)$, jenachdem $x < \xi$ oder $x > \xi$ ist. Diess haben wir in unserer Betrachtung, denn $H(v)$ ist eine an der Stelle $v = 1$ discontinuirliche aber sonst stetige Funktion, und daher also die doppelte Reihenform. Diese Bemerkung lässt sich übrigens leicht auf den Fall ausdehnen, dass $f(x)$ mehrmals discontinuirlich wird.

Digitized by Google

$$-\frac{\pi}{2}\int_{x}^{t}\frac{\partial t}{t}e^{-t}=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{\tau}\partial x-0,$$

d. i.

$$-\frac{\pi}{2}li(e^{-\tau})=\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{\tau}\partial x.$$

Hieraus ergiebt sich leicht

$$li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}})=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{Arctan}\frac{(u-\frac{1}{u})x}{1+x^2}\partial x,$$

und wenn man für $\sqrt{2}+1>u>\sqrt{2}-1$, wo immer

$$1>\frac{(u-\frac{1}{u})x}{1+x^2}>-1$$

ist, den Arctan in eine Reihe verwandelt, so wird

$$li(e^{-u})-li(e^{-\frac{1}{u}})$$
$$=\frac{1}{1}J_1(u-\frac{1}{u})-\frac{1}{3}J_3(u-\frac{1}{u})^3+\frac{1}{5}J_5(u-\frac{1}{u})^5-\ldots,$$

worin die Grössen J durch die Formel

$$J_{2n+1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2n}\cos x}{(1+x^2)^{2n+1}}\partial x$$

bestimmt werden, wobei das Integral sich leicht näher ausführen lässt.

XXX.

Ueber die höheren Differenzialquotienten der Potenzen des Cosinus.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Differenzirt man mehrmals hintereinander den Ausdruck $\cos^{\mu}x$, so findet man leicht, dass die Differenzialquotienten gerader Ordnung unter der Form stehen:

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}} = A_0 \cos^\mu x + A_2 \cos^{\mu-2} x + A_4 \cos^{\mu-4} x + \ldots$$
$$\ldots\ldots + A_{2n} \cos^{\mu-2n} x, \qquad (1)$$

worin A_0, A_2, A_4, A_6 etc. gewisse rein numerische Coeffizienten bedeuten, welche nur von μ und n abhängen. Da man ferner jeden Differenzialquotienten ungerader Ordnung dadurch erhält, dass man seinen Vorgänger, der gerader Ordnung ist, noch einmal differenzirt, so ist klar, dass zur Entwickelung von $\frac{\partial^m \cos^\mu x}{\partial x^m}$ überhaupt die Entwickelung des Falles $m = 2n$ hinreicht. Diese letztere ist aber vollständig gegeben, wenn man in der Gleichung (1) die mit A bezeichneten Coeffizienten independent bestimmen kann. Für den Fall, dass μ eine ganze positive Zahl ist, wird diese Bestimmung durch keine wesentlichen Hindernisse erschwert, wenn man einige Kunstgriffe anwendet; ich mache dieselbe bekannt, weil sie vielleicht zu weiteren Untersuchungen über den, wie es scheint, ungleich schwereren Fall eines ganz beliebigen μ Veranlassung giebt.

Bezeichnen wir mit μ_0, μ_1, μ_2 etc. die Binomialkoeffizienten des Exponenten μ, so ist bekanntlich

$$(2\cos x)^\mu = \mu_0 \cos \mu x + \mu_1 \cos(\mu-2)x + \mu_2 \cos(\mu-4)x + \ldots,$$

wobei die Reihe soweit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Es ergiebt sich hieraus sogleich:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^n \frac{\partial^{2n} (2\cos x)^\mu}{\partial x^{2n}} \\ &= \mu_0 \mu^{2n} \cos \mu x + \mu_1 (\mu-2)^{2n} \cos(\mu-2)x \\ &\quad + \mu_2 (\mu-4)^{2n} \cos(\mu-4)x + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (\text{I})$$

Andererseits ist nach einem bekannten Theoreme:

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos x)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2\cos x)^{m-6} + \ldots,$$

wobei aber m nur eine ganze positive Zahl sein darf. Man kann dafür auch schreiben:

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(m-2)_0 (2\cos x)^{m-2}$$
$$+ \frac{m}{2}(m-3)_1 (2\cos x)^{m-4} - \ldots;$$

und wenn man mittelst dieser Formel jedes einzelne Glied der Reihe rechts in (1) in eine nach Potenzen von $2\cos x$ fortschreitende Reihe verwandelt, so kann man nachher die ganze rechte Seite nach solchen Potenzen ordnen; man erhält hierdurch ohne Schwierigkeit:

Digitized by Google

$$(-1)^n 2^{\mu+1} \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}}$$

$$= \mu_0 \mu^{2n} (2\cos x)^\mu$$

$$+ [\mu_1 (\mu-2)^{2n} - \mu_0 \mu^{2n} . \frac{\mu}{1} (\mu-2)_0] (2\cos x)^{\mu-2}$$

$$+ [\mu_2 (\mu-4)^{2n} - \mu_1 (\mu-2)^{2n} . \frac{\mu-2}{1} (\mu-4)_0 + \mu_0 \mu^{2n} . \frac{\mu}{2} (\mu-3)_1] (2\cos x)^{\mu-4},$$

$$+ \dots\dots\dots\dots$$

oder mit anderen Worten: wenn

$$(-1)^n \frac{\partial^{2n} \cos^\mu x}{\partial x^{2n}} = A_0 \cos^\mu x + A_2 \cos^{\mu-2} x + A_4 \cos^{\mu-4} x + \dots$$
$$\dots + A_{2n} \cos^{\mu-2n} x \qquad (2)$$

gesetzt wird, so ist für ein ganzes positives p:

$$A_{2p} = \tfrac{1}{2}\mu_p (\mu-2p)^{2n}$$
$$- \frac{\mu_{p-1} (\mu-2p)_0}{2} (\mu-2p+2)^{2n+1}$$
$$+ \frac{\mu_{p-2} (\mu-2p+1)_1}{4} (\mu-2p+4)^{2n+1}$$
$$- \frac{\mu_{p-3} (\mu-2p+2)_2}{6} (\mu-2p+6)^{2n+1}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\pm \frac{\mu_0 (\mu-p-1)_{p-1}}{2p} \mu^{2n+1}, \qquad (3)$$

worin das Bildungsgesetz der Coeffizienten mit völliger Deutlichkeit ausgesprochen liegt.

Da aus der Gleichung (2) hervorgeht, dass A_{2n+2}, A_{2n+4}, etc. nicht vorkommen können, so folgt, dass für $p > n$ immer $A_{2p} = 0$ sein muss, was einen rein algebraischen Satz giebt, dessen Beweis jedoch, einer brieflichen Mittheilung des Herrn Dr. Arndt zufolge, den gewöhnlichen Mitteln Trotz zu bieten scheint.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{(-1)^n}{1.2\dots(2n)} [A_0 + A_2 + \dots + A_{2n}] = C_{2n},$$

so ist

$$\cos^\mu x = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + C_6 x^6 + \dots,$$

wie man leicht mittelst des Mac-Laurinschen Theoremes einsieht.

Digitized by Google

XXXI.

Einfache Construction des Krümmungshalbmessers der Kegelschnitte.

Von dem
Herrn Fabriken-Kommissionsrathe A. Brix
zu Berlin.

Es sei VAV' (Taf. VII. Fig. 4.) ein Kegelschnitt, F dessen Brennpunkt und Q ein beliebiger Curvenpunkt, für welchen $AP=x$, $PQ=y$ die Coordinaten, $QN=z$ die Normale und $PN=u$ die Subnormale vorstellen.

Man ziehe durch Q und F die Sekante QM, errichte in N das Perpendikel NM auf QN, welches die Sekante in M schneidet; dann ziehe man MO senkrecht auf QM und verlängere die Normale bis zum Durchschnitt O mit dieser Senkrechten, so ist QO der Krümmungshalbmesser des Curvenpunktes Q.

Einen einfachen geometrischen Beweis dieser Construction zu finden, ist mir noch nicht gelungen, wogegen ihre Uebereinstimmung mit den analytischen Formeln leicht nachzuweisen ist. Geht man nämlich von der Gleichung

$$y^2=mx+nx^2$$

aus, so ist

$$u=\tfrac{1}{2}(m+2nx),\quad z=\tfrac{1}{2}\sqrt{m^2+4(n+1)(mx+nx^2)}$$

und

$$QO=\varrho=\frac{1}{2m^2}\sqrt{[m^2+4(n+1)(mx+nx^2)]^3}=\frac{4z^3}{m^2}.$$

Nach obiger Construction findet man aber leicht, die in der Figur angegebene Bezeichnung berücksichtigend:

$$QO=\varrho=z.\sec^2(\varphi+\psi)=z(1+\operatorname{tg}^2(\varphi+\psi)).$$

Nun ist

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{u}{y},\quad \operatorname{tg}\psi=\frac{PF}{PQ}=\frac{x-AF}{y};$$

folglich, da $AF=\frac{m}{2n}(-1+\sqrt{1+n})$:

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m+2nx-m\sqrt{1+n}}{2ny} = \frac{2u-m\sqrt{1+n}}{2ny}.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}\psi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi},$$

und wenn für $\operatorname{tg}\varphi$ und $\operatorname{tg}\psi$ die obigen Werthe eingesetzt werden:

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi) = \frac{2u(1+n)-m\sqrt{1+n}}{2ny^2-2u^2+mu\sqrt{1+n}}.y$$

$$= \frac{2y}{m}\sqrt{1+n}.$$

Ferner hat man

$$\sec^2(\varphi+\psi) = 1+\operatorname{tg}^2(\varphi+\psi);$$

also

$$\sec^2(\varphi+\psi) = \frac{m^2+4(n+1)y^2}{m^2} = \frac{4z^2}{m^2}.$$

Oben war $\varrho = z.\sec^2(\varphi+\psi)$ angegeben, also ist nun

$$\varrho = \frac{4z^3}{m^2},$$

übereinstimmend mit der analytischen Formel für den Krümmungshalbmesser.

XXXII.

Bemerkung zu Aufgabe 23. in: „Die merkwürdigsten Eigenschaften des geradlinigen Dreiecks. Von C. Adams. Winterthur. 1846.“

Von dem

Herrn Doctor H. Hoffmann,

Lehrer am Gymnasium zu Danzig.

Bei Aufgabe 23. a. a. O. ist die Bemerkung nöthig, dass die Auflösung keineswegs allgemein ist und nur gilt, wenn von den

drei Höhen h_1, h_2, h_3 die Summe je zweier grösser ist, als die dritte; denn es ist diese Voraussetzung durchaus nicht die Bedingung für die Möglichkeit der Aufgabe.

Diese Bedingung ist für den Fall, dass $h_1 > h_2$ ist:

$$\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_1}>\frac{1}{h_3} \text{ oder } h_3>\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}$$

und

$$\frac{1}{h_2}-\frac{1}{h_1}<\frac{1}{h_3} \text{ oder } h_3<\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}.$$

Es wird allerdings der Fall eintreten, dass h_3 zwischen diesen Grenzen und zugleich zwischen den Grenzen

$$h_3>h_1-h_2,\ h_3<h_1+h_2$$

liegt; doch wird es Werthe für h_1 und h_2 geben, wo die ersten Grenzen ganz ausserhalb der zweiten liegen, wenn nämlich

$$\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}<h_1-h_2 \text{ oder } h_2<\tfrac{1}{2}h_1(3-\sqrt{5}).$$

Wird h_2 grösser angenommen, so werden sich jene beiden Grenzen, die wahren und die zufälligen, theilweise decken, bis sie endlich ganz zusammenfallen. Dies geschieht, wenn

$$\frac{h_1 h_2}{h_1-h_2}=h_1+h_2$$

und

$$\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}=h_1-h_2$$

oder

$$h_2=\tfrac{1}{2}h_1(\sqrt{5}-1).$$

Wächst h_2 noch weiter, so werden die wahren Grenzen zwar wieder über jene zufälligen hinaustreten, sie jedoch nicht mehr ganz verlassen, da der Bedingung

$$\frac{h_1 h_2}{h_1+h_2}>h_1+h_2$$

kein reeller Werth von h_2 entspricht.

Man kann die jedesmaligen Grenzen für h_3 unter der gemachten Voraussetzung $h_1>h_2$ auf einfache Weise durch eine Figur darstellen.

Ist in Taf. VIII. Fig. 9. $AB=h_1$, so mache man $BC=BC'=h_2$, errichte in C und C' die Perpendikel $CD=C'D'=h_2$, und ziehe AD und AD', so sind die wahren Grenzen von h_3 BE und BE', die zufälligen AC und AC'.

Es wird nun h_3 nicht zwischen AC und AC' liegen können, wenn Bc so genommen ist, dass $Ac \overset{=}{>} Bc$. Die Construction giebt für diesen Fall $h_2 \overset{=}{<} Bc$, wo AB in c so getheilt ist, dass

Digitized by Google

$$Bc : Ac = Ac : AB. \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

Denn da $Bc = Ac$ sein soll, so folgt diese Proportion sogleich aus

$$Ac : cd = AB : Bc.$$

Hiemit ist zugleich der Werth von h_2 für den Fall gefunden, dass die wahren und zufälligen Grenzen sich decken, dass also $AC = BE'$ und $AC' = BE$. Denn mit Hilfe dieser Bedingung wird aus

$$AC : CD = AB : BE \text{ und } AC' : C'D' = AB : BE'$$

entstehen:

$$AC : BC = AB : AB + BC \text{ und } AB + BC : BC = AB : AC;$$

aus beiden aber folgt:

$$AC : BC = BC : AB. \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

Vergleicht man 1) und 2) mit einander, so folgt:

$$Bc = AC \text{ und } Ac = BC.$$

XXXIII.

Ein Paar Tetraedersätze.

Von dem
Herrn Schulrath J. H. T. Müller,
Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.

1. Werden in den vier Seitenflächen

$$A, B, C, D$$

eines Tetraeders, deren Gegenscheitel

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$$

sind, vier Punkte

$$\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$$

dergestalt angenommen, dass die Geraden

Digitized by Google

$$\mathfrak{a}\mathfrak{a}',\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}',\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}',\ \mathfrak{d}\mathfrak{d}'$$

einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt

$$\mathfrak{o}$$

haben, und bezeichnet man die in

A liegenden Dreiecke $\mathfrak{a}'\mathfrak{c}\mathfrak{d},\ \mathfrak{a}'\mathfrak{d}\mathfrak{b},\ \mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ mit $A_B,\ A_C,\ A_D$;
B „ „ $\mathfrak{b}'\mathfrak{d}\mathfrak{a},\ \mathfrak{b}'\mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ „ $B_C,\ B_D,\ B_A$;
C „ „ $\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{d},\ \mathfrak{c}'\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ „ $C_D,\ C_A,\ C_B$;
D „ „ $\mathfrak{d}'\mathfrak{b}\mathfrak{c},\ \mathfrak{d}'\mathfrak{c}\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ „ $D_A,\ D_B,\ D_C$;

wo der jedesmalige Zeiger die dem Theildreiecke anliegende Tetraederfläche ist, so finden folgende Beziehungen statt:

$$A_C.C_B.B_D.D_A = A_D.D_B.B_C.C_A = A_B.B_A.C_D.D_C,$$
$$A_D.D_C.C_B.B_A = A_B.B_C.C_D.D_A = A_C.C_A.B_D.D_B,$$
$$A_B.B_D.D_C.C_A = A_C.C_D.D_B.B_A = A_D.D_A.B_C.C_B.$$

Diese drei Gleichheiten von vierfactorigen Producten gehören der Reihe nach den drei einfachen gebrochenen geradlinigen Vierecken

$$\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{b}\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{b}\mathfrak{c},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{c}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d},\quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{b}$$

mit den Diagonalen

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b},\ \mathfrak{c}\mathfrak{d};\quad \mathfrak{a}\mathfrak{c},\ \mathfrak{b}\mathfrak{d};\quad \mathfrak{a}\mathfrak{d},\ \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

zu, welche durch die vier gegebenen Tetraederecken bestimmt sind.

Für jedes solche Viereck ist demnach unter der oben gemachten Voraussetzung

das Product aus den vier Theildreiecken, welche dessen Diagonalen anliegen, gleich den Producten aus den vier dessen Seiten anliegenden Theildreiecken, von denen keine zwei derselben Tetraederfläche angehören.

Von der Richtigkeit dieses Satzes überzeugt man sich leicht, wenn man, die Tetraeder, welche $\mathfrak{o}$ zur gemeinschaftlichen Spitze und A, B, C, D zu Grundflächen haben, mit $\mathfrak{T}_A$, $\mathfrak{T}_B$, $\mathfrak{T}_C$, $\mathfrak{T}_D$ bezeichnend, die sich augenblicklich ergebenden Verhältnissgleichheiten

$$\mathfrak{T}_A : \mathfrak{T}_B : \mathfrak{T}_C = D_A : D_B : D_C,$$
$$\mathfrak{T}_B : \mathfrak{T}_C : \mathfrak{T}_D = A_B : A_C : A_D,$$
$$\mathfrak{T}_C : \mathfrak{T}_D : \mathfrak{T}_A = B_C : B_D : B_A,$$
$$\mathfrak{T}_D : \mathfrak{T}_A : \mathfrak{T}_B = C_D : C_A : C_B$$

bildet, und diese in gehöriger Weise durch Multiplication verbindet.

Digitized by Google

2. Werden in den vier Tetraederflächen

$$A,\ B,\ C,\ D$$

vier Transversallinien

$$a',\ b',\ c',\ d'$$

dergestalt gezogen, dass dieselben in der gemeinschaftlichen Transversalebene

$$O$$

liegen, und bezeichnet man die hierdurch auf den Tetraederflächen bestimmten Dreiecke, welche durch je zwei Tetraederkanten und die zugehörige Transversallinie begrenzt werden, nämlich

$$\mathfrak{a}d',\ \mathfrak{a}b',\ \mathfrak{a}c';\quad \mathfrak{b}a',\ \mathfrak{b}c',\ \mathfrak{b}d';\quad \mathfrak{c}b',\ \mathfrak{c}d',\ \mathfrak{c}a';\quad \mathfrak{d}c',\ \mathfrak{d}a',\ \mathfrak{d}b'$$

mit

$$D_A,\ B_A,\ C_A;\quad A_B,\ C_B,\ D_B;\quad B_C,\ D_C,\ A_C;\quad C_D,\ A_D,\ B_D;$$

so erhält man dieselben Gleichungen, wie die in 1. gefundenen.

Sowie der Beweis des ersten Satzes dem des ihm analogen vom Dreiecke entspricht, wonach mit Anwendung derselben Bezeichnungsweise

$$a_b . b_c . c_a = a_c . c_b . b_a$$

ist, so ist diess auch mit dem des zweiten der Fall, der für das Dreieck ebenfalls dieselbe Gestalt hat.

Diese beiden Lehrsätze mit ihren Umkehrungen, deren weitere Verfolgung mit Rücksicht auf ihren Zusammenhang mit andern, vielleicht noch nicht bekannten Sätzen sich der Einsender auf eine andere Zeit verspart, schienen, besonders wegen ihrer Analogie mit den erwähnten Dreieckssätzen, der Mittheilung werth zu sein.

Digitized by Google

XXXIV.

Ueber die Summirung der nach den Potenzen einer Hauptgrösse fortschreitenden Reihen, deren Coefficienten eine arithmetische Reihe einer beliebigen Ordnung bilden.

Von

dem Herausgeber.

Ich gehe bei dieser Untersuchung von dem folgenden Satze aus:

Lehrsatz.

Wenn die Grösse x, welche wir als positiv annehmen wollen, kleiner als die Einheit ist, und n und k positive ganze Zahlen bezeichnen; so nähert sich

$$n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k-1)x^n$$

jederzeit bis zu jedem beliebigen Grade der Null, wenn n, indem k als constant betrachtet wird, in's Unendliche wächst.

Beweis.

Es ist, wie leicht erhellet:

$$(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)\,x^{n+1}=n(n+1)\ldots.(n+k-1)x^n$$
$$\times(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})\ldots.(1+\frac{1}{n+k-1})x,$$
$$(n+2)(n+3)\ldots.(n+k+1)\,x^{n+2}=(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)\,x^{n+1}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})\ldots.(1+\frac{1}{n+k})x,$$
$$(n+3)(n+4)\ldots.(n+k+2)x^{n+3}=(n+2)(n+3)\ldots.(n+k+1)\,x^{n+2}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})\ldots.(1+\frac{1}{n+k+1})x,$$
$$(n+4)(n+5)\ldots.(n+k+3)\,x^{n+4}=(n+3)(n+4)\ldots.(n+k+2)\,x^{n+3}$$
$$\times(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})\ldots.(1+\frac{1}{n+k+2})x,$$

u. s. w.

Digitized by Google

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})\ldots\ldots(1+\frac{1}{n+k-1}),$$

$$K_1=(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})\ldots\ldots(1+\frac{1}{n+k}),$$

$$K_2=(1+\frac{1}{n+2})(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})\ldots\ldots(1+\frac{1}{n+k+1}),$$

$$K_3=(1+\frac{1}{n+3})(1+\frac{1}{n+4})(1+\frac{1}{n+5})\ldots\ldots(1+\frac{1}{n+k+2}),$$

u. s. w.

setzen:

$$(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k)x^{n+1}=n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)x^n.Kx,$$

$$(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k+1)x^{n+2}=(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k)x^{n+1}.K_1x,$$

$$(n+3)(n+4)\ldots\ldots(n+k+2)x^{n+3}=(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k+1)x^{n+2}.K_2x,$$

$$(n+4)(n+5)\ldots\ldots(n+k+3)x^{n+4}=(n+3)(n+4)\ldots\ldots(n+k+2)x^{n+3}.K_3x,$$

u. s. w.,

also

$$(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+k)x^{n+1}=n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)x^n.Kx,$$

$$(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+k+1)x^{n+2}=n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)x^n.KK_1x^2,$$

$$(n+3)(n+4)\ldots\ldots(n+k+2)x^{n+3}=n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)x^n.KK_1K_2x^3,$$

$$(n+4)(n+5)\ldots\ldots(n+k+3)x^{n+4}=n(n+1)\ldots\ldots(n+k-1)x^n.KK_1K_2K_3x^4,$$

u. s. w.

Offenbar ist aber

$$K>K_1>K_2>K_3>K_4> \text{ u. s. w.},$$

und folglich

$$K=K,$$

$$KK_1<K^2,$$

$$KK_1K_2<K^3,$$

$$KK_1K_2K_3<K^4,$$

u. s. w.

also

$$Kx=Kx,$$

$$KK_1x^2<(Kx)^2,$$

$$KK_1K_2x^3<(Kx)^3,$$

$$KK_1K_2K_3x^4<(Kx)^4.$$

u. s. w.

Daher ist nach dem Obigen:

$$(n+1)(n+2)....(n+k)x^{n+1} = n(n+1)....(n+k-1)x^n.Kx,$$
$$(n+2)(n+3)....(n+k+1)x^{n+2} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^2,$$
$$(n+3)(n+4)....(n+k+2)x^{n+3} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^3,$$
$$(n+4)(n+5)....(n+k+3)x^{n+4} < n(n+1)....(n+k-1)x^n.(Kx)^4,$$

u. s. w.

Soll nun $Kx < 1$, d. i.

$$(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})x < 1$$

sein, so muss

$$x < \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})} > x$$

sein. Wenn aber n in's Unendliche wächst, so nähern sich die Brüche

$$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ... \frac{1}{n+k-1}$$

deren Anzahl constant, nämlich k ist, immer mehr und mehr der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, und es wird sich also, wenn n in's Unendliche wächst, offenbar der Bruch

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})},$$

welcher stets kleiner als die Einheit ist, im Wachsen der Einheit immer mehr und mehr nähern, und derselben beliebig nahe gebracht werden können, wenn man nur n gross genug nimmt. Da nun nach der Voraussetzung $x < 1$ und als eine constante völlig bestimmte Grösse natürlich von der Einheit um eine bestimmte endliche Grösse unterschieden ist, so wird, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, der stets wachsende Bruch

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})....(1+\frac{1}{n+k-1})},$$

welcher der Einheit beliebig nahe kommen kann, wenn man nur n

gross genug nimmt, immer endlich grösser als x werden, dann also die obige Bedingung erfüllt, und folglich

$$Kx < 1$$

sein. Dann nähern sich aber nach dem Obigen die Grössen

$$n(n+1)\ldots.(n+k-1)x^n,$$
$$(n+1)(n+2)\ldots.(n+k)x^{n+1},$$
$$(n+2)(n+3)\ldots.(n+k+1)x^{n+2},$$
$$(n+3)(n+4)\ldots.(n+k+2)x^{n+3},$$
$$(n+4)(n+5)\ldots.(n+k+3)x^{n+4},$$

u. s. w.

offenbar immer mehr und mehr der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur weit genug in der vorhergehenden Reihe fortschreitet oder sich nur weit genug von ihrem Anfange entfernt, wodurch unser Satz offenbar vollständig bewiesen ist.

Die fortwährende Abnahme der Werthe von

$$n(n+1)\ldots.(n+k-1)x^n$$

mit wachsendem n beginnt nur erst dann, wenn

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n+2})\ldots.(1+\frac{1}{n+k-1})} > x$$

geworden ist, was immer endlich einmal eintreten muss.

Zusatz.

Wenn der absolute Werth der Grösse x kleiner als die Einheit ist und n und k positive ganze Zahlen bezeichnen, so nähert sich der absolute Werth von

$$n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)x^n$$

jederzeit der Null, wenn n, indem k als constant betrachtet wird, in's Unendliche wächst, und kann der Null beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt.

Es ist nun, wovon man sich auf der Stelle durch ganz leichte Rechnung überzeugt, allgemein

$$\frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k} = \frac{n(n+1)\ldots.(n+k-2)}{1.2.3\ldots.(k-1)} + \frac{(n-1)n\ldots.(n+k-2)}{1.2.3\ldots.k};$$

also, wenn man für n nach und nach $1, 2, 3, 4, \ldots. n$ setzt:

Digitized by Google

$$\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k}=\frac{1.2.3....(k-1)}{1.2.3....(k-1)},$$

$$\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k}=\frac{2.3.4....k}{1.2.3....(k-1)}+\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k},$$

$$\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k}=\frac{3.4.5....(k+1)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k},$$

$$\frac{4.5.6....(k+3)}{1.2.3....k}=\frac{4.5.6....(k+2)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k},$$

u. s. w.

$$\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}=\frac{n(n+1)....(n+k-2)}{1.2.3....(k-1)}+\frac{(n-1)n....(n+k-2)}{1.2.3....k}.$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,....x^{n-1}$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$1)\quad \overset{k}{S}_n=\frac{1.2.3....k}{1.2.3....k}+\frac{2.3.4....(k+1)}{1.2.3....k}x$$
$$+\frac{3.4.5....(k+2)}{1.2.3....k}x^2$$
$$+\frac{4.5.6....(k+3)}{1.2.3....k}x^3$$
u. s. w.
$$+\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}$$

gesetzt wird, auf der Stelle die Gleichung

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n+\overset{k}{S}_{n-1}.x.$$

Weil nun aber offenbar

$$\overset{k}{S}_{n-1}=\overset{k}{S}_n-\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}$$

ist so wird die vorhergehende Gleichung

$$\overset{k}{S}_n=\overset{k-1}{S}_n+\{\overset{k}{S}_n-\frac{n(n+1)....(n+k-1)}{1.2.3....k}x^{n-1}\}x,$$

also

$$2)\quad (1-x)\overset{k}{S}_n = \overset{k-1}{S}_n - \frac{n(n+1)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}x^n.$$

Für $k=1$ ist nach 1):

$$\overset{1}{S}_n = \frac{1}{1} + \frac{2}{1}x + \frac{3}{1}x^2 + \frac{4}{1}x^3 + \ldots. + \frac{n}{1}x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{1}x + \frac{1}{1}x^2 + \frac{1}{1}x^3 + \ldots. + \frac{1}{1}x^{n-1}$$

$$+ \frac{1}{1}x + \frac{2}{1}x^2 + \frac{3}{1}x^3 + \ldots. + \frac{n-1}{1}x^{n-1}$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1}$$

$$+ (\frac{1}{1} + \frac{2}{1}x + \frac{3}{1}x^2 + \ldots. + \frac{n-1}{1}x^{n-2})x,$$

d. i.

$$\overset{1}{S}_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1} + (\overset{1}{S}_n - \frac{n}{1}x^{n-1})x,$$

also

$$3)\quad (1-x)\overset{1}{S}_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1} - \frac{n}{1}x^n.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Gleichung 2), so findet man, dass, wenn diese letztere Gleichung ganz allgemein, d. h. auch noch für $k=1$ gelten soll,

$$4)\quad \overset{0}{S}_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots. + x^{n-1}$$

gesetzt werden muss. Dies vorausgesetzt, ist nun nach der allgemeinen Gleichung 2), wenn für k nach und nach 1, 2, 3, 4,.... k gesetzt wird:

$$(1-x)\overset{1}{S}_n = \overset{0}{S}_n - \frac{n}{1}x^n,$$

$$(1-x)\overset{2}{S}_n = \overset{1}{S}_n - \frac{n(n+1)}{1.2}x^n,$$

$$(1-x)\overset{3}{S}_n = \overset{2}{S}_n - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}x^n,$$

$$(1-x)\overset{4}{S}_n = \overset{3}{S}_n - \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}x^n,$$

u. s. w.

$$(1-x)\overset{k}{S}_n = \overset{k-1}{S}_n - \frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}x^n;$$

also

Digitized by Google

$$(1-x)\overset{1}{S}_n=\overset{0}{S}_n-\frac{n}{1}x^n,$$

$$(1-x)^2\overset{2}{S}_n=(1-x)\overset{1}{S}_n-\frac{n(n+1)}{1.2}(1-x)x^n,$$

$$(1-x)^3\overset{3}{S}_n=(1-x)^2\overset{2}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(1-x)^2x^n,$$

$$(1-x)^4\overset{4}{S}_n=(1-x)^3\overset{3}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}(1-x)^3x^n,$$

u. s. w.

$$(1-x)^k\overset{k}{S}_n=(1-x)^{k-1}\overset{k-1}{S}_n-\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}(1-x)^{k-1}x^n;$$

und folglich, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$(1-x)^k\overset{k}{S}_n=\overset{0}{S}_n-\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{1}+\frac{n(n+1)}{1.2}(1-x)\\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(1-x)^2\\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}(1-x)^3\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}(1-x)^{k-1}\end{array}\right\}x^n.$$

Weil nun aber nach 4) und der Lehre von den geometrischen Reihen

$$5)\quad \overset{0}{S}_n=\frac{1-x^n}{1-x}$$

ist, so ist

$$6)\quad \overset{k}{S}_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^{k+1}}-\left\{\begin{array}{l}\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^k}\\ +\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-1}}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-2}}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{(1-x)^{k-3}}\\ \text{u. s. w.}\\ +\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+k-1)}{1.2.3\ldots.k}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n.$$

Digitized by Google

Wenn jetzt das erste Glied einer arithmetischen Reihe der $k$ten Ordnung und die ersten Glieder ihrer Differenzenreihen durch

$$A,\ \Delta A,\ \Delta^2 A,\ \Delta^3 A, \ldots \Delta^k A$$

und das $n$te Glied dieser Reihe durch A_{n-1}, die Binomialcoefficienten aber auf gewöhnliche Weise bezeichnet werden; so ist nach der allgemeinen Theorie der arithmetischen Reihen bekanntlich

$$A_{n-1} = A + (n-1)_1\, \Delta A + (n-1)_2\, \Delta^2 A + (n-1)_3\, \Delta^3 A + \ldots$$
$$\ldots + (n-1)_{n-1}\, \Delta^{n-1} A,$$

also, wenn man für n nach und nach die ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... n in diese Gleichung einführt:

$$A = A,$$
$$A_1 = A + 1_1 . \Delta A,$$
$$A_2 = A + 2_1 . \Delta A + 2_2 . \Delta^2 A,$$
$$A_3 = A + 3_1 . \Delta A + 3_2 . \Delta^2 A + 3_3 . \Delta^3 A,$$

u. s. w.

$$A_{n-1} = A + (n-1)_1 . \Delta A + (n-1)_2 . \Delta^2 A + (n-1)_3 . \Delta^3 A + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (n-1)_{n-1} . \Delta^{n-1} A;$$

und folglich, wenn man diese Gleichungen, nachdem man sie nach der Reihe mit

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots x^{n-1}$$

multiplicirt hat, zu einander addirt, und der Kürze wegen

$$7)\quad \Sigma_{n-1} = A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}$$

setzt, wie leicht erhellen wird:

$$8)\quad \Sigma_{n-1} = \overset{0}{S}_n A + \overset{1}{S}_{n-1} x \Delta A + \overset{2}{S}_{n-2} x^2 \Delta^2 A$$
$$+ \overset{3}{S}_{n-3} x^3 \Delta^3 A$$

u. s. w.

$$+ \overset{n-2}{S_2} x^{n-2} \Delta^{n-2} A$$
$$+ \overset{n-1}{S_1} x^{n-1} \Delta^{n-1} A.$$

Führt man nun in diese Gleichung für

$$\overset{0}{S}_n,\ \overset{1}{S}_{n-1},\ \overset{2}{S}_{n-2},\ \overset{3}{S}_{n-3}, \ldots \overset{n-2}{S_2},\ \overset{n-1}{S_1}$$

ihre Ausdrücke aus 5) und 6) ein, so erhält man:

Digitized by Google

$$9)\quad \Sigma_{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}A$$

$$+\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}x\Delta A-\frac{n-1}{1}\cdot\frac{1}{1-x}x^n\Delta A$$

$$+\frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3}x^2\Delta^2A-\left\{\frac{n-2}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\cdot\frac{1}{1-x}\right\}x^n\Delta^2A$$

$$+\frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4}x^3\Delta^3A-\left\{\begin{array}{l}\frac{n-3}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta^3A$$

u. s. w.

$$+\frac{1-x^2}{(1-x)^{n-1}}x^{n-2}\Delta^{n-2}A-\left\{\begin{array}{l}\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-2}}+\frac{3.2}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-3}}\\ \qquad+\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-4}}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)....2}{1.2.3....(n-2)}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta^{n-2}A$$

$$+\frac{1-x}{(1-x)^n}x^{n-1}\Delta^{n-1}A-\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-1}}+\frac{2.1}{1.2}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-2}}\\ \qquad+\frac{3.2.1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(1-x)^{n-3}}\\ \qquad\text{u. s. w.}\\ \qquad+\frac{(n-1)(n-2)....1}{1.2.3....(n-1)}\cdot\frac{1}{1-x}\end{array}\right\}x^n\Delta^{n-1}A,$$

eine allgemeine Summationsformel, deren Bildungsgesetz deutlich vor Augen liegt.

Ausgeschlossen muss jedoch offenbar der Fall werden, wenn $x=1$ ist. In diesem Falle ist aber die Summe Σ_{n-1} aus der Lehre von den arithmetischen Reihen bekannt, und derselbe braucht daher hier nicht weiter besonders berücksichtigt zu werden.

Für $n \geqq k$ wird die Gleichung 9), weil nach der Voraussetzung die Grössen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, ...\ A_{n-1}, ...$$

eine arithmetische Reihe der $k$ten Ordnung bilden, nach einer einfachen Transformation:

$$\Sigma_{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} A$$

$$+ \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} x\Delta A - \frac{n-1}{1} x^{n-1} \cdot \frac{1}{1-x} x\Delta A$$

$$+ \frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3} x^2 \Delta^2 A - \left\{ \frac{n-2}{1} x^{n-2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n-2)(n-1)}{1.2} x^{n-2} \cdot \frac{1}{1-x} \right\} x^2 \Delta^2 A$$

$$+ \frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4} x^3 \Delta^3 A - \left\{ \frac{n-3}{1} x^{n-3} \cdot \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{(n-3)(n-2)}{1.2} x^{n-3} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{(n-3)(n-2)(n-1)}{1.2.3} x^{n-3} \cdot \frac{1}{1-x} \right\} x^3 \Delta^3 A$$

u. s. w.

$$+ \frac{1-x^{n-k}}{(1-x)^{k+1}} x^k \Delta^k A - \left\{ \begin{array}{l} \frac{n-k}{1} x^{n-k} \cdot \frac{1}{(1-x)^k} \\ + \frac{(n-k)(n-k+1)}{1.2} x^{n-k} \cdot \frac{1}{(1-x)^{k-1}} \\ + \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{1.2.3} x^{n-k} \cdot \frac{1}{(1-x)^{k-2}} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{(n-k)(n-k+1)\ldots.(n-1)}{1.2.3\ldots.k} x^{n-k} \cdot \frac{1}{1-x} \end{array} \right\} x^k \Delta^k A.$$

Nehmen wir nun den absoluten Werth von x kleiner als die Einheit an, und lassen n in's Unendliche wachsen, so nähern sich nach dem Zusatze des oben bewiesenen Lehrsatzes die Grössen

$(n-1)x^{n-1}$;

$(n-2)x^{n-2}$, $(n-2)(n-1)x^{n-2}$;

$(n-3)x^{n-3}$, $(n-3)(n-2)x^{n-3}$, $(n-3)(n-2)(n-1)x^{n-3}$;

u. s. w.

$(n-k)x^{n-k}$, $(n-k)(n-k+1)x^{n-k}$, $(n-k)(n-k+1)(n-k+2)x^{n-k}$,....

...... $(n-k)(n-k+1)\ldots(n-1)x^{n-k}$

sämmtlich der Null und können derselben beliebig nahe gebracht werden, wenn man nur n gross genug nimmt, wobei man immer zu beachten hat, dass die Grösse k constant ist. Bezeichnen wir also die Gränze, welcher Σ_{n-1} sich bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn n in's Unendliche wächst, durch Σ, so ergiebt sich, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von x kleiner als die Einheit ist, aus der obigen Gleichung unmittelbar die folgende merkwürdige Gleichung:

$$10)\quad \Sigma = \frac{A}{1-x} + \frac{x\Delta A}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 A}{(1-x)^3} + \frac{x^3\Delta^3 A}{(1-x)^4} + \ldots + \frac{x^k\Delta^k A}{(1-x)^{k+1}}$$

Wenn also die Grössen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_{n-1}, \ldots$$

eine arithmetische Reihe der $k$ten Ordnung bilden, so ist in einer bekannten Bezeichnung immer:

$$11)\quad A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{A}{1-x} + \frac{x\Delta A}{(1-x)^2} + \frac{x^2\Delta^2 A}{(1-x)^3} + \frac{x^3\Delta^3 A}{(1-x)^4} + \ldots + \frac{x^k\Delta^k A}{(1-x)^{k+1}}.$$
$$\{-1 < x < +1\}.$$

Wenn auch dieser sehr allgemeine und gewiss sehr merkwürdige Satz in seinen wesentlichen Bestandtheilen längst bekannt ist *), so ist derselbe bis jetzt doch nur ohne alle Rücksicht auf die Convergenz der Reihe

$$A,\ A_1 x,\ A_2 x^2,\ A_3 x^3,\ A_4 x^4, \ldots\ldots$$

nach den bei solchen Untersuchungen gebräuchlichen ältern Methoden, die hier als hinreichend bekannt vorausgesetzt werden können, bewiesen worden. Der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung war eine schärfere Begründung des Satzes mit gehöriger Berücksichtigung der Convergenz der obigen Reihe. Anwendungen dieses allgemeinen Satzes auf specielle Reihen dem Obigen noch hinzuzufügen, halte ich hier für überflüssig. Auch werden sich verschiedene Bemerkungen über die Divergenz der betreffenden Reihe und dergl., die sich dem Obigen noch anschliessen liessen, einem Jeden leicht von selbst ergeben, und können daher hier der Kürze wegen füglich gleichfalls übergangen werden.

---

*) Ich finde ihn zuerst in: The doctrine of chances, or a method of calculating the probability of events in play. By A. De Moivre. F. R. S. London. 1718. 4. p. 131. und Moivre mag daher wohl der Erfinder sein. Sonst s. m. auch das Mathematische Wörterbuch. Thl. IV. S. 601.

Digitized by Google

XXXV.

Relationen zwischen den Fakultätenkoeffizienten.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

In dem Aufsatze Thl. VIII. Nr. XLI. S. 427. des Archivs habe ich gezeigt, dass, wenn $\overset{n}{C}_1$, $\overset{n}{C}_2$, $\overset{n}{C}_3$, ... die Fakultätenkoeffizienten, d. h. die Constanten der Gleichung

$$u(u+1)(u+2)....(u+n-1)=\overset{n}{C}_1u+\overset{n}{C}_2u^2+\overset{n}{C}_3u^3+....+\overset{n}{C}_nu^n$$

bezeichnen, die Formel gilt:

$$\left.\begin{array}{c}[l(1+x)]^m \\ =\overset{m}{C}_m x^m-\dfrac{1}{m+1}\overset{m+1}{C}_m x^{m+1}+\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}\overset{m+2}{C}_m x^{m+2}-....\end{array}\right\} \quad (1)$$

wobei m eine positive ganze Zahl und $1>x>-1$ sein muss. Diese letztere Beziehung kann nun auf folgende Weise zur Auffindung von Eigenschaften jener merkwürdigen Zahlen benutzt werden. Es sei $\varphi(y)$ eine Funktion, welche sich wenigstens während eines kleinen, bei $y=0$ anfangenden Intervalles in eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe verwandeln lässt, also etwa

$$\varphi(y)=A_0+A_1y+A_2y^2+A_3y^3+....$$

In diese Gleichung substituire man $y=l(1+x)$, so wird $\varphi[l(1+x)]$ eine gewisse neue Funktion von x darstellen, welche mit $\psi(x)$ bezeichnet werden möge, und man hat

$$\psi(x)=A_0+A_1l(1+x)+A_2[l(1+x)]^2+......$$

Verwandelt man hier jedes einzelne Glied nach Formel (1) selbst wieder in eine Reihe und ordnet dann Alles nach Potenzen von x, so kann man die vorige Gleichung auf die Form

$$\psi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+....$$

Digitized by Google

bringen, worin a_0, a_1, a_2, ... auf gewisse, leicht in einer Formel ausdrückbare Weise von A_0, A_1, A_2,.... und C_1, C_2, C_3,.... abhängen. Wählt man nun die ursprüngliche Funktion $\varphi(y)$ so, dass sich $\varphi[l(1+x)]=\psi(x)$ ganz unabhängig von der vorigen Betrachtung in eine Reihe von der Form

$$\psi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$$

verwandeln lässt, so führt die Vergleichung der Coeffizienten beider Reihen leicht zu Eigenschaften der Fakultätenkoeffizienten.

Das einfachste Beispiel, was sich hierzu geben lässt, bildet die Annahme $\varphi(y)=e^y$, oder

$$e^y=1+\frac{y}{1}+\frac{y^2}{1.2}+\dots,$$

woraus für $y=l(1+x)$ folgt:

$$1+x=1+\frac{l(1+x)}{1}+\frac{[l(1+x)]^2}{1.2}+\dots$$

und wenn man hier die Formel (1) für $m=1, 2, 3$, etc. in Anwendung bringt, so ergiebt sich aus der Vergleichung der Coeffizienten von x^n:

$$\overset{n}{C}_1-\overset{n}{C}_2+\overset{n}{C}_3-\overset{n}{C}_4+\dots=0,$$

wie man auch leicht aus der Definition der Fakultätenkoeffizienten ableitet.

Nimmt man in der bekannten Reihe für $\cot\frac{1}{2}z$ für z die imaginäre Grösse $y\sqrt{-1}$, so erhält man leicht:

$$\frac{y}{e^y-1}=1-\frac{y}{2}+\frac{B_1y^2}{1.2}-\frac{B_3y^4}{1.2.3.4}+\dots,$$

worin B_1, B_3 etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Für $y=l(1+x)$ geht die linke Seite in $\frac{l(1+x)}{x}$ über, was sich unmittelbar leicht in eine Reihe verwandeln lässt. Nach beiderseitiger Coeffizientenvergleichung kommt man auf die Relation

$$B_1\overset{n}{C}_2-B_3\overset{n}{C}_4+B_5\overset{n}{C}_6-\dots=\frac{1.2.3\dots(n-1)}{2}\cdot\frac{n-1}{n+1},$$

die wegen der einfachen Verknüpfung der Fakultätenkoeffizienten mit den Bernoullischen Zahlen von Interesse ist.

Eine etwas allgemeinere Ausführung dieses Gedankens ist die folgende. Mittelst des Theoremes von Lagrange verwandle man die $p$te Potenz von der Wurzel der Gleichung

$$y=x\frac{y}{e^y-1}$$

Digitized by Google

m eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe. Da $y=l(1+x)$ die fragliche Wurzel ist, so ergiebt sich hieraus eine Reihe für $[l(1+x)]^p$, und zwar ist der Coeffizient von x^n in ihr

$$\frac{1}{1.2....n} \cdot \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \left[\left(\frac{y}{e^y-1} \right)^n p y^{p-1} \right], \text{ für } y=0.$$

Nach No. (1) dagegen ist der Coeffizient von x^n in der Entwickelung von $[l(1+x)]^p$:

$$\frac{(-1)^{n-p}}{(p+1)(p+2)......n} \overset{n}{C}_p.$$

Aus der Vergleichung beider Resultate ergiebt sich

$$(-1)^{n-p}.1.2...(p-1)\overset{n}{C}_p = D^{n-1}\left[y^{p-1}\left(\frac{y}{e^y-1}\right)^n\right],$$

wenn nach geschehener Differenziation $y=0$ genommen wird.

Nach der Regel für die Differenziation der Produkte kann man hieraus leicht die folgende Form ableiten:

$$(-1)^{n-p}\overset{n}{C}_p = (n-1)_{p-1} D^{n-p}\left(\frac{y}{e^y-1}\right)^n, \; y=0;$$

die vielleicht zu einer independenten Bestimmung der Fakultätenkoeffizienten führt.

XXXVI.

Untersuchungen über die Kurve, welche der Ort der Fusspunkte der Senkrechten ist, die man in einer Ellipse vom Mittelpunkte auf ihre Tangenten fällt.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

1) Sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

die Gleichung der Ellipse, so ist

$$(y^2+x^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \qquad (2)$$

die Gleichung der verlangten Kurve, in Bezug auf die nämlichen Koordinatenaxen. Diese Kurve besteht aus vier kongruenten Theilen, wovon der eine reicht

$$\text{von} \left\{ \begin{array}{l} x=a \text{ bis } x=0 \\ y=0 \quad ,, \quad y=b \end{array} \right\},$$

$$\text{der andere von} \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ bis } x=-a \\ y=b \quad ,, \quad y=0 \end{array} \right\},$$

$$\text{der dritte von} \left\{ \begin{array}{l} x=-a \text{ bis } x=0 \\ y=0 \quad ,, \quad y=-b \end{array} \right\},$$

$$\text{der vierte von} \left\{ \begin{array}{l} x=0 \text{ bis } x=a \\ y=-b \text{ bis } y=0 \end{array} \right\}.$$

Die Kurve ist leicht zu verzeichnen. Bedeutet $ACBDA$ (Taf. VII. Fig. 5.) die Ellipse (1), so mache man Winkel $COE = FOB$ und zeichne OF so, dass

$$OF = \frac{OB \, . \, OC}{OE},$$

alsdann wird F ein Punkt der verlangten Kurve sein.

Wäre $ACBD$ die Ellipse, deren Halbaxen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ wären, so hätte man:

$$OG \times OF = 1.$$

Die Kurve (2) ist immer ausser der Ellipse (1) und berührt sie bloss an den vier Endpunkten der Axen.

2) Die Ordinate y ist im ersten Viertel (von B bis C) in B gleich Null, in C gleich b; ist nun

$a^2 \begin{array}{l} < 2b^2 \\ > b^2 \end{array}$ so ist $y=b$ ein Maximum der Ordinate y und sie wächst also beständig von B bis C;

$a^2 \begin{array}{l} > b^2 \\ = 2b^2 \end{array}$ so ist für $x=0$, $y=b$ ebenfalls ein Maximum und y wächst gleichfalls von B bis C;

$a^2 \begin{array}{l} > b^2 \\ > 2b^2 \end{array}$ so ist für $x=\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2b^2}{4(a^2-b^2)}}$, $y=\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2-b^2}}$ ein Maximum und es wächst y von B bis zu einem Punkte H, dessen Abscisse $\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{a^2b^2}{4(a^2-b^2)}} < \frac{a}{2}$ ist; für $x=0$ ist $y=b$ ein Minimum und es nimmt also y wieder ab von H bis C, wo es $=b$ wird.

Digitized by Google

3) In den in der vorigen Nummer aufgezählten Punkten läuft die Tangente an die Kurve parallel mit der Axe der x; in den Punkten A und B aber mit der Axe der y.

4) Lässt man die Halbaxe OB (die grössere) wachsen, während OC unverändert bleibt, so erhält man eine Reihe der durch (2) ausgedrückten Kurve analoger Kurven. Die einhüllenden Kurven dieser aller sind zwei Kreise, deren Durchmesser nach Grösse und Lage die Linien OC und OD sind, welche Kreise beide durch den Mittelpunkt O gehen und alle die Kurven in den Punkten C und D berühren.

5) Die von der Kurve (2) umschlossene Fläche ist gleich der halben Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser gleich BC ist.

Der zwischen unserer Kurve und der Ellipse (1) liegende Raum ist gleich der halben Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser gleich $OB - OC$ ist.

Der Flächenausschnitt, welcher dem Winkel $BOF = t$ entspricht, wird ausgedrückt durch

$$\frac{a^2+b^2}{4}t+\frac{a^2-b^2}{8}\sin 2t.$$

6) Die Länge des zum Winkel t gehörigen Kurvenstücks wird ausgedrückt durch

$$\sqrt{\left(\frac{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}\right)}dt = a\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}}$$

$$-\frac{a^4-b^4}{a^3}\int_0^t \frac{\sin^2 t\,dt}{\sqrt{1-\frac{a^4-b^4}{a^4}\sin^2 t}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2 t}},$$

welche Integrale elliptische Integrale sind, deren Werth nach „Gudermann, Theorie der Modularfunktionen und Modularintegrale. §. 219.“ bestimmt wird. An diesem Orte wollen wir auf die nähere Bestimmung nicht eingehen.

7) Dreht sich unsere Kurve um die Achse der x, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Kubikinhalt:

$$\pi\left[\frac{ab^2}{2}+\frac{a^3}{3}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+2a^2-b^2}{b^2}\right)\right].$$

Der Kubikinhalt des Körperstücks, das durch die zwischen der Ellipse und der Kurve liegende Fläche erzeugt wird, ist:

$$\pi\left[\frac{a^3}{3}-\frac{5ab^2}{6}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\log\left(\frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+2a^2-b^2}{b^2}\right)\right].$$

8) Dreht sich unsere Kurve um eine Axe, die in ihrer Ebene,

Digitized by Google

aber so liegt, dass sie verlängert die Kurve nicht schneidet, und heisst k die Senkrechte von O aus auf die Axe, so ist der Kubikinhalt des entstehenden Körpers:

$$k\pi^2(a^2+b^2).$$

XXXVII.

Ueber das Grahamsche Kompensationspendel.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Bekanntlich besteht das Grahamsche Kompensationspendel in einer Pendelstange AB (Taf. VII. Fig. 6.), die auf dem Boden $DCFE$ eines cylindrischen Gefässes befestigt ist, in welchem sich Quecksilber in solcher Menge befindet, dass bei Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur die Schwingungsdauer des so zusammengesetzten Pendels nicht (oder kaum) geändert wird. Die Aufgabe ist, diese Quecksilbermenge zu bestimmen.

Ehe wir jedoch dieselbe in Betrachtung ziehen, wollen wir einige vorläufige Bemerkungen machen.

§. 1.

Sind eine Reihe materieller Punkte unabänderlich mit einander verbunden und es dreht sich das ganze System um eine Axe (auf deren einer Seite es sich befindet), so ist die Wirkung irgend einer Kraft, die an einem Punkte des Systems angebracht ist, in Bezug auf die Winkelgeschwindigkeit des Systems dieselbe, als wenn die Masse Σmr^2 (bei der m die Masse irgend eines Punktes, r seine Entfernung von der Drehaxe, und Σ die Summe aller mr^2 bezeichnet), in einem einzigen Punkte vereinigt wäre, der sich in der Entfernung 1 von der Drehaxe befindet. (Einen elementaren Beweis dieses Satzes sehe man z. B. in Pouillet-Müller Physik und Meteorologie. I. S. 202.) Die Summe Σmr^2 heisst das Trägheitsmoment des Systems. Ist dieses System von materiellen Punkten ein Körper, so wird Σmr^2 durch $\int r^2 dm$ ersetzt, ausgedehnt auf den ganzen Kärper. Wirken nun auf alle Punkte dieses Körpers gleiche, parallele beschleunigende Kräfte.

Digitized by Google

von denen jede durch φ ausgedrückt werde; so ist die Wirkung auf den Punkt m gleich $m\varphi$, und die Wirkung aller Kräfte auf den Körper ist die nämliche, als wenn eine einzige Kraft $\Sigma m\varphi r$ in der Entfernung 1 von der Drehaxe, parallel mit den frühern Kräften, angebracht wäre. Es wird also der Körper schwingen, wie ein einfaches Pendel von der Länge 1, dessen Masse (in einem einzigen Punkte vereinigt gedacht) $=\int r^2dm$ und dessen bewegende Kraft $=\int r\varphi dm$, dessen beschleunigende Kraft also $=\frac{\int r\varphi dm}{\int r^2dm}$ $=\varphi\frac{\int rdm}{\int r^2dm}$ ist. Nun ist die Dauer der Oszillation eines einfachen Pendels von der Länge 1, auf das die beschleunigende Kraft ψ wirkt, $=\pi\sqrt{\frac{1}{\psi}}$, demnach die Dauer der Oszillation des zusammengesetzten Pendels $=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{\varphi\int rdm}}=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{g\int rdm}}$, wenn g die bekannte Beschleunigung der Schwere ($=9^m,80896$) bezeichnet. Ist l die Länge des einfachen Pendels, das unter dem Einflusse der Schwere die nämliche Oszillationsdauer hat, so ist

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}=\pi\sqrt{\frac{\int r^2dm}{g\int rdm}},$$

also

$$l=\frac{\int r^2dm}{\int rdm}=\frac{\int r^2dm}{Mr_1},$$

wenn M die Masse des ganzen Körpers, r_1 die Entfernung des Schwerpunktes desselben von der Drehaxe bedeutet. Hieraus folgt:

$$\int r^2dm=lMr_1,$$

wodurch man das Trägheitsmoment eines Körpers ohne alle Rechnung bestimmen kann, wie diess schon Euler in seinen Anmerkungen zu Robins Artillerie, III. Anm. zum VIII. Satze, zeigt. (Man sehe auch Coriolis Lehrbuch der Mechanik fester Körper. §. 43. und Poisson Mechanik. II. §. 395.) In den obigen Formeln kann man auch das Element des Gewichtes einführen statt des Elements der Masse.

§. 2.

Sei nunmehr bei 0° Temperatur:

die Länge der Stange $AB=a$, ihr Radius $=r$;
die Dicke des Gefässbodens $CD=b$, der äussere Radius desselb. $=r_1$;
die Höhe des Gefässes $DG=c$, der innere Radius $=r_2$;
die Höhe des Quecksilbers im Gefässe $DH=f$;
das Gewicht der Volumeneinheit der Masse der Stange $AB=e$;
„ „ „ „ „ „ des Gefässes $=e_1$;
„ „ „ „ des Quecksilbers $=e_2$;

Digitized by Google

der Koeffizient der linearen Ausdehnung der Stange für 1° Temperaturerhöhung $=k$,
" " " " " des Gefässes für 1° Temperaturerhöhung $=k_1$,
" " " " " des Quecks. für 1° Temperaturerhöhung $=k_2$.

Berechnen wir nun zuerst $\int r dm$ bei 0°. Diese Grösse besteht aus folgenden Theilen:

a) für die Stange *AB* ist

$$\int r dm = \int_0^a x r^2 \pi e dx = \frac{r^2 \pi a^2 e}{2};$$

b) für den Boden des Gefässes

$$\int r dm = \int_a^{a+b} r_1^2 \pi e_1 x dx = \frac{r_1^2 \pi e_1}{2}(2ab+b^2);$$

c) für den obern Theil des Gefässes

$$\int r dm = \int_{a-c}^{a} (r_1^2 - r_2^2)\pi e_1 x dx = \frac{(r_1^2 - r_2^2)\pi e_1}{2}(2ac - c^2);$$

d) für das Quecksilber

$$\int r dm = \int_{a-f}^{a} (r_2^2 - r^2)\pi e_2 x dx = \frac{(r_2^2 - r^2)\pi e_2}{2}(2af - f^2).$$

Heisst jetzt *K* die Summe dieser Grössen, so ist für 0° Temperatur

$$\int r dm = K.$$

Erhöht sich nun die Temperatur zu t^0, so hat man in *K* zu setzen:

statt a nun $a(1+kt)$; statt $b:b(1+k_1t)$; statt $c:c(1+k_1t)$;
" r " $r(1+kt)$; " $r_1:r_1(1+k_1t)$; " $r_2:r_2(1+k_1t)$;
" e " $\frac{e}{1+3kt}$; " $e_1:\frac{e_1}{1+3k_1t}$; " $e_2:\frac{e_2}{1+3k_2t}$;

und um den Werth f' zu finden, den man statt f zu setzen hat, bemerke man, dass bei 0° das Gewicht des Quecksilbers $=(r_2^2 - r^2)\pi f e_2$ und bei $t^0:[r_2^2(1+2k_1t) - r^2(1+2kt)]\pi f' \frac{e_2}{1+3k_2t}$ ist, so dass

$$(r_2^2 - r_2)f = [r_2^2(1+2k_1t) - r^2(1+2kt)]\frac{f'}{1+3k_2t},$$

$$f' = \frac{(r_2^2 - r^2)f(1+3k_2t)}{r_2^2(1+2k_1t) - r^2(1+2kt)}.$$

Setzt man diese neuen Werthe in *K*, so erhält man den Werth *K'*, der $=\int r dm$ bei t^0 Temperatur ist.

Digitized by Google

Ganz eben so findet sich bei 0°:

$$\int r^2 dm = K_1 = \frac{\pi}{3}\{r^2a^3e + 3r_1^2e_1a^2b + 3r_1^2e_1ab^2 + r_1^2e_1b^3 + (r_1^2 - r_2^2)e_1(3a^2c - 3ac^2 + c^3) + (r_2^2 - r^2)e_2(3a^2f - 3af^2 + f^3)\}$$

und für t^0:

$$\int r^2 dm = K_1',$$

wenn K_1' aus K_1 eben so gebildet wird, wie K' aus K.

Die Länge des einfachen Pendels von gleicher Oszillationsdauer ist also bei 0°: $\frac{K_1}{K}$, bei t^0: $\frac{K_1'}{K'}$. Damit also Kompensation Statt finde, muss

$$K_1K' = KK_1'$$

sein, aus welcher Gleichung der Werth von f bestimmt werden muss. Sie ist im Allgemeinen in Bezug auf f vom 6ten Grade. Da t aus dieser Gleichung nicht verschwindet, so ist eine Kompensation unabhängig von dem Werthe von t nicht möglich; man wird also t innerhalb der Gränzen der Temperaturwechsel nehmen und alsdann f berechnen. Auch kann man für eine Reihe von Werthen von t die entsprechenden Werthe von $f(<c)$ berechnen, und, wenn ihre Differenzen gering sind, den Mittelwerth für f nehmen. Wären aber die Differenzen der verschiedenen Werthe von f bedeutend, so wäre eine Kompensation geradezu unmöglich.

XXXVIII.

Ueber die Bewegung einer Kugel im Laufe einer Windbüchse.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Um diese Bewegung zu bestimmen, soll vorausgesetzt werden, dass die Kugel gepflastert (umwickelt) sei, also fest aufsitze; ferner sei die Reibung derselben im Laufe $= b$ (so dass ein Gewicht von b Kilogr. nöthig wäre, sie aus dem Laufe zu ziehen); endlich möge der Widerstand der Luft ausser Acht gelassen werden.

Digitized by Google

Es habe nun der an den Lauf angeschraubte Kolben einen Inhalt $=k$ Kubikmeter, sei r der Halbmesser des Laufes in Metern, a seine Länge im nämlichen Maasse; ferner werde das Ventil, welches den, die gepresste Luft enthaltenden Kolben abschliesst, während τ Sekunden geöffnet und es sei die Elastizität der eingeschlossenen Luft gleich dem $n$fachen Drucke der Atmosphäre (bei mittlerem Barometerstande, den wir voraussetzen); endlich sei das Gewicht der Kugel $=p$ Kilogr.

Während der τ ersten Sekunden wirken auf die Kugel einerseits der Druck der im Kolben eingeschlossenen Luft und anderseits die Reibung und der atmosphärische Druck.

Sei demnach in vorstehender Figur AB die Länge des Laufes (a mètr.), AC der Weg, den die Kugel während der τ ersten Sekunden durchläuft, X der Punkt, in dem sie sich am Ende der Zeit t ($<\tau$) befindet, $AX=x$ mètres. Der Inhalt von AX ist $=r^2\pi x$, demnach die im Kolben enthaltene Luft in den Raum $k+r^2\pi x$ ausgedehnt; ihre Spannung beträgt also noch $\frac{nk}{k+r^2\pi x}$ Atmosphären, also ist der Druck auf die Kugel $=\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi x}$, wenn m gleich dem Drucke der atmosphärischen Luft auf 1 Quadratmeter ($m=10330$ Kilogr. ungefähr). Man hat also

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi x}-b-mr^2\pi}{p}\,g, \qquad (1)$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere ($=9{,}8088$ mètres) bezeichnet. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 p=mnkr^2\pi g\int_0^x\frac{dx}{k+r^2\pi x}-(b+mr^2\pi)gx,$$

$$\frac{1}{2}pv^2=mnkg\log\left(\frac{k+r^2\pi x}{k}\right)-(b+mr^2\pi)gx, \qquad (2)$$

wenn v die Geschwindigkeit im Punkte X bedeutet.

Hieraus folgt:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{a_1\log(1+b_1x)-c_1x},$$

wenn $a_1=\frac{2mnkg}{p}$, $b_1=\frac{r^2\pi}{k}$, $c_1=\frac{2(b+mr^2\pi)}{p}g$ ist, woraus folgt:

$$t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{a_1\log(1+b_1x)-c_1x}}. \qquad (3)$$

Da dieses Integral nicht allgemein bestimmt werden kann, so begnügen wir uns mit einer Näherung, indem bx immer klein sein wird. Treibt man die Näherung bis zur vierten Potenz von x, so

Digitized by Google

kommt man auf elliptische Funktionen; wir wollen uns jedoch mit der zweiten Potenz von x begnügen und setzen

$$\log(1+b_1x)=b_1x-\frac{b_1^2x^2}{2},$$

so dass

$$t=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{a_1b_1x-\frac{a_1b_1^2}{2}x^2-c_1x}}=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(a_1b_1-c_1)x-\frac{a_1b_1^2}{2}x^2}},$$

worin $a_1b_1>c_1$ und $2(a_1b_1-c_1)>a_1b_1^2x$ sein muss, d. h.

$$mnr^2\pi>b+r^2m\pi \text{ und } 2(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)>\frac{mnr^4\pi^2}{k}x.$$

Die erste Bedingung ist jedenfalls erfüllt, wenn Bewegung erfolgen soll, und die zweite zeigt, dass

$$x<\frac{2k(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)}{mnr^4\pi^2}$$

sein wird, was immer der Fall sein wird, wenn

$$a<\frac{2k(mnr^2\pi-b-mr^2\pi)}{mnr^4\pi^2}$$

ist. Setzen wir diess voraus, so ist

$$t=\frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right)+\frac{2\varrho}{b_1}\pi\sqrt{\frac{2}{a_1}},$$

wenn ϱ irgend eine ganze, positive Zahl ist, und man dann für $\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right)$ den kleinsten, positiven Werth nimmt. Von $x=0$ bis $x=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}$ ist $\varrho=0$, und da wir $x<\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}$ voraussetzen, so ist

$$t=\frac{2}{b}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a_1b_1^2x}{2(a_1b_1-c_1)}}\right), \tag{4}$$

$$x=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}\sin^2\left(\frac{b_1t}{2}\sqrt{\frac{a_1}{2}}\right). \tag{5}$$

Demnach ist die Länge

$$AC=\frac{2(a_1b_1-c_1)}{a_1b_1^2}\sin^2\left(\frac{b_1\tau}{2}\sqrt{\frac{a_1}{2}}\right)=\varrho. \tag{6}$$

Fände sich $\varrho>a$, so hätte die Kugel den Lauf schon vor Ende der Zeit τ verlassen, und es wäre die Zeit τ', während welcher sie im Laufe gewesen wäre:

Digitized by Google

$$\tau' = \frac{2}{b_1}\sqrt{\frac{2}{a_1}}.\text{arc}(\sin = \sqrt{\frac{a_1 b_1^2 a}{2(a_1 b_1 - c_1)}}),$$

und die Geschwindigkeit, mit welcher sie denselben verlassen:

$$\sqrt{\frac{2mnkg}{p}\log\left(\frac{k+r^2\pi a}{k}\right) - 2(b+mr^2\pi)\frac{ga}{p}}.$$

Ist aber $\varrho < a$, so bewegt sich die Kugel noch ferner im Laufe. Ist nun am Ende der Zeit t (vom Verfluss der Zeit τ an gerechnet) die Kugel in Y und heisst $CY = y$, so findet sich, wie oben:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{p}\left[\frac{mnkr^2\pi}{k+r^2\pi\varrho}.\frac{\varrho}{\varrho+y} - b - mr^2\pi\right],$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\frac{p}{g} = \frac{mnkr^2\pi\varrho}{k+r^2\pi\varrho}\log\left(\frac{\varrho+y}{\varrho}\right) - (b+mr^2\pi)y, \qquad (7)$$

welche Formel die Geschwindigkeit im Punkte Y bestimmt. Setzt man hierin $y = a - \varrho$, so erhält man endlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Kugel den Lauf verlässt, für die man findet:

$$\sqrt{\frac{2mnkr^2\pi\varrho g}{p(k+r^2\pi\varrho)}\log\left(\frac{a}{\varrho}\right) - \frac{2(b+mr^2\pi)}{p}g(a-\varrho)}, \qquad (8)$$

worin ϱ durch die Formel (6) bestimmt ist.

Diese Endgeschwindigkeit zu bestimmen, haben wir uns zur Aufgabe gesetzt.

XXXIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Oskar Werner,

Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

Folgendes ist zu beweisen.

Für jedes beliebige p und positive ganze r besteht die Relation

$$1)\quad \frac{p}{p+2}[(-1)^{r-1}.\frac{2.4.6....2r}{p(p-2)...(p-2r+2)}+1]$$

$$=1-\frac{2}{p-2}+\frac{2.4}{(p-2)(p-4)}-....(-1)^{r-1}.\frac{2.4.6....(2r-2)}{(p-2)(p-4)...(p-2r+2)}.$$

(Fortsetzung folgt.)

Digitized by Google

XL.

Ueber die Identität der Pyramidal- und prismatischen Schnitte mit den Verwandtschaften der Collineation und Affinität.

Von

Herrn Simon Spitzer

zu Wien.

§. 1.

Möbius stellt in seinem barycentrischen Calcul zuerst das Princip der Collineation auf; er sagt darüber Folgendes: Das Wesen dieser neuen Verwandtschaft besteht darin, dass bei zwei ebenen oder körperlichen Räumen jedem Punkte des einen Raumes ein Punkt in dem andern Raume dergestalt entspricht, dass, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Punkten, welche von dieser Geraden getroffen werden, die entsprechenden Punkte in dem andern Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können.

Aus dieser Erklärung leitet er die Eigenschaften dieser Figuren durch Rechnung ab. Andere vervollkommneten diesen Gegenstand theils durch analytische, theils durch geometrische Arbeiten, aber es herrschte darin kein eigentlicher, wahrer geometrischer Zusammenhang, es fehlte das Band, das sie inniger vereinigen sollte. Man hatte, um mich der Worte Steiner's zu bedienen, nur eine Sammlung von aus einander liegenden, wenn auch sehr scharfsinnigen Kunststücken, aber kein organisch zusammenhängendes Ganze zu Stande gebracht.

§. 2.

Ich habe versucht, den geometrischen Zusammenhang collinearverwandter Figuren zu erforschen; ob es mir gelungen, mögen Sachverständige entscheiden. — Wenn man eine Pyramide durch Ebenen schneidet, so haben je zwei dadurch entstehende Schnitte eine solche Relation gegen einander, dass jedem Punkte des einen Schnitts ein Punkt

Digitized by Google

des andern entspricht, dergestalt, dass wenn drei Punkte des einen Schnitts in gerader Linie liegen, die drei ihnen entsprechenden Punkte des andern Schnitts ebenfalls in gerader Linie enthalten sind; daher entspricht auch jeder Geraden des einen eine Gerade des andern Schnitts. Man nennt solche Systeme von Figuren, die diese Eigenschaft haben, nach Möbius, collinear-verwandte oder collineare Figuren.

§. 3.

Wird die Pyramide sammt ihren Schnitten auf irgend eine Ebene projicirt, so sind auch die Projectionen der Schnitte collinear verwandt, denn nach den Gesetzen der Projectionslehre entspricht jedem Punkte im Raume ein Punkt der Projection, und wenn im Raume drei Punkte in einer Geraden liegen, so liegen die Projectionen dieser drei Punkte auch in einer Geraden. Ja, sogar zwei Projectionen Eines Schnittes sind collinear-verwandt, denn die beiden Projectionen einer Geraden sind im Allgemeinen wieder Gerade, und jedem Punkte der einen Geraden entspricht ein Punkt der andern. Liegt ein Schnitt in einer projicirenden Ebene, so ist die Projection desselben eine Gerade, daher kann auch eine Gerade mit irgend einer Figur collinear-verwandt sein.

§. 4.

Man kann daher bei der Entwickelung der Gesetze der collinearen Figuren sowohl von den Schnitten der Pyramide als ihren Projectionen ausgehen, die bei den erstern gefundenen, so oft es möglich ist, auf letztere ausdehnen, und umgekehrt. Auf diese Art lernt man zugleich den innern Zusammenhang der räumlichen Grössen und ihrer Projectionen besser kennen.

§. 5.

Man nennt den Scheitel der Pyramide das Collineationscentrum, die Durchschnittslinie der Ebenen beider Systeme die Collineationsachse. Dieselben Benennungen gelten auch für ihre Projectionen. Hier kann der spezielle Fall eintreten, dass die Collineationsachse in einen Punkt übergeht.

§. 6.

Nach diesen Erklärungen wird man im Stande sein, zu irgend einer Geraden *ab* (Taf. IX. Fig. 1.) des Systems I. ihre entsprechende *AB* des Systems II. zu finden. Man lege nämlich durch *O* und *ab* eine Ebene; der Schnitt dieser mit der Ebene II. gibt die verlangte Gerade. Eben so kann man zu irgend einem Punkte *c* des Systems I. seinen entsprechenden Punkt *C* des Systems II. finden; man verbinde nur *O* mit *c*, und verlängere diesen Strahl so lange, bis er die Ebene II. im verlangten Punkte *C* schneidet.

§. 7.

Je zwei entsprechende Gerade zweier collinear-verwandten Figuren schneiden sich in der Collineationsachse; denn betrachten wir irgend zwei entsprechende Gerade, so liegen sie nach dem

Digitized by Google

Vorhergehenden in einer Ebene, sie müssen sich daher schneiden. Ihr Durchschnittspunkt liegt aber, weil er der Geraden des ersten Systems angehört, in der Ebene des ersten Systems, und weil er auch der Geraden des zweiten Systems angehört, in der Ebene des zweiten Systems; er gehört also beiden Ebenen an, daher liegt er im Durchschnitt beider, d. i. in der Collineationsachse. Es schneiden sich daher auch je zwei entsprechende Projectionen der Geraden in einer Geraden; was besonders für die Geometrie descriptive bemerkenswerth ist.

§. 8.

Daraus folgt: Ist in Taf. IX. Fig. 2. von zwei Figuren die eine derselben *ABCD*, die Collineationsachse *MN*, und ein der erstern entsprechender Punkt *a* gegeben, so lässt sich mit Leichtigkeit die mit der ersten collinear-verwandte bloss mit Hülfe des Lineals construiren. Man verlängere nämlich *AD*, bis die Collineationsachse in 1 geschnitten wird, so ist 1 auch ein Punkt der Linie *ad* der entsprechenden collinear-verwandten Figur. Verbindet man 1 mit *a*, so ist *ad* die der *AD* entsprechende Gerade Verlängert man dann *AB* bis zum Durchschnitt 2 mit der Collineationsachse, so ist 2 wieder ein Punkt der *ab*; verbindet man daher 2 mit *a*, so ist *ab* die der *AB* entsprechende Gerade; verlängert man *BC* bis 3, verbindet man 3 mit *b*, so erhält man *bc*. u. s. f.

§. 9.

Unmittelbar daraus folgen wieder eine Reihe merkwürdiger Sätze, von denen ich nur folgenden anführe: Drehen sich die Seiten eines *n*ecks um *n* feste Punkte, die in einer Geraden liegen, und bewegen sich $n-1$ Ecken desselben auf eben so vielen festen Geraden, welche sich in einem und demselben Punkte *O* durchschneiden, so bewegen sich auch die übrige Ecke und alle andern entsprechenden Punkte in andern festen Geraden, welche mit jenen den Durchschnitt *O* gemein haben.

§. 10.

Unter allen Paaren entsprechender Geraden zeichnen sich zwei besonders aus, man nennt sie die Gegenachsen. Denkt man sich nämlich durch die Spitze *O* eine Ebene parallel zu einer der beiden Ebenen gelegt, so kann sie diese Ebene nicht schneiden, wohl aber die andere, zu der sie nicht parallel ist; und zwar in einer Geraden parallel zur Collineationsachse. Die dem jedesmaligen Schnitte (Gegenachse) entsprechende Gerade liegt unendlich entfernt.

§. 11.

Zieht man in einem Systeme mehrere parallele Gerade *ab*, *a'b'*, *a''b''*,.... (Taf. IX. Fig. 3.), legt dann durch jede derselben und durch das Collineationscentrum Ebenen, die sich in einer Geraden *A''B''* schneiden, die zu den parallelen Geraden parallel ist, und

Digitized by Google

sucht man den Durchschnitt B'' dieser Geraden mit der andern Ebene, so ist B'' (in der Perspektivlehre unter dem Namen Begegnungspunkt bekannt), da er nicht nur im Durchschnitte der Ebenen $A''ab$, $A''a'b'$, $A''a''b''$,...., sondern auch in der Ebene II. liegt, der Durchschnitt jener Geraden, die den parallelen Geraden ab, $a'b'$, $a''b''$,.... entsprechen. Aendern diese parallelen Geraden ihre Richtung, so ändert auch $A''B''$ ihre Richtung, sie bleibt aber immer in der Ebene $A''B''B'$. Man sieht daraus, dass der Ort der Durchschnittspunkte derjenigen Geraden im System II., welche parallelen Geraden im System I. entsprechen, die Gegenachse MN des Systems II. ist, oder auch, dass jeder Reihe paralleler Geraden in dem einen Systeme ein Punkt in der Gegenachse entspricht. Eben so ist der Ort der Durchschnittspunkte der Geraden im Systeme I., die parallelen Geraden im Systeme II. entsprechen, die Gegenachse des Systems I. Dieser Satz lässt sich auch sehr vortheilhaft für die Projectionen der Pyramidalschnitte übertragen.

§. 12.

Wir können die collinearen Figuren auch noch auf eine zweite Art betrachten. Es sei ABC(Taf. X. Fig. 4.) die Grundfläche und O der Scheitel einer Pyramide; denkt man sich diese Grundfläche ABC als fest, und die Spitze O der Pyramide als veränderlich, so werden dadurch nur immer andere und andere Pyramiden beschrieben. Schneidet man sie alle durch eine Ebene, so sind die dadurch entstehenden Figuren collinear-verwandt, denn es entspricht jedem Punkte m des einen Systems ein Punkt m' des andern; und diese waren eigentlich allgemeine Betrachtung der Geometer.

§. 13.

Wir wollen hier zuerst die allgemeinen Benennungen festsetzen, und dann einige Gesetze dieser Figuren entwickeln.

Der Durchschnitt der Schnittebene mit der Ebene ABC (Taf. X. Fig. 4.) ist die Collineationsachse, auf ihr schneiden sich alle entsprechenden Geraden, es möge der Punkt O' sich nach was immer für einem Gesetze bewegt haben, die Figuren sind einander wenigstens zu je zweien collinear-liegend, und haben daher einen Punkt (Collineationscentrum), wo sich die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte schneiden. Die Beweise dieser Sätze sind so einfach, dass ich sie ganz übergehe. Legt man durch O und O' Ebenen parallel zur Schnittebene, so erhält man im Durchschnitt dieser Ebenen mit der Ebene ABC die Gegenachse.

§. 14.

Bewegt sich der Punkt O' in einer Geraden, so haben alle Figuren nur Ein Collineationscentrum, die Punkte $aa'a''a'''$.... liegen in einer Geraden, eben so $bb'b''b'''$.... u. s. w., denn sowohl AO, AO', AO''.... liegen in einer Ebene, als auch a, a', a''...., daher der Durchschnitt beider in einer Geraden, die durch die gemeinschaftlichen Punkte $aa'a''$... beider Ebenen geht.

Digitized by Google

§. 15.

Hinsichtlich der besondern Lage des Collineationscentrums und der Collineationsachse können folgende Fälle eintreten:

1) Es kann das Collineationscentrum unendlich entfernt sein; dann geht die Pyramide in ein Prisma über, die Durchschnittsfiguren stehen in einfacheren Relationen, man sagt, sie seien affin, oder stehen in der Verwandtschaft der Affinität.

2) Es kann die Collineationsachse unendlich weit entfernt sein; dann sind die schneidenden Ebenen parallel, die Schnitte sind ähnlich, können aber auch congruent sein. Die Spitze der Pyramide oder ihre Projection nennt man hier Aehnlichkeitspunkt.

3) Es können die Collineationsachse und das Collineationscentrum unendlich entfernt sein, d. h. es wird ein Prisma von parallelen Ebenen geschnitten; die Durchschnittsfiguren sind dann nur congruent.

Aehnliche Fälle lassen sich auch bei der zweiten Betrachtungsweise anführen.

§. 16.

Wir haben bisher die collinearen Figuren in der Lage betrachtet, wie sie unmittelbar aus dem Pyramidalschnitt entstanden sind, oder in der Lage der Projectionen dieser ihrer Schnitte. Man nennt sie so eigentlich collinear-liegend. Denken wir uns nun die Figuren in einer solchen Lage, dass nicht mehr, wenn man je zwei entsprechende Punkte mit einander verbindet, sich alle Verbindungslinien in einem Punkte schneiden, so ist die Frage, wie findet man da zu jedem Punkte oder zu jeder Geraden des einen Systems den entsprechenden Punkt oder die entsprechende Gerade im andern, wie kann man die Figuren wieder in ihre ursprüngliche Lage bringen, oder hauptsächlich: welche Gesetze finden zwischen den Elementen beider Systeme statt? Ich will hier ein für allemal bemerken, dass die Gesetze, die ich hier aus einer Betrachtungsweise ableite, sich auch auf die andern anwenden lassen.

§. 17.

Es seien in Taf. IX. Fig. 5. *ABCD* und *abcd* vier einander entsprechende Punkte in entsprechenden Geraden beider Systeme liegend, so ist wegen des Strahlbüschels *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, der von den zwei Geraden *ad* und *AD* geschnitten wird:

$$\frac{ab}{cb}:\frac{ad}{cd}=\frac{AB}{CB}:\frac{AD}{CD},$$

und diess ist das Gesetz, das zwischen je vier in einer Geraden liegenden, einander entsprechenden Punkten herrscht, und das, wie man sieht, auch dann noch stattfinden muss, wenn die beiden Systeme irgend eine andere Lage haben, denn es hängt bloss von den Abschnitten der Punkte *abcd* und *ABCD* ab.

Digitized by Google

§. 18.

Sind daher vier in gerader Linie liegende Punkte $ABCD$ (Taf. IX. Fig. 6.) des einen Systems und drei ihnen entsprechende abc des andern Systems gegeben, so kann man den vierten d finden; denn in obiger Proportion sind die drei ersten Glieder gegeben, und es sei das vierte unbekannte Glied $\frac{ad}{cd}=m$, so ist d vollkommen bestimmt. Durch Construction findet man ihn auf folgende Art.

Man ziehe zwei Gerade unter einem beliebigen Winkel, trage auf der einen die Punkte $A'B'C'D'$ und auf der andern die Punkte $a'b'c'$ auf, so dass $A'B'=AB$, $B'C'=BC$, $C'D'=CD$, $a'b'=ab$, $b'c'=bc$ ist, verbinde b' mit B', c' mit C', den Durchschnitt O mit D' verbunden, schneidet die $a'c'$ in d', den man dann auf der gegebenen Geraden aufträgt, so dass $cd=c'd'$ ist. Behufs des Beweises ziehe man noch OA', so hat man einen Strahlbüschel, der von den zwei Geraden $A'D'$ und $a'd'$ geschnitten wird; daher findet die oben aufgestellte Proportion statt. Für affine Figuren, wo die Strahlen aA, bB, ... parallel sind, muss sich noch nebstdem verhalten: $\frac{ab}{AB}=\frac{bc}{BC}=\frac{cd}{CD}=$.... Man kann daher bei affinen Figuren aus drei in gerader Linie liegenden Punkten ABC des einen Systems und aus zwei ihnen entsprechenden ab des andern, den dritten Punkt c finden, und zwar durch Construction auf folgende Arten.

1) Man ziehe in Taf. IX. Fig. 7. α. wieder zwei Gerade unter einem beliebigen Winkel, trage auf dieselbe Art wie vorher die Punkte $A'B'C'a'b'$ auf, verbinde B' mit b' und ziehe durch C' eine Parallele zu $B'b'$, so ist c' der verlangte Punkt, oder:

2) Man ziehe in Taf. IX. Fig. 7. β. zwei parallele Gerade, trage wieder die Punkte $A'B'C'a'b'$ auf, verbinde A' mit a', B' mit b' und C' mit dem Durchschnitte O, so ist c' der verlangte Punkt.

Die Beweise beider Constructionen ergeben sich aus den Gesetzen der projectivischen Beziehungen ebener Strahlbüschel.

§. 19.

Schon aus diesen Constructionen ergeben sich die folgenden Sätze:

1) Sind zwei Gerade und in jeder derselben drei beliebige Punkte gegeben, so können diese Geraden immer als collineare Gerade und die drei Paare von Punkten als entsprechende collineare Punkte angesehen werden.

2) Sind zwei Gerade und in jeder derselben zwei beliebige Punkte gegeben, so können diese Geraden immer als affine Gerade und die zwei Paare von Punkten als entsprechende affine Punkte angesehen werden.

Denn nimmt man in der einen Geraden noch einen beliebigen Punkt an, so kann man den entsprechenden Punkt in der andern Geraden nach dem Vorhergehenden finden.

Digitized by Google

§. 20.

Es sind fünf Punkte *ABCDE* (Taf. X. Fig. 8.) und vier ihnen entsprechende Punkte *abcd* einer collinearen Figur gegeben, man soll den Punkt *e*, welcher dem Punkte *E* collinear ist, finden. Man bilde durch Verbindung der Punkte *ABCD* und *abcd* die beiden vollständigen Vierecke, ziehe die *AE*, die die *FB* in *M* schneidet, suche den dem Punkte *M* entsprechenden Punkt im andern Systeme (*m*), verbinde *a* mit *m*, so ist diese Verbindungslinie der Ort des Punktes *e*. Verbindet man nun z. B. auch *G* mit *E*, wodurch man *N* erhält, und sucht den entsprechenden *n*, so ist auch *gn* der Ort des Punktes *e*, daher ist *e* im Durchschnitt beider Oerter.

§. 21.

Es sind vier Punkte *ABCD* (Taf. X. Fig. 9.) und drei ihnen entsprechende Punkte *abc* einer affinen Figur gegeben, man soll den Punkt *d*, welcher dem Punkte *D* affin ist, finden. Man bilde durch Verbindung der vier Punkte *ABCD* das vollständige Viereck, so erhält man die zwei neuen Punkte *M* und *N*, suche die entsprechenden affinen Punkte *m* und *n* in den Geraden *ab* und *bc*, verbinde *m* mit *c* und *n* mit *a*, so ist im Durchschnitt beider der verlangte Punkt *d*.

Es können daher im Allgemeinen zwei beliebige Vierecke als collinear und zwei beliebige Dreiecke als affin angesehen werden.

§. 22.

Durch diese einfache Betrachtung der Collineation und Affinität der Figuren als Pyramidalschnitte und durch diese wenigen Sätze ist man im Stande, eine zahlreiche Anzahl von Aufgaben zu lösen, und überall den geistigen, geometrischen Zusammenhang mit der grössten Allgemeinheit zu vereinen. Sätze, die sonst lange Beweise bedurften, werden dadurch von selbst klar, das schönste, die Kegel- und Cylinderschnitte erscheinen nur als einzelne, spezielle Fälle. Wir wollen nun gleich versuchen, mehrere Aufgaben mit Hülfe unserer gewonnenen Sätze zu lösen.

1) Es sind zwei Systeme collinear-liegender Punkte gegeben, man soll die Gegenachsen beider Systeme construiren.

Um diese Aufgabe zu lösen, suche man zuerst die Collineationsachse; sie geht nach §. 7. durch die Durchschnittspunkte entsprechender Geraden; verlängert man daher in Taf. X. Fig. 10. *ab* und *AB*, *ac* und *AC*, so sind *M* sowohl als *N* Punkte derselben, daher *MN* die Collineationsachse. Die Gegenachsen liegen nun mit ihr parallel, und zwar in den Durchschnitten der, durch *O*, zu jeder der beiden Ebenen parallel gelegten Ebene; zieht man nun durch *O* z. B. zur *ab* und *ac* Parallelen, und verlängert sie so lange, bis sie die *AB* und *AC* schneiden, so erhält man die Gegenachse des Systems *ABC*. Eben so erhält man die Gegenachse des Systems *abc*.

Digitized by Google

2) Es ist eine Figur des einen Systems, die Collineationsachse, das Collineationscentrum und die Gegenachse des andern Systems gegeben. Man soll die mit der gegebenen Figur collinear-liegende Figur durch Construction finden. — Es sei *abcd* (Taf. IX. Fig. 3.) die gegebene Figur, *Pφ* die Collineationsachse und *MN* die Gegenachse der zu bestimmenden collinearen Figur. Wir entwickelten in §. 11. den Satz: Wenn man durch A'' eine Parallele zu irgend einer Geraden, z. B. *ab* zieht, bis sie die Gegenachse in B'' schneidet, so ist dieser Punkt B'' der geometrische Ort der Durchschnittspunkte jener Geraden im andern Systeme, die zu *ab* parallelen Geraden entsprechen. Wollen wir daher die der *ab* entsprechende Gerade im andern Systeme erhalten, so ziehen wir durch das Collineationscentrum eine zu *ab* parallele Gerade, verlängern dieselbe bis sie die Gegenachse in B'' schneidet, so ist B'' ein Punkt der zu suchenden Geraden. Die *ab* schneidet aber auch die Collineationsachse in einem Punkte, der ebenfalls der zu suchenden Geraden gehört, weil je zwei entsprechende Gerade sich in der Collineationsachse schneiden, es sind daher von der zu suchenden Geraden zwei Punkte bekannt, daher auch die Gerade. Fährt man so fort, so erhält man alle, den Geraden *ab*, *bd*, *dc* u. s. w. collinear liegenden Geraden, daher auch zugleich die collineare Figur.

3) Es sind zwei collineare Figuren gegeben, die nicht collinear liegen, man soll das Collineationscentrum und die Collineationsachse durch Construction bestimmen. Nehmen wir an, wir hätten bereits die Gegenachsen gefunden, ziehen wir dann aus einem Punkte B'' (Taf. IX. Fig. 3.) der einen Gegenachse zwei Strahlen $B''\alpha$, $B''\beta$, so werden die entsprechenden Geraden $a'b'$, $a''b''$ im andern Systeme einander parallel sein und von der Collineationsachse ein eben so grosses Stück $\alpha\beta$ abschneiden, als die zwei Strahlen abschnitten. Um daher unsere Aufgabe zu lösen, müssen wir zuerst die Gegenachsen construiren, das geschieht auf folgende Art: Es seien in Taf. X. Fig. 11. *ABCD* und *abcd* collinear-verwandt; ich ziehe in dem einen Systeme *ABCD* zwei Paar zu einander parallele Gerade *MN*, $M'N'$ und *MP*, $M'P'$, und bestimme in der collinearen Figur die entsprechenden Geraden (indem ich zuerst zu den fünf Punkten *ABCDM* und *abcd* den dem *M* entsprechenden *m* suche, dann eben so *n*, *p*,....); in den Durchschnittspunkten *R*, *S* sind zwei Punkte der Gegenachse enthalten. Hat man auf diese Art die Gegenachsen der Figur *ABCD* (Taf. IX. Fig. 3.) bestimmt, so kann man das Stück $\alpha\beta$ leicht finden; man braucht nur die parallelen Geraden *ab*, $a'b'$ über die Gegenachse dieses Systems zu verlängern. Um noch $B''\alpha$ zu finden, denken wir uns die Ebene I. parallel zu sich selbst fortbewegt, oder bloss eine Gerade $P'\varphi'$ parallel zur Gegenachse gezogen, so sieht man, dass $\alpha\beta : \alpha'\beta' = \alpha B'' : \alpha' B''$, woraus man $\alpha B''$ finden kann. Trägt man $\alpha B''$ nun von B'' aus auf und zieht die Parallele zur Gegenachse, so erhält man die Collineationsachse. Sucht man im andern Systeme auch die Collineationsachse, legt dann beide Systeme über einander, dass sich beide Collineationsachsen decken, und zwar so, dass sich die gleichliegenden Geraden in einem Punkte derselben schneiden: so sind die Figuren collinear-liegend. Das Collineationscentrum findet man durch Verbindung entsprechender Punkte.

Digitized by Google

Ich will nur noch erwähnen, dass fast alle Sätze aus Steiner's systematischer Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander sich unmittelbar auf die collinear-verwandten Figuren anwenden lassen.

XLI.

Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Statik und über einige geometrische und statische Sätze von der Pyramide und den eckigen Körpern überhaupt.

Von

dem Herausgeber.

§. 1.

Ich will zuerst den folgenden Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn beliebige Kräfte im Raume unter einander im Gleichgewichte sind, so sind immer auch deren Projectionen auf einer jeden beliebigen Ebene unter einander im Gleichgewichte.

Beweis.

Die gegebenen Kräfte seien

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots;$$

die Coordinaten ihrer Angriffspunkte in Beziehung auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem seien

$$x,\ y,\ z;\quad x_1,\ y_1,\ z_1;\quad x_2,\ y_2,\ z_2;\quad x_3,\ y_3,\ z_3;\ldots;$$

und

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;\ldots$$

Digitized by Google

seien die auf bekannte Weise genommenen Bestimmungswinkel ihrer Richtungen.

Ist nun

$$1)\quad AX+BY+CZ+D=0$$

die Gleichung einer beliebigen Ebene, und werden durch

$$\xi,\ \eta,\ \zeta;\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2;\ \xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3;\ldots.$$

die Coordinaten der Projectionen der Punkte

$$(xyz),\ (x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3),\ldots.$$

auf dieser Ebene bezeichnet; so ist, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\quad \begin{cases} \Delta\ =Ax+By+Cz+D, \\ \Delta_1=Ax_1+By_1+Cz_1+D, \\ \Delta_2=Ax_2+By_2+Cz_2+D, \\ \Delta_3=Ax_3+By_3+Cz_3+D, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

setzen, nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$3)\quad \begin{cases} \xi=x-\frac{A\Delta}{A^2+B^2+C^2},\ \eta=y-\frac{B\Delta}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta=z-\frac{C\Delta}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_1=x_1-\frac{A\Delta_1}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_1=y_1-\frac{B\Delta_1}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_1=z_1-\frac{C\Delta_1}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_2=x_2-\frac{A\Delta_2}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_2=y_2-\frac{B\Delta_2}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_2=z_2-\frac{C\Delta_2}{A^2+B^2+C^2}; \\ \xi_3=x_3-\frac{A\Delta_3}{A^2+B^2+C^2},\ \eta_3=y_3-\frac{B\Delta_3}{A^2+B^2+C^2},\ \zeta_3=z_3-\frac{C\Delta_3}{A^2+B^2+C^2}; \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir nun die Projectionen der Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Ebene respective durch

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ldots.$$

und die 90° nicht übersteigenden Neigungswinkel ihrer Richtungen gegen die in Rede stehende Ebene respective durch

$$i,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ldots.;$$

so ist

$$4)\quad \Pi=P\cos i,\ \Pi_1=P_1\cos i_1,\ \Pi_2=P_2\cos i_2,\ \Pi_3=P_3\cos i_3,\ldots.$$

Bezeichnen wir aber die auf gewöhnliche Weise genommenen Bestimmungswinkel der Richtungen der Kräfte

Digitized by Google

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4,\ldots.$$

durch

$$\varphi,\psi,\chi;\ \ \varphi_1,\psi_1,\chi_1;\ \ \varphi_2,\psi_2,\chi_2;\ \ \varphi_3,\psi_3,\chi_3;\ldots;$$

so ist, wie ich in der Abhandlung Archiv. Thl. VI. Nr. XXXVIII. 23) und 24) gezeigt habe, wenn wie dort der Kürze wegen

$$5)\ K=\sqrt{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}$$

gesetzt wird:

$$6)\left\{\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{(A^2+B^2+C^2)\cos\alpha-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)A}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\psi&=\frac{(A^2+B^2+C^2)\cos\beta-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)B}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\chi&=\frac{(A^2+B^2+C^2)\cos\gamma-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)C}{K\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}\right.$$

und

$$7)\ \cos i=\frac{K}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

und ebenso für die andern Kräfte.

Also ist

$$\cos i\cos\varphi=\cos\alpha-\frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma),$$

$$\cos i\cos\psi=\cos\beta-\frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma),$$

$$\cos i\cos\chi=\cos\gamma-\frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)$$

und, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned}&\cos i(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)\\ =&\frac{C}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{aligned}A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\ +C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{aligned}\right\}\\ &-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(A\cos\beta-B\cos\alpha),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\cos i(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)\\ =&\frac{A}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{aligned}A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\ +C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{aligned}\right\}\\ &-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(B\cos\gamma-C\cos\beta),\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\cos i(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)$$
$$=\frac{B}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(C\cos\alpha-A\cos\gamma).$$

Also ist offenbar in einer bekannten Bezeichnung

8)

$$\Sigma\Pi\cos\varphi=\Sigma P\cos\alpha-\frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma).$$
$$\Sigma\Pi\cos\psi=\Sigma P\cos\beta-\frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma).$$
$$\Sigma\Pi\cos\chi=\Sigma P\cos\gamma-\frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha+B\Sigma P\cos\beta+C\Sigma P\cos\gamma)$$

und

9)

$$\Sigma\Pi(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)$$
$$=\frac{C}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\beta-B\Sigma P\cos\alpha),$$

$$\Sigma\Pi(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)$$
$$=\frac{A}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(B\Sigma P\cos\gamma-C\Sigma P\cos\beta),$$

$$\Sigma\Pi(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)$$
$$=\frac{B}{A^2+B^2+C^2}\left\{\begin{array}{r}A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\+C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{D}{A^2+B^2+C^2}(C\Sigma P\cos\alpha-A\Sigma P\cos\gamma).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte sind, so ist nach den Grundlehren der Statik bekanntlich

Digitized by Google

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0;$$
$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

Also ist nach dem Obigen auch

$$\Sigma\Pi\cos\varphi=0,\ \Sigma\Pi\cos\psi=0,\ \Sigma\Pi\cos\chi=0;$$
$$\Sigma\Pi(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)=0,$$
$$\Sigma\Pi(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)=0,$$
$$\Sigma\Pi(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)=0;$$

und nach den Grundlehren der Statik sind folglich auch die Kräfte

$$\Pi,\ \Pi_1,\ \Pi_2,\ \Pi_3,\ \Pi_4, \ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte, wie bewiesen werden sollte.

Wenn man die Projectionsebene als Ebene der xy annimmt, so erfordert der Beweis des obigen Satzes weniger Aufwand von Calcul wie vorher; derselbe ist jedoch hier absichtlich, namentlich auch des Folgenden wegen, in möglichst grosser Allgemeinheit geführt worden.

§. 2.

Für an einem und demselben Punkte wirkende Kräfte lässt sich nun aber auch der folgende Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn an einem und demselben Punkte beliebig viele Kräfte wirken, und deren Projectionen auf zwei beliebigen sich schneidenden Ebenen, jedes dieser beiden Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind; so sind jederzeit die gegebenen Kräfte selbst unter einander im Gleichgewichte.

Beweis.

Wir wollen alle im vorhergehenden Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten, und nur annehmen, dass die Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

sämmtlich an einem und demselben Punkte wirken sollen. Sind dann

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0$$

die Gleichungen der beiden sich schneidenden Ebenen, von denen oben im Satze die Rede gewesen ist; so ist nach §. 1. 8):

$$\Sigma\Pi\cos\varphi = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma).$$

$$\Sigma\Pi\cos\psi = \Sigma P\cos\beta - \frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma).$$

$$\Sigma\Pi\cos\chi = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma);$$

und auf ganz ähnliche Art für die zweite Projectionsebene in einer leicht durch sich selbst verständlichen Bezeichnung:

$$\Sigma\Pi'\cos\varphi' = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma).$$

$$\Sigma\Pi'\cos\psi' = \Sigma P\cos\beta - \frac{B'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma).$$

$$\Sigma\Pi'\cos\chi' = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma).$$

Weil nun nach der Voraussetzung die Projectionen der gegebenen Kräfte auf einer jeden der beiden Projectionsebenen unter einander im Gleichgewichte sind; so ist nach den Grundlehren der Statik

$$\Sigma\Pi\cos\varphi = 0,\ \ \Sigma\Pi\cos\psi = 0,\ \ \Sigma\Pi\cos\chi = 0$$

und

$$\Sigma\Pi'\cos\varphi' = 0,\ \ \Sigma\Pi'\cos\psi' = 0,\ \ \Sigma\Pi'\cos\chi' = 0;$$

also nach dem Obigen

$$0 = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma).$$

$$0 = \Sigma P\cos\beta - \frac{B}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C}{A^2+B^2+C^2}(A\Sigma P\cos\alpha + B\Sigma P\cos\beta + C\Sigma P\cos\gamma)$$

und

$$0 = \Sigma P\cos\alpha - \frac{A'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma).$$

$$0 = \Sigma P\cos\beta - \frac{B'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma),$$

$$0 = \Sigma P\cos\gamma - \frac{C'}{A'^2+B'^2+C'^2}(A'\Sigma P\cos\alpha + B'\Sigma P\cos\beta + C'\Sigma P\cos\gamma);$$

woraus sich leicht die Gleichungen

Digitized by Google

$$A\Sigma P\cos\beta = B\Sigma P\cos\alpha,$$
$$B\Sigma P\cos\gamma = C\Sigma P\cos\beta,$$
$$C\Sigma P\cos\alpha = A\Sigma P\cos\gamma$$

und

$$A'\Sigma P\cos\beta = B'\Sigma P\cos\alpha,$$
$$B'\Sigma P\cos\gamma = C'\Sigma P\cos\beta,$$
$$C'\Sigma P\cos\alpha = A'\Sigma P\cos\gamma$$

ergeben. Nimmt man nun die erste der beiden durch die Gleichungen

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

charakterisirten Ebenen als Ebene der xy an, was offenbar verstattet ist; so ist

$$A=0,\ B=0,\ C=1$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0;$$

also ferner nach dem Obigen

$$A'\Sigma P\cos\gamma=0,\ B'\Sigma P\cos\gamma=0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung die beiden Projectionsebenen sich schneiden sollen, so kann offenbar nicht zugleich $A'=0$, $B'=0$ sein, und es ist also nach dem Vorhergehenden

$$\Sigma P\cos\gamma = 0.$$

Daher ist jetzt

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0;$$

und nach den Grundlehren der Statik sind folglich die an einem und demselben Punkte wirkenden Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte, wie bewiesen werden sollte.

§. 3.

Für auf eine ganz beliebige Weise im Raume wirkende Kräfte lässt sich ferner der folgende Satz beweisen:

Lehrsatz.

Wenn Kräfte auf eine beliebige Weise im Raume wirken und deren Projectionen auf drei sich in *einem*

Punkte schneidenden Ebenen, jedes dieser drei Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind; so sind jederzeit die gegebenen Kräfte selbst unter einander im Gleichgewichte.

B e w e i s.

Wenn die Gleichungen der drei sich in einem Punkte schneidenden Ebenen

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0$$

sind; so gelangt man zuvörderst ganz auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Paragraphen zu den drei folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung die Projectionen der gegebenen Kräfte auf jeder der drei Projectionsebenen für sich unter einander im Gleichgewichte sind, so ist nach den Grundlehren der Statik bekanntlich

$$\Sigma \Pi(\xi\cos\psi-\eta\cos\varphi)=0,$$
$$\Sigma \Pi(\eta\cos\chi-\zeta\cos\psi)=0,$$
$$\Sigma \Pi(\zeta\cos\varphi-\xi\cos\chi)=0;$$

sowie ferner in einer leicht durch sich selbst verständlichen Bezeichnung:

$$\Sigma \Pi'(\xi'\cos\psi'-\eta'\cos\varphi')=0,$$
$$\Sigma \Pi'(\eta'\cos\chi'-\zeta'\cos\psi')=0,$$
$$\Sigma \Pi'(\zeta'\cos\varphi'-\xi'\cos\chi')=0$$

und

$$\Sigma \Pi''(\xi''\cos\psi''-\eta''\cos\varphi'')=0,$$
$$\Sigma \Pi''(\eta''\cos\chi''-\zeta''\cos\psi'')=0,$$
$$\Sigma \Pi''(\zeta''\cos\varphi''-\xi''\cos\chi'')=0.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der vorher schon gefundenen Gleichungen

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0$$

ergeben sich aber aus §. 1. 9) leicht die drei folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} A\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\ +C\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} A'\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B'\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\ +C'\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r} A''\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B''\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\\ +C''\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\end{array}\right\}=0.$$

Digitized by Google

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt, wenn man wie im vorhergehenden Paragraphen

$$A=0,\ B=0,\ C=1$$

setzt, auf der Stelle

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

und die beiden letzten der drei vorhergehenden Gleichungen werden dadurch:

$$A'\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B'\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0,$$
$$A''\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)+B''\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

woraus sich ferner leicht

$$(A'B''-B'A'')\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$(A'B''-B'A'')\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0$$

ergiebt. Wäre nun

$$A'B''-B'A''=0,$$

so würden die Durchschnittslinien der zweiten und dritten Projectionsebene mit der ersten, deren Gleichungen

$$A'x+B'y+D'=0 \text{ und } A''x+B''y+D''=0$$

sind, sich offenbar nicht schneiden, wie es doch unter der gemachten Voraussetzung nothwendig erforderlich ist. Also ist nicht $A'B''-B'A''=0$, und nach dem Vorhergehenden ist folglich

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

Daher haben wir jetzt die sechs folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\ \Sigma P\cos\beta=0,\ \Sigma P\cos\gamma=0;$$
$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

aus denen sich mittelst der bekannten Grundlehren der Statik auf der Stelle ergiebt, dass die gegebenen Kräfte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte sind, wie bewiesen werden sollte.

§. 4.

Aus §. 1. und §. 2. ergiebt sich nun unmittelbar der folgende Satz:

Das Gleichgewicht beliebiger auf einen und denselben Punkt wirkender Kräfte wird dadurch vollständig bedingt, dass die Projectionen dieser Kräfte auf zwei beliebigen sich schneidenden Ebenen, jedes dieser beiden Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind.

Eben so ergiebt sich aus §. 1. und §. 3. der folgende Satz:

Das Gleichgewicht zwischen auf ganz beliebige Weise im Raume wirkenden Kräften wird dadurch vollständig bedingt, dass die Projectionen dieser Kräfte auf drei beliebigen sich in *einem* Punkte schneidenden Ebenen, jedes dieser drei Systeme für sich, unter einander im Gleichgewichte sind.

Von diesen Sätzen kann man öfters bei dem Beweise anderer Sätze mit Vortheil Gebrauch machen, wie im Folgenden an einem Beispiele gezeigt werden soll.

§. 5.

Wir wollen uns jetzt ein Dreieck $A_1A_2A_3$ im Raume denken und die Coordinaten seiner Ecken A_1, A_2, A_3 respective durch x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 bezeichnen; so sind bekanntlich die Coordinaten des Mittelpunkts der Seite AA_2:

$$\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ \tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ \tfrac{1}{2}(z_1+z_2).$$

Durch diesen Punkt lege man ein dem primitiven Systeme paralleles neues Coordinatensystem, so sind die Coordinaten der Ecke A_3 in Bezug auf dieses System nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2);$$

und nach einer bekannten Eigenschaft des Schwerpunkts des Dreiecks sind folglich die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in Bezug auf das in Rede stehende neue Coordinatensystem offenbar

$$\tfrac{1}{3}\{x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\},\ \tfrac{1}{3}\{y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\},\ \tfrac{1}{3}\{z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\}.$$

Also sind die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks $A_1A_2A_3$ in Bezug auf das primitive Coordinatensystem nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)+\tfrac{1}{3}\{x_3-\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\},$$
$$\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)+\tfrac{1}{3}\{y_3-\tfrac{1}{2}(y_1+y_2)\},$$
$$\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)+\tfrac{1}{3}\{z_3-\tfrac{1}{2}(z_1+z_2)\};$$

d. i.

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),\ \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3),\ \tfrac{1}{3}(z_1+z_2+z_3);$$

was auch sonst schon bekannt ist.

Digitized by Google

§. 6.

Man habe jetzt eine beliebige $n$seitige Pyramide, deren Grundfläche und Spitze respective $A_1A_2A_3A_4 \ldots\ldots A_n$ und O sein mögen. Die Grundfläche nehme man als Ebene der xy an, und bezeichne, dies vorausgesetzt, die Coordinaten der Ecken

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

respective durch

$$x_1,\ y_1,\ 0;\ x_2,\ y_2,\ 0;\ x_3,\ y_3,\ 0; \ldots x_n,\ y_n,\ 0;$$

die Coordinaten der Spitze O aber durch ξ, η, ζ.

Wenn wir nun die Gleichung der Seitenfläche A_1A_2O durch

$$Ax+By+Cz+D=0$$

bezeichnen, so ist

$$Ax_1+By_1+D=0,$$
$$Ax_2+By_2+D=0,$$
$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Subtraction

$$A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)=0,$$
$$A(x_1-\xi)+B(y_1-\eta)-C\zeta=0$$

oder

$$x_1-x_2+(y_1-y_2)\frac{B}{A}=0,$$

$$x_1-\xi+(y_1-\eta)\frac{B}{A}-\zeta\frac{C}{A}=0;$$

folglich, wie man hieraus leicht findet:

$$\frac{B}{A}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2},\quad \frac{C}{A}=\frac{(x_1-\xi)(y_1-y_2)-(y_1-\eta)(x_1-x_2)}{(y_1-y_2)\zeta}.$$

Weil nun

$$A(x-\xi)+B(y-\eta)+C(z-\zeta)=0$$

oder

$$x-\xi+\frac{B}{A}(y-\eta)+\frac{C}{A}(z-\zeta)=0$$

ist, so ist

$$\left.\begin{array}{l}(y_1-y_2)\zeta(x-\xi)-(x_1-x_2)\zeta(y-\eta)\\ -\{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)\}(z-\zeta)\end{array}\right\}=0$$

oder auch, wie man leicht findet,

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{c}(y_1-y_2)\zeta x-(x_1-x_2)\zeta y\\ -\{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)\}z+(x_1y_2-x_2y_1)\zeta\end{array}\right\}=0,$$

oder endlich auch

$$\left.\begin{array}{c}(y_1-y_2)\zeta x-(x_1-x_2)\zeta y\\ -\{(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2\eta-\xi y_2)+(\xi y_1-x_1\eta)\}z+(x_1y_2-x_2y_1)\zeta\end{array}\right\}=0$$

die Gleichung der Ebene A_1A_2O.

Die Coordinaten des Schwerpunkts des Dreiecks A_1A_2O sind nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi),\ \tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta),\ \tfrac{1}{3}\zeta.$$

Die Gleichungen einer beliebigen, durch diesen Punkt gehenden Linie seien

$$x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)=M(z-\tfrac{1}{3}\zeta),$$
$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=N(z-\tfrac{1}{3}\zeta).$$

Soll nun aber diese Linie auf der Ebene A_1A_2O, deren Gleichung vorher entwickelt worden ist, senkrecht stehen, so muss nach den Principien der analytischen Geometrie

$$M=-\frac{(y_1-y_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)},$$
$$N=\frac{(x_1-x_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}$$

sein, und die Gleichungen der in dem Schwerpunkte des Dreiecks A_1A_2O auf dessen Ebene senkrecht stehenden geraden Linie sind folglich nach dem Obigen:

$$x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)$$
$$=-\frac{(y_1-y_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}(z-\zeta\tfrac{1}{3}),$$
$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)$$
$$=\frac{(x_1-x_2)\zeta}{(x_1-x_2)(y_1-\eta)-(y_1-y_2)(x_1-\xi)}(z-\tfrac{1}{3}\zeta).$$

Folglich ist die Gleichung der Projection dieser Linie auf der Ebene der xy, d. i. auf der Grundfläche unserer Pyramide:

$$\frac{y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)}{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)}=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2},$$

oder

$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)\}.$$

Hiernach sind also überhaupt die Gleichungen der Projectionen der in den Schwerpunkten der Seitenflächen

Digitized by Google

$$A_1A_2O,\ A_2A_3O,\ A_3A_4O, \ldots A_{n-1}A_nO,\ A_nA_1O$$

unserer Pyramide auf den Ebenen dieser Seitenflächen senkrecht stehenden geraden Linien auf der Grundfläche der Pyramide respective:

$$y-\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+\eta)=-\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\{x-\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_2+y_3+\eta)=-\frac{x_2-x_3}{y_2-y_3}\{x-\tfrac{1}{3}(x_2+x_3+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_3+y_4+\eta)=-\frac{x_3-x_4}{y_3-y_4}\{x-\tfrac{1}{3}(x_3+x_4+\xi)\},$$

u. s. w.

$$y-\tfrac{1}{3}(y_{n-1}+y_n+\eta)=-\frac{x_{n-1}-x_n}{y_{n-1}-y_n}\{x-\tfrac{1}{3}(x_{n-1}+x_n+\xi)\},$$

$$y-\tfrac{1}{3}(y_n+y_1+\eta)=-\frac{x_n-x_1}{y_n-y_1}\{x-\tfrac{1}{3}(x_n+x_1+\xi)\}.$$

Bestimmen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten,...., ($n-1$)sten und $n$ten, $n$ten und 1sten

Projection; so erhalten wir, wenn der Kürze wegen

$$\begin{aligned}F_1= &\ (y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\\ &+y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\ &+y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\ &+y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2= &\ (y_2-y_3)(y_3-y_4)(y_4-y_2)\\ &+y_2(x_3-x_4)(x_3+x_4+\xi)\\ &+y_3(x_4-x_2)(x_4+x_2+\xi)\\ &+y_4(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3= &\ (y_3-y_4)(y_4-y_5)(y_5-y_3)\\ &+y_3(x_4-x_5)(x_4+x_5+\xi)\\ &+y_4(x_5-x_3)(x_5+x_3+\xi)\\ &+y_5(x_3-x_4)(x_3+x_4+\xi),\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}F_{n-1}= &\ (y_{n-1}-y_n)(y_n-y_1)(y_1-y_{n-1})\\ &+y_{n-1}(x_n-x_1)(x_n+x_1+\xi)\\ &+y_n(x_1-x_{n-1})(x_1+x_{n-1}+\xi)\\ &+y_1(x_{n-1}-x_n)(x_{n-1}+x_n+\xi),\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned}F_n = &\quad (y_n-y_1)(y_1-y_2)(y_2-y_n)\\ &+y_n(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi)\\ &+y_1(x_2-x_n)(x_2+x_n+\xi)\\ &+y_2(x_n-x_1)(x_n+x_1+\xi);\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}G_1 = &\quad (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)\\ &+x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta)\\ &+x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta)\\ &+x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_2 = &\quad (x_2-x_3)(x_3-x_4)(x_4-x_2)\\ &+x_2(y_3-y_4)(y_3+y_4+\eta)\\ &+x_3(y_4-y_2)(y_4+y_2+\eta)\\ &+x_4(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_3 = &\quad (x_3-x_4)(x_4-x_5)(x_5-x_3)\\ &+x_3(y_4-y_5)(y_4+y_5+\eta)\\ &+x_4(y_5-y_3)(y_5+y_3+\eta)\\ &+x_5(y_3-y_4)(y_3+y_4+\eta),\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}G_{n-1} = &\quad (x_{n-1}-x_n)(x_n-x_1)(x_1-x_{n-1})\\ &+x_{n-1}(y_n-y_1)(y_n+y_1+\eta)\\ &+x_n(y_1-y_{n-1})(y_1+y_{n-1}+\eta)\\ &+x_1(y_{n-1}-y_n)(y_{n-1}+y_n+\eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_n = &\quad (x_n-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_n)\\ &+x_n(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta)\\ &+x_1(y_2-y_n)(y_2+y_n+\eta)\\ &+x_2(y_n-y_1)(y_n+y_1+\eta);\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}H_1 = &\quad x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\\ &=-y_1(x_2-x_3)-y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2),\\ H_2 = &\quad x_2(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_2-y_3)\\ &=-y_2(x_3-x_4)-y_3(x_4-x_2)-y_4(x_2-x_3),\\ H_3 = &\quad x_3(y_4-y_5)+x_4(y_5-y_3)+x_5(y_3-y_4)\\ &=-y_3(x_4-x_5)-y_4(x_5-x_3)-y_5(x_3-x_4),\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\begin{aligned}H_{n-1} = &\quad x_{n-1}(y_n-y_1)+x_n(y_1-y_{n-1})+x_1(y_{n-1}-y_n)\\ &=-y_{n-1}(x_n-x_1)-y_n(x_1-x_{n-1})-y_1(x_{n-1}-x_n),\end{aligned}$$

$$H_n = x_n(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_n)+x_2(y_n-y_1)$$
$$= -y_n(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_n)-y_2(x_n-x_1)$$

gesetzt wird, für diese Coordinaten die folgenden Ausdrücke:

$$-\frac{F_1}{H_1},\ \frac{G_1}{H_1};$$
$$-\frac{F_2}{H_2},\ \frac{G_2}{H_2};$$
$$-\frac{F_3}{H_3},\ \frac{G_3}{H_3};$$

u. s. w.

$$-\frac{F_{n-1}}{H_{n-1}},\ \frac{G_{n-1}}{H_{n-1}};$$
$$-\frac{F_n}{H_n},\ \frac{G_n}{H_n}.$$

Für die dreiseitige Pyramide, d. i. für $n=3$, ist:

$$\begin{aligned}F_1 = &\ (y_1-y_2)(y_2-y_3)(y_3-y_1)\\ &+y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\ &+y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\ &+y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2 = &\ (y_2-y_3)(y_3-y_1)(y_1-y_2)\\ &+y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi)\\ &+y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi)\\ &+y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3 = &\ (y_3-y_1)(y_1-y_2)(y_2-y_3)\\ &+y_3(x_1-x_2)(x_1+x_2+\xi)\\ &+y_1(x_2-x_3)(x_2+x_3+\xi)\\ &+y_2(x_3-x_1)(x_3+x_1+\xi);\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}G_1 = &\ (x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1\\ &+x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta)\\ &+x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta)\\ &+x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_2 = &\ (x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1-x_2)\\ &+x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta)\\ &+x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta)\\ &+x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta).\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$G_3 = (x_3-x_1)(x_1-x_2)(x_2-x_3)$$
$$+x_3(y_1-y_2)(y_1+y_2+\eta)$$
$$+x_1(y_2-y_3)(y_2+y_3+\eta)$$
$$+x_2(y_3-y_1)(y_3+y_1+\eta);$$

und

$$H_1 = x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)$$
$$=-y_1(x_2-x_3)-y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2),$$
$$H_2 = x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_3)$$
$$=-y_2(x_3-x_1)-y_3(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_3),$$
$$H_3 = x_3(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)$$
$$=-y_3(x_1-x_2)-y_1(x_2-x_3)-y_2(x_3-x_1).$$

Also ist in diesem Falle offenbar

$$F_1=F_2=F_3,$$
$$G_1=G_2=G_3,$$
$$H_1=H_2=H_3;$$

und es ergiebt sich daher jetzt der folgende merkwürdige Satz von der dreiseitigen Pyramide oder dem Tetraeder:

Die Projectionen der auf drei Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden geraden Linien auf der vierten Seitenfläche schneiden sich jederzeit in einem und demselben Punkte.

Dass sich die vier auf die Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten errichteten Perpendikel, — im Allgemeinen wenigstens, — nicht selbst in einem und demselben Punkte schneiden, lässt sich aus den im Obigen entwickelten Formeln und Gleichungen leicht ableiten.

Wenn man die obige, hier absichtlich in etwas grösserer Allgemeinheit geführte Rechnung gleich vom Anfange an bloss auf den besondern Fall der dreiseitigen Pyramide einschränkt, so wird dieselbe kürzer und einfacher.

§. 7.

Wir wollen uns jetzt vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide $A_1A_2A_3A_4$ in deren Schwerpunkten senkrecht stehende Kräfte denken, und annehmen, dass diese Kräfte sämmtlich nach dem äussern — (oder auch nach dem innern) — Raume der Pyramide hin wirken. Die auf den Seitenflächen

$$A_2A_3A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_2A_4,\ A_1A_2A_3$$

senkrecht stehenden Kräfte seien respective

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4.$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir die spitzen Neigungswinkel der Seitenflächen

$$A_2A_3A_4,\ A_1A_3A_4,\ A_1A_2A_4$$

gegen die Seitenfläche $A_1A_2A_3$ respective durch

$$i_1,\ i_2,\ i_3;$$

so sind die auf den Seiten

$$A_2A_3,\ A_1A_3,\ A_1A_2$$

des Dreiecks $A_1A_2A_3$ senkrecht stehenden Projectionen der Kräfte P_1, P_2, P_3 auf der Seitenfläche $A_1A_2A_3$ offenbar respective

$$P_1 \sin i_1,\ P_2 \sin i_2,\ P_3 \sin i_3$$

und die Projection der vierten Kraft P_4 auf derselben Seitenfläche verschwindet. Bezeichnen wir ferner die Höhe der Ecke A_4 über der Seitenfläche $A_1A_2A_3$ durch H_4, so ist offenbar

$$\Delta A_2A_3A_4 = \tfrac{1}{2} A_2A_3 . \frac{H_4}{\sin i_1} = \frac{A_2A_3 . H_4}{2 \sin i_1},$$

$$\Delta A_1A_3A_4 = \tfrac{1}{2} A_1A_3 . \frac{H_4}{\sin i_2} = \frac{A_1A_3 . H_4}{2 \sin i_2},$$

$$\Delta A_1A_2A_4 = \tfrac{1}{2} A_1A_2 . \frac{H_4}{\sin i_3} = \frac{A_1A_2 . H_4}{2 \sin i_3};$$

und wenn wir daher jetzt annehmen, dass die vier auf den Seitenflächen der Pyramide senkrecht stehenden Kräfte sich unter einander wie die Seitenflächen, auf denen sie senkrecht stehen, verhalten; so ist

$$P_1 : P_2 : P_3 = \frac{A_2A_3}{\sin i_1} : \frac{A_1A_3}{\sin i_2} : \frac{A_1A_2}{\sin i_3},$$

also

$$P_1 \sin i_1 : P_2 \sin i_2 : P_3 \sin i_3 = A_2A_3 : A_1A_3 : A_1A_2,$$

d. h. die drei Projectionen

$$P_1 \sin i_1,\ P_2 \sin i_2,\ P_3 \sin i_3$$

auf der Seitenfläche $A_1A_2A_3$, deren Richtungen auf den Seiten

$$A_2A_3,\ A_1A_3,\ A_1A_2$$

des Dreiecks $A_1A_2A_3$ senkrecht stehen und nach dem vorhergehenden Paragraphen sich in einem und demselben Punkte schneiden, verhalten sich unter einander wie die Seiten des Dreiecks $A_1A_2A_3$, auf denen sie senkrecht stehen.

Wenn aber drei Kräfte in der Ebene eines Dreiecks, deren Richtungen auf den Seiten des Dreiecks senkrecht stehen und sich in einem und demselben Punkte schneiden, sich wie die Sei-

Digitized by Google

ten des Dreiecks, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhalten und sämmtlich nach dem äussern — (oder nach dem innern) — Raume des Dreiecks hin gerichtet sind, so sind diese drei Kräfte jederzeit unter einander im Gleichgewichte. Ist nämlich in Taf. X. Fig. 12. ABC das gegebene Dreieck, auf dessen Seiten BC, AC, AB die sich in dem Punkte O schneidenden Richtungen der Kräfte P_a, P_b, P_c senkrecht stehen, so ist nach der Voraussetzung

$$P_a:P_b:P_c=BC:AC:AB=a:b:c;$$

also, weil bekanntlich

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$

ist:

$$P_a:P_b:P_c=\sin A:\sin B:\sin C.$$

Bezeichnet man nun aber die von den Richtungen der Kräfte P_b, P_c; P_a, P_c; P_a, P_b eingeschlossenen Winkel respective durch α, β, γ; so ist

$$A+\alpha=180^0,\ B+\beta=180^0,\ C+\gamma=180^0$$

und folglich

$$\sin A=\sin\alpha,\ \sin B=\sin\beta,\ \sin C=\sin\gamma;$$

also nach dem Obigen

$$P_a:P_b:P_c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma.$$

Bezeichnet man aber die von der über den Punkt O hinaus verlängerten Richtung der Kraft P_a mit den Richtungen der Kräfte P_b und P_c eingeschlossenen Winkel durch ψ und φ, so ist

$$\beta+\varphi=180^0,\ \gamma+\psi=180^0;$$

also $\sin\beta=\sin\varphi$, $\sin\gamma=\sin\psi$; und folglich nach dem Vorhergehenden

$$P_a:P_b:P_c=\sin\alpha:\sin\varphi:\sin\psi.$$

Macht man nun $P_b=OB_1$, $P_c=OC_1$ und zieht durch B_1 eine Parallele mit OC_1, welche die gerade Linie, in der die Richtung der Kraft P_a liegt, in A' schneiden mag, durch C_1 eine Parallele mit OB_1, welche die gerade Linie, in der die Richtung der Kraft P_a liegt, in A'' schneiden mag; so ist nach den Principien der Trigonometrie

$$OA':OB_1=\sin\alpha:\sin\varphi,$$
$$OA'':OC_1=\sin\alpha:\sin\psi.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$OB_1=P_b=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}P_a,\ OC_1=P_c=\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}P_a;$$

Digitized by Google

also

$$OA':\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}P_a=\sin\alpha:\sin\varphi,$$

$$OA'':\frac{\sin\psi}{\sin\alpha}P_a=\sin\alpha:\sin\psi;$$

folglich

$$OA'=OA''=P_a.$$

Daher fallen die Punkte A' und A'' in einen Punkt, den wir durch A_1 bezeichnen wollen, zusammen, und es ist $OA_1=P_a$. Weil nun $OA_1=P_a$ die durch den Punkt O gehende Diagonale des mit $OB_1=P_b$ und $OC_1=P_c$ als Seiten beschriebenen Parallelogramms ist, so folgt aus dem Satze von dem Parallelogramme der Kräfte unmittelbar, dass die drei Kräfte P_a, P_b, P_c unter einander im Gleichgewichte sind, wie behauptet wurde.

Nimmt man jetzt alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich auf völlig unzweideutige Weise, dass die Projectionen der vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden, sämmtlich nach dem äussern — (oder auch nach dem innern) — Raume der Pyramide hin gerichteten, und sich wie die Seitenflächen, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhaltenden Kräfte auf jeder der vier Seitenflächen der Pyramide unter einander im Gleichgewichte sind, woraus sich mittelst des in §. 3. bewiesenen Satzes unmittelbar ergiebt, dass die vier in Rede stehenden Kräfte jederzeit selbst unter einander im Gleichgewichte sind. Also hat man den folgenden

Lehrsatz.

Die vier auf den Seitenflächen einer dreiseitigen Pyramide oder eines Tetraeders in deren Schwerpunkten senkrecht stehenden, sämmtlich nach dem äussern oder sämmtlich nach dem innern Raume der Pyramide hin gerichteten, und sich wie die Seitenflächen der Pyramide, auf denen sie senkrecht stehen, unter einander verhaltenden Kräfte sind jederzeit unter einander im Gleichgewichte. *)

§. 8.

Da sich eine jede Pyramide in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen lässt, so ergiebt sich zuvörderst mittelst ganz leichter Schlüsse und der bekannten Grundeigenschaften des Schwerpunkts auf der Stelle, dass der im vorhergehenden Paragraphen bewiesene Satz von der dreiseitigen Pyramide überhaupt für jede Pyra-

*) Dieser Satz rührt von Gergonne her und ist von demselben in den Annales de mathématiques pures et appliquées. T. X. mitgetheilt worden.

Digitized by Google

mide von ganz beliebiger Seitenzahl gilt. Weil man aber ferner sich jedes Polyeder aus lauter in einer gemeinschaftlichen Spitze zusammenstossenden Pyramiden bestehend denken kann, so ergiebt sich auch auf der Stelle, dass der in Rede stehende Satz ganz allgemein für jedes beliebige Polyeder gilt. Man hat hierbei nur zu beachten, dass je zwei auf derselben, zwei Pyramiden angehörenden Seitenfläche senkrecht stehende einander gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte sich gegenseitig aufheben, woraus dann alles Uebrige ferner ganz von selbst und durch die leichtesten Schlüsse folgt, was weiter auszuführen füglich dem Leser überlassen werden kann.

XLII.

Ueber eine in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorkommende analytische Aufgabe.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Bei der Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit a posteriori wird man bekanntlich zu der Aufgabe geführt, den Gränzwerth zu finden, welchem der Ausdruck

$$\frac{1}{k}\left\{\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots\ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ldots+(\overline{k-1}\delta)^n(1-\overline{k-1}\delta)^n\right\}$$

worin $\delta=\frac{1}{k}$ ist, so nahe kommen kann als man es verlangt, sobald man die ganze positive Zahl k unausgesetzt wachsen, also δ unbegränzt abnehmen lässt. Sind nämlich v und w die einfachen Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse A und B, von denen bei $m+n$ Versuchen A $m$mal und B $n$mal eingetreten ist, so haben wir Cv^mw^n als Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereigniss des $m$maligen Vorkommens von A und des $n$maligen von B, wobei C den Binomialkoeffizienten $(m+n)_m$ $=(m+n)_n$ bezeichnet. Ist nun v a priori nicht bekannt, so steht ihm noch der Spielraum von 0 bis 1 offen, und man kann also,

Digitized by Google

wenn man sich die Einheit in k gleiche Theile getheilt denkt und $\frac{1}{k}=\delta$ setzt, für v der Reihe nach

$$\delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ldots\overline{k-1}\,\delta$$

nehmen, woraus wegen $v+w=1$, also $w=1-v$, folgt, dass für das fragliche zusammengesetzte Ereigniss die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten

$$C\delta^m(1-\delta)^n,\ C(2\delta)^m(1-2\delta)^n,\ C(3\delta)^m(1-3\delta)^n,\ldots \\ C(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)^n$$

statt finden können. Diess giebt als mittlere Wahrscheinlichkeit

$$\frac{C}{k-1}\left\{\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots \\ \ldots+(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)^n\right\}$$

Soll aber v jeden zwischen 0 und 1 liegenden Werth annehmen können, so dürfen wir es nicht blos sprungweis $=\delta$, 2δ, 3δ etc. setzen, sondern wir müssen es stetig von 0 bis 1 gehen lassen, d. h. wir müssen die Intervalle jener Sprünge unter jede noch so kleine Grösse hinab vermindern. Da in diesem Falle k ins Unendliche wächst, so können wir statt $\frac{C}{k-1}$ auch $\frac{C}{k}$ schreiben, und da C von k nicht abhängt, so reduzirt sich jetzt die Aufsuchung der mittleren Wahrscheinlichkeit auf die anfangs genannte Aufgabe. Dieselbe ist sehr leicht zu lösen, wenn man das Theorem

$$\mathrm{Lim}\,\delta\{f(a)+f(a+\delta)+f(a+2\delta)+\ldots+f(a+\overline{k-1}\,\delta)\} \\ =\int_a^b f(x)\partial x,\ \text{für}\ \delta=\frac{b-a}{k}$$

voraussetzen will, weil sich dann die gesuchte Gränze auf den Werth des Integrales

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\partial x$$

reduzirt, der ohne Schwierigkeit entwickelt werden kann; ist man aber beim Vortrage der Wahrscheinlichkeitsrechnung genöthigt, auf den Gebrauch der Integralrechnung zu verzichten, so entsteht die Frage, wie man auf elementarem Wege den numerischen Betrag jener Gränze auffinden könne. Hier scheint nun Condorcet der einzige zu sein, der die Frage beantwortet hat, aber leider auf eine im höchsten Grade unbefriedigende Weise *), und diess veranlasste

*) Ist $(h\delta)^m(1-h\delta)^n$ irgend eines der Glieder der eingeklammerten Reihe und zur Abkürzung $h\delta=z$, so setzt Condorcet voraus, dass die Summe der $h-1$ vorhergehenden Glieder auf die Form

$$Az^{m+1}(1-z)^n+Bz^{m+2}(1-z)^{n-1}+Cz^{m+3}(1-z)^{n-2}+\ldots$$

Digitized by Google

mich ursprünglich für meine Vorträge die folgenden Betrachtungen auszuführen, die auch sonst vielleicht einiges Interesse haben.

I.

Versuchen wir zunächst die Gränze zu bestimmen, welcher sich der Quotient

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots+h^m}{(h+1)^{m+1}}\quad.$$

nähert, wenn wir die ganze positive Zahl h ins Unendliche hinaus wachsen, das ebenfalls positive und ganze m aber constant lassen.

Da $1^m=1$, $2^m=(1+1)^m$, $3^m=(1+2)^m$,.... ist, so haben wir, unter Anwendung des Binomialtheoremes für ganze positive Exponenten

$$\begin{aligned}
1^m&=1,\\
2^m&=1+m_1.1+m_2.1^2+m_3.1^3+\ldots+m_m.1^m,\\
3^m&=1+m_1.2+m_2.2^2+m_3.2^3+\ldots+m_m.2^m,\\
4^m&=1+m_1.3+m_2.3^2+m_3.3^3+\ldots+m_m.3^m,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(h+1)^m&=1+m_1.h+m_2.h^2+m_3.h^3+\ldots+m_m.h^m.
\end{aligned}$$

Addirt man Alles mit der Bemerkung, dass $m_m=1$ ist, so hebt sich beiderseits die Summe $1^m+2^m+\ldots+h^m$; bezeichnet man noch $1^n+2^n+\ldots+h^n$ mit S_n, so bleibt

$$(h+1)^m=h+1+m_1S_1+m_2S_2+\ldots+m_{m-1}S_{m-1},$$

oder $m+1$ für m gesetzt:

$$(h+1)^{m+1}=h+1+\frac{m+1}{1}S_1+\frac{(m+1)m}{1.2}S_2+\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}S_3+\ldots$$
$$+(m+1)S_m,$$

woraus folgt

$$S_m=\frac{(h+1)^{m+1}-(h+1)}{m+1}-\left\{\begin{matrix}S_1+\tfrac{1}{2}m_1S_2+\tfrac{1}{3}m_2S_3+\ldots\\ \ldots+\frac{1}{m-1}m_{m-2}S_{m-1}\end{matrix}\right\}.\qquad(1)$$

---

worin A, B, C etc. unbestimmte Koeffizienten bedeuten, gebracht werden könne (Lacroix traité élément. du calcul des probabilités, troisième édition page 153.). Solche ganz unmotivirte und aus der Luft gegriffene Hypothesen dürfen sich aber heut zu Tage nicht mehr im Gebiete einer „exakten" Wissenschaft blicken lassen.

Digitized by Google

Da die in der Parenthese stehenden Grössen sämmtlich positiv sind, so folgt hieraus unmittelbar

$$S_m < \frac{1}{m+1}\left\{(h+1)^{m+1} - (h+1)\right\}. \qquad (2)$$

Ferner ist offenbar

$$\begin{aligned} S_n &= 1^n + 2^n + 3^n + \dots + h^n \\ &< h^n + h^n + h^n + \dots + h^n, \end{aligned}$$

d. i.

$$S_n < h \,.\, h^n \text{ oder } S_n < h^{n+1};$$

folglich

$$S_1 + {}^1m_1\, S_2 + \tfrac{1}{3}m_2\, S_3 + \dots + \frac{1}{m-1}m_{m-2}\, S_{m-1}$$

$$< h^2 + \tfrac{1}{2}m_1 h^3 + \tfrac{1}{3}m_2 h^4 + \dots + \frac{1}{m-1}m_{m-2}\, h^m.$$

Unter den Koeffizienten 1, $\frac{1}{2}m_1$, $\frac{1}{3}m_2$, ... $\frac{1}{m-1}m_{m-2}$ ist aber gewiss einer der grösste; setzen wir den Werth desselben, der μ heissen möge, statt aller anderen, so ist nach dem Vorigen um so mehr

$$S_1 + \tfrac{1}{2}m_1\, S_2 + \tfrac{1}{3}m_2 S_3 + \dots + \frac{1}{m-1}m_{m-2}\, S_{m-1}$$

$$< \mu\,(h^2 + h^3 + h^4 + \dots + h^m),$$

d. i.

$$< \mu h^2 (1 + h + h^2 + \dots + h^{m-2})$$

oder

$$< \mu h^2 \frac{h^{m-1} - 1}{h-1}.$$

Setzen wir diess statt der eingeklammerten Reihe in No. (1), so subtrahiren wir zuviel, es bleibt demnach zu wenig übrig und also ist

$$S_m > \frac{1}{m+1}\{(h+1)^{m+1} - (h+1)\} - \frac{\mu}{h-1}\{h^{m+1} - h^2\}. \qquad (3)$$

Aus den Ungleichungen (2) und (3) ergiebt sich nun durch Division mit $(h+1)^{m+1}$

$$\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}} < \frac{1}{m+1}\left\{1 - \frac{1}{(h+1)^m}\right\}, \qquad (4)$$

$$\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}} > \frac{1}{m+1}\left\{1 - \frac{1}{(h+1)^m}\right\} - \frac{\mu}{h-1}\left\{\left(\frac{h}{h+1}\right)^{m+1} - \frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}\right\} \quad (5)$$

Digitized by Google

Die Differenz der Grössen, zwischen denen $S_m:(h+1)^{m+1}$ liegt, nämlich

$$\frac{\mu}{h-1}\left\{\left(\frac{h}{h+1}\right)^{m+1}-\frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}\right\}$$

lässt sich aber für beständig wachsende h unter jeden beliebigen Grad der Kleinheit herabbringen; denn es ist

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{h}{h+1}\right)^{m+1}=\mathrm{Lim}\left(1-\frac{1}{h+1}\right)^{m+1}=1^{m+1}=1,$$

$$\mathrm{Lim}\frac{h^2}{(h+1)^{m+1}}=0 \text{ für } m>1,$$

$$=1 \text{ für } m=1;$$

und also, da wir m nicht kleiner als die Einheit nehmen, der Gränzwerth der fraglichen Differenz

$$=\mathrm{Lim}\frac{\mu}{h-1}\{1-0\} \text{ oder } =\mathrm{Lim}\frac{\mu}{h-1}\{1-1\},$$

d. i. in jedem Falle $=0$, weil μ seinen Werth nicht ändert, wenn auch h wächst. Die Grössen rechts in (4) und (5) rücken also einander immer näher und nähern sich einer und der nämlichen Gränze. Ihr gemeinschaftlicher Gränzwerth ist dann auch der von $S_m:(h+1)^{m+1}$, weil diese Grösse nicht ausserhalb jener Werthe fallen kann. So finden wir nun

$$\mathrm{Lim}\frac{S_m}{(h+1)^{m+1}}=\frac{1}{m+1}$$

oder

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{(h+1)^{m+1}}=\frac{1}{m+1}. \tag{6}$$

Da

$$\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{h^{m+1}}=\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{(h+1)^{m+1}}\left(1+\frac{1}{h}\right)^{m+1}$$

ist, so folgt hieraus noch

$$\mathrm{Lim}\frac{1^m+2^m+3^m+\ldots.+h^m}{h^{m+1}}=\frac{1}{m+1}. \tag{7}$$

Das auf diese Weise gewonnene Lemma können wir nun sogleich zur Lösung unserer ursprünglichen Aufgabe benutzen.

II.

Verwandelt man jedes Glied des Ausdrucks

$$\delta^m(1-\delta)^n+(2\delta)^m(1-2\delta)^n+(3\delta)^m(1-3\delta)^n+\ldots.$$
$$\ldots.+(\overline{k-1}\,\delta)^m(1-\overline{k-1}\,\delta)^n$$

Digitized by Google

nach dem Binomialtheoreme für ganze positive Exponenten in eine Reihe, so nimmt derselbe die Form an:

$$\begin{array}{l}
n_0\delta^m - n_1\delta^{m+1} + n_2\delta^{m+2} - n_3\delta^{m+3} + \ldots.\\
+ n_0 2^m\delta^m - n_1 2^{m+1}\delta^{m+1} + n_2 2^{m+2}\delta^{m+2} - n_3 2^{m+3}\delta^{m+3} + \ldots.\\
+ n_0 3^m\delta^m - n_1 3^{m+1}\delta^{m+1} + n_2 3^{m+2}\delta^{m+2} - n_3 3^{m+3}\delta^{m+3} + \ldots.\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
+ n_0(k-1)^m\delta^m - n_1(k-1)^{m+1}\delta^{m+1} + n_2(k-1)^{m+2}\delta^{m+2} - \ldots.,
\end{array}$$

d. i. bei Addition in vertikaler Richtung

$$\begin{array}{l}
n_0\delta^m\{1^m + 2^m + 3^m + \ldots. + (k-1)^m\}\\
- n_1\delta^{m+1}\{1^{m+1} + 2^{m+1} + 3^{m+1} + \ldots. + (k-1)^{m+1}\}\\
+ n_2\delta^{m+2}\{1^{m+2} + 2^{m+2} + 3^{m+2} + \ldots. + (k-1)^{m+2}\}\\
- \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Setzt man noch $\delta = \frac{1}{k}$ und dividirt mit k, so wird

$$\frac{1}{k}\left\{\begin{array}{l}\delta^m(1-\delta)^n + (2\delta)^m(1-2\delta)^n + (3\delta)^m(1-3\delta)^n + \ldots.\\
\qquad\qquad \ldots. + (\overline{k-1}\delta)^m(1-\overline{k-1}\delta)^n\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\begin{array}{l}
= n_0\dfrac{1^m + 2^m + 3^m + \ldots. + (k-1)^m}{k^{m+1}}\\
- n_1\dfrac{1^{m+1} + 2^{m+1} + \ldots. + (k-1)^{m+1}}{k^{m+2}}\\
+ n_2\dfrac{1^{m+2} + 2^{m+2} + \ldots. + (k-1)^{m+2}}{k^{m+3}}\\
- \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}$$

Lassen wir nun k ins Unendliche wachsen, so ergiebt sich der Gränzwerth jedes auf der rechten Seite stehenden Gliedes nach Formel (6), indem man $k = h - 1$ setzt, wo nun h ebenfalls unausgesetzt zunehmen muss; die Reihe rechts geht dabei in die folgende über:

$$\frac{n_0}{m+1} - \frac{n_1}{m+2} + \frac{n_2}{m+3} - \ldots. \pm \frac{n_n}{m+n+1}, \tag{9}$$

welche nun den gesuchten Gränzwerth darstellt.

Es lässt sich aber noch mehr thun; man kann nämlich diese Reihe und sogar die allgemeinere

$$\frac{n_0}{a} - \frac{n_1}{a+1} + \frac{n_2}{a+2} - \ldots\ldots \pm \frac{n_n}{a+n}, \tag{10}$$

worin a eine beliebige Grösse ist, auf folgende Weise summiren. Es heisse T_n diese Summe, so ist durch Multiplikation mit $1 + \frac{a}{n}$

$$\left.\begin{aligned}&(1+\frac{a}{n})\,T_n\\&=\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\frac{n_3}{a+3}+\ldots\\&+\frac{n_0}{n}-\frac{a}{a+1}\cdot\frac{n_1}{n}+\frac{a}{a+2}\cdot\frac{n_2}{n}-\frac{a}{a+3}\cdot\frac{n_3}{n}+\ldots\end{aligned}\right\}.\quad(11)$$

Hier lässt sich die zweite Horizontalreihe rechts auch so schreiben:

$$\frac{n_0}{n}-(1-\frac{1}{a+1})\cdot\frac{n_1}{n}+(1-\frac{2}{a+2})\cdot\frac{n_2}{n}-(1-\frac{3}{a+3})\cdot\frac{n_3}{n}+\ldots$$

$$=\frac{n_0-n_1+n_2-n_3+\ldots}{n}$$

$$+\frac{1}{a+1}\cdot\frac{n_1}{n}-\frac{1}{a+2}\cdot\frac{2n_2}{n}+\frac{1}{a+3}\cdot\frac{3n_3}{n}-\ldots$$

$$=\frac{(n-1)_0}{a+1}-\frac{(n-1)_1}{a+2}+\frac{(n-1)_2}{a+3}-\ldots,$$

weil $n_0-n_1+n_2-\ldots=0$ und immer $\frac{pn_p}{n}=(n-1)_p$ ist. So wird nun nach No. (11)

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n$$

$$=\frac{n_0}{a}-\frac{n_1}{a+1}+\frac{n_2}{a+2}-\frac{n_3}{a+3}+\ldots..$$

$$+\frac{(n-1)_0}{a+1}-\frac{(n-1)_1}{a+2}+\frac{(n-1)_2}{a+3}-\ldots..$$

Nimmt man die unter einander stehenden Grössen zusammen und berücksichtigt, dass immer

$$m_{p-1}+m_p=(m+1)_p,\ \text{also}\ (m+1)_p-m_{p-1}=m_p,$$

oder

$$n_p-(n-1)_{p-1}=(n-1)_p$$

ist, so wird

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n$$

$$=\frac{(n-1)_0}{a}-\frac{(n-1)_1}{a+1}+\frac{(n-2)_2}{a+2}-\frac{(n-1)_3}{a+3}+\ldots,$$

d. i. nach No. (10)

$$(1+\frac{a}{n})\,T_n=T_{n-1}\quad\text{oder}\quad T_n=\frac{n}{a+n}\,T_{n-1}.$$

Mittelst dieser Reduktionsformel findet man leicht

Digitized by Google

$$T_n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(a+n)(a+n-1)\dots(a+1)} T_0.$$

und weil nach (10) $T_0 = \frac{1}{a}$ ist, vermöge der Bedeutung von T_n:

$$\frac{n_0}{a} - \frac{n_1}{a+1} + \frac{n_2}{a+2} - \dots\dots \pm \frac{n_n}{a+n} = \frac{1.2.3\dots n}{a(a+1)(a+2)\dots(a+n)}.$$

Nimmt man $a = m+1$, so erhält man die Summe der Reihe in (9), und da diese den Gränzwerth der rechten Seite von (8) darstellt, so wird jetzt für $\delta = \frac{1}{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Lim}\, \frac{1}{k} \{ \delta^m (1-\delta)^n + (2\delta)^m (1-2\delta)^n + (3\delta)^m (1-3\delta)^n - \dots \\ \qquad\qquad \dots + (\overline{k-1}\delta)^m (1-\overline{k-1}\delta)^n \} \\ = \frac{1.2.3\dots n}{(m+1)(m+2)\dots(m+n+1)} \end{array}\right\}, \qquad (12)$$

womit unsere Aufgabe vollständig gelöst ist.

XLIII.

Allgemeine Reductionsformel für gewisse bestimmte Integrale.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty F[(ax - \frac{b}{x})^2] \partial x, \qquad (1)$$

worin a und b ein paar wesentlich positive von Null verschiedene Grössen bedeuten mögen, lässt sich auf folgende Weise umwandeln. Zuerst hat man identisch

Digitized by Google

$$1=\frac{1}{2a}\left[1+\frac{ax-\frac{b}{x}}{\sqrt{4ab+(ax-\frac{b}{x})^2}}\right](a+\frac{b}{x^2}),$$

wovon man sich leicht durch die Bemerkung überzeugt, dass

$$4ab+(ax-\frac{b}{x})^2=(ax+\frac{b}{x})^2$$

ist; setzt man daher unter dem Integralzeichen jenen der Einheit gleichgeltenden Faktor zu, so nimmt das Integral folgende Form an:

$$\frac{1}{2a}\int_0^\infty F[(ax-\frac{b}{x})^2]\left\{1+\frac{ax-\frac{b}{x}}{\sqrt{4ab+(ax-\frac{b}{x})^2}}\right\}(a+\frac{b}{x^2})\partial x. \quad (2)$$

Führt man eine neue Veränderliche y der Art ein, dass $ax-\frac{b}{x}=y$ ist, so folgt

$$(a+\frac{b}{x^2})\partial x=\partial y,$$

und wenn x die Werthe $x=\infty$ und $x=0$ angenommen hat, so ist entsprechend $y=+\infty$ und $y=-\infty$ geworden. Demnach geht das Integral unter No. (2) in das folgende über:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\left\{1+\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\right\}\partial y\\ &=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\partial y+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Denkt man sich jedes dieser Integrale in zwei andere von $y=-\infty$ bis $y=0$ und von $y=0$ bis $y=\infty$ zerlegt, so bemerkt man gleich, dass

$$\int_{-\infty}^0 F(y^2)\partial y=\int_0^\infty F(y^2)\partial y$$

sein muss, weil die Funktion $F(y^2)$ für negative y die nämliche ist, wie für positive y. Hieraus folgt noch

$$\int_{-\infty}^\infty F(y^2)\partial y=2\int_0^\infty F(y^2)\partial y. \quad (4)$$

Da ferner die Funktion

$$F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}$$

die Eigenschaft hat: $\varphi(-y)=-\varphi(+y)$, so folgt leicht

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{0} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y = -\int_{0}^{\infty} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y,$$

und hieraus wieder

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y^2)\frac{y}{\sqrt{4ab+y^2}}\partial y = 0. \qquad (5)$$

Durch Substitution der in (4) und (5) gefundenen Resultate reduzirt sich unser Integral in (3) auf

$$\frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} F(y^2)\,\partial y.$$

Vergleichen wir jetzt die erste Form des Integrales in (1) mit dieser, so haben wir die Gleichung

$$\int_{0}^{\infty} F[(ax-\frac{b}{x})^2]\,\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} F(y^2)\,\partial y.$$

Setzen wir noch

$$F(z) = f(2ab+z),$$

so folgt

$$F[(ax-\frac{b}{x})^2] = f(2ab+(ax-\frac{b}{x})^2) = f(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}),$$

$$F(y^2) = f(2ab+y^2);$$

und mithin erhalten wir zuletzt

$$\int_{0}^{\infty} f(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})\,\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} f(2ab+y^2)\,\partial y. \qquad (6)$$

Da das Integral auf der rechten Seite offenbar viel einfacher als das auf der linken ist, so kann die vorstehende Gleichung als Reduktionsformel dienen und lässt in dieser Beziehung manche interessante Anwendungen zu, von denen ich hier besonders eine näher betrachten will.

Sei $f(z) = e^{-z}$, so wird

$$\int_{0}^{\infty} e^{-(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2})}\partial x = \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-(2ab+y^2)}\,\partial y$$

$$= \frac{1}{a}e^{-2ab}\int_{0}^{\infty} e^{-y^2}\,\partial y.$$

Der Werth des Integrales rechts ist aber bekanntlich $=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *) und folglich haben wir jetzt

---

*) Archiv. Thl. V. S. 90.

Digitized by Google

$$\int_0^\infty e^{-\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}. \tag{7}$$

Dieses Integral lässt sich wieder benutzen, um sehr rasch den Werth von

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2} \tag{8}$$

zu finden. Man hat nämlich immer

$$\frac{1}{k}=\int_0^\infty e^{-kz}\partial z,$$

also, wenn man $k=\alpha^2+u^2$ und $z=x^2$ setzt:

$$\frac{1}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-(\alpha^2+u^2)x^2}\partial x.$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in No. (8) ergiebt sich

$$\int_0^\infty \cos\beta u\,\partial u\,.\,\frac{1}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty \cos\beta u\,\partial u\int_0^\infty xe^{-(\alpha^2+u^2)x^2}\partial x$$
$$=2\int_0^\infty\int_0^\infty \cos\beta u\,.\,x\,.\,e^{-\alpha^2x^2}\,.\,e^{-u^2x^2}\partial u\,\partial x.$$

Kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um, indem wir erst nach u und dann nach x integriren, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-\alpha^2x^2}\partial x\int_0^\infty \cos\beta u\,e^{-x^2u^2}\partial u.$$

Hier lässt sich der Werth des nach u genommenen Integrales mit Hülfe der bekannten Formel

$$\int_0^\infty \cos\beta u\,e^{-\gamma^2u^2}\partial u=\frac{\sqrt{\pi}}{2\gamma}e^{-\left(\frac{\beta}{2\gamma}\right)^2}$$

leicht angeben, indem man x für γ setzt. Es wird so

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=2\int_0^\infty xe^{-\alpha^2x^2}\partial x\,.\,\frac{\sqrt{\pi}}{2x}e^{-\left(\frac{\beta}{2x}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-\left(\alpha^2x^2+\frac{\beta^2}{4x^2}\right)}\partial x,$$

d. i. nach Formel (7) für $a=\alpha$, $b=\frac{\beta}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\beta u\,\partial u}{\alpha^2+u^2}=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta}. \tag{9}$$

Durch partielle Differenziation dieser Gleichung nach β ergiebt sich noch

Digitized by Google

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin \beta u \, \partial u}{\alpha^2 + u^2} = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha\beta} \qquad (10)$$

und diess sind die beiden Formeln, welche so oft in der Theorie der bestimmten Integrale gebraucht werden.

XLIV.

Quid in Analysi Mathematica valeant signa illa x^y, $\mathrm{Log}_b(x)$, $\mathrm{Sin}\, x$, $\mathrm{Cos}\, x$, $\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, disquisitio.

Auctore Dr. E. G. Björling,

ad Acad. Upsal. Docens Math., ad Gymn. Aros. Lector Math. design.

(Ex Actis Acad. Scient. Stockholm. anno 1845.)

Illustr. Cauchy signorum, de quibus heic quaeritur, pleraque certis dumtaxat ipsarum x et y et „Baseos“ b valoribus ex Analysi esse tollenda statuit, nempe

signum x^y, quoties pars realis ipsius x negativa sit, nisi eodem tempore y realis et quidem valore numerico integro fuerit aut $=0$;

sign. $\mathrm{Log}_b(x)$, non solum 1^0) quoties pars realis ipsius x negativa sit, sed etiam 2^0) quantitate x quâlibet, dum pars realis Baseos b negativa est;

atque signa

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Arcsin}\, x\\ \mathrm{Arccos}\, x\end{array}\right\}, \text{ quoties } x \text{ realis numerice } > 1 \text{ fuerit.}$$

Signi illius x^y damnandi caussa duplex haec edita est *). Om-

*) Cauchy, Anal. Algébr. nec non Exerc. de Mathém. T. I. (1826) pag. 2. — Quo licet in loco utroque realis tantummodo considerata sit y, per se tamen plane apparet signo x^y, dum y realis est, damnato abrogatum hoc quoque esse signum pro y imaginariâ: — id quod praeterea ex eo constat, quod Cauchy, ubi in „Leç. du Calc. Différ. (Leç. XI.)“ signum hoc x^y pro y imaginariâ definitum sistit, solas eas x, quibus positiva cedat pars realis, commemorat.

Digitized by Google

nium scilicet, quas complectitur universale illud signum $((x))^y$, quantitatum nulla — dum pars realis ipsius x negativa est, nec simul y quantitas realis numerice integra aut 0 — digna quae peculiari quodam signo distinguatur visa est. Nec id solum; sed si forte admissum foret hoc signum, etiamsi pars realis ipsius x negativa esset, et quidem ita ut significationem illius pro hoc casu ex definitione ipsius $((x))^y$ aequali modo ac significationem ejusdem pro parte reali x positivâ deduci placuisset; non posset fieri quin ancipitis huic signo x^y in casu, cujus heic mentio est, adsignati sensûs rei merito judicarentur Geometrae.

Tum signi $l(x)$ ideoque ipsius etiam $\mathrm{Log}_b(x)$ — dum pars realis ipsius x negativa est, etiamsi Basis b realis ac positiva fuerit — damnandi caussa duplex fuit eadem, quam modo citavimus *). Quibus autem adductus rationibus princeps ille Geometer signum hoc $\mathrm{Log}_b(x)$ — quaequae sit x quantitas, dum pars realis Baseos b negativa est — interdixerit Analysi, id quidem in opere praeclaro „Leçons du Calc. Différentiel“ (Leç. XI.) fuit explicatum. In eo scilicet, ut plane apparet, positae sunt hae rationes, quod jam antea signum b^y pro negativâ ipsius b parte reali fuerat abrogatum.

Quae tandem fuerit Cauchy perill' caussa signorum $\mathrm{Arcsin}\,x$ et $\mathrm{Arccos}\,x$ (x reali numerice > 1) excludendorum, his fere verbis obiter explicari licet. Postquam in „Leç. du Calc. Différ.“ (Leç. XI.) ambo, quae in signis $\mathrm{Arcsin}((x))$ et $\mathrm{Arccos}((x))$ comprehenduntur, quantitatum agmina exhibuerat Auctor, deinde ostendit agminibus hisce — dum imaginaria est $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus, β haud $= 0$) — suam utrique inesse quantitatem praecipue notandam et quidem ita comparatam, ut, si ponatur x realis ($= \alpha$) et numerice $\overline{\overline{<}}\, 1$, in $\left\{\begin{matrix}\mathrm{Arcsin}\,\alpha\\ \mathrm{Arccos}\,\alpha\end{matrix}\right\}$ abeat. His demum quantitatibus praecipue notandis signa $\mathrm{Arcsin}\,x$ et $\mathrm{Arccos}\,x$ addicenda esse censet. Quo pacto comparatis aequationibus

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{Arcsin}\,x = \mathfrak{P} \pm \mathfrak{Q}\sqrt{-1}\\ \mathrm{Arccos}\,x = \mathfrak{P}_1 \pm \mathfrak{Q}_1\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\ \text{prout } \beta \text{ positiva est aut negativa quantitas,}$$

[$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1$ certas denot. quantitates reales],

Cauchy admonet, si in eis ponatur $\beta = 0$ (ideoque x realis $= \alpha$), fieri ut $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$ in 0 abeant atque $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}_1$ in $\mathrm{Arcsin}\,\alpha$ et $\mathrm{Arccos}\,\alpha$, quoties α numer. $\overline{\overline{<}}\, 1$ sit, at vero dum α numerice > 1 ponitur, fieri ut expressionum $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$ suus cuique cedat valor quidam haud $= 0$: — quo ex eventu fatali sufficientem sibi datam esse censet rationem excludendorum in hoc casu ex Analysi signorum $\mathrm{Arcsin}\,x$ et $\mathrm{Arccos}\,x$. Scilicet in hoc casu ($\beta = 0$, α numer. > 1) „l'expression $\pm\mathfrak{Q}$,“ ait, „admettant non plus une seule valeur, mais deux valeurs égales et de signes contraires, le second membre“ (aequationum, de quibus

---

*) Vid. locum modo cit. operis Exerc. de mathém.

heic quaeritur, utriusque) „cesse d'être complètement déterminé. On doit donc *alors* s'abstenir d'employer la notation Arcsin x“ (pag. 126. Leç. sur le Calc. différ.) et „la notation Arccos x“ (pag. 128. ibid.). *)

Verumenimvero quis est qui non videat, quanti sit discriminis ex Analysi vel unicum, nisi aliter fieri nequit, tollere signum! Certe nobis quidem hac ipsâ circumspectione commotis in mentem venit, ut rem datâ occasione diligentiori cuidam examini subjiceremus. Quo facto ut primum nobis fuerat exploratum interdictis, quorum supra mentionem fecimus, haudquaquam opus esse Analysi, id nobis curae habuimus, ut rem omnibus liberatam dubiis exposituri essemus. Quem tamen in finem, non omnino potuimus, quin ad ipsa principia doctrinae quantitatum Imaginariarum regressuri essemus, lacunas expleturi nonnullas et quae hisce principiis hucusque indefinita quodammodo relicta erant, eademque profecto haud minimi momenti **), perfecte determinaturi. Unde factum est, ut, quae in manibus est, disquisitioni propositum fuerit principia doctrinae Quantitatum Matheseos Analyticae (realium aeque ac imaginariarum) apto rerum ordine et quidem adeo certe ut, quid in genere valeant signa illa in titulo conscripta, perfecte constat, breviter exponere.

Quae cum ita sint, ante omnia juvat referre neutiquam nobis in mentem venisse, ut postquam ea, quae a Cauchy inde tanto cum studio artificioque singulari exstructa fuerint, demoliti fuissemus, nos quidem fundamento cuipiam novo novum superstruere aedificium conaturi essemus. E contrario id nobis habemus propositum, ut incolumi quod disposuit Cauchy aedificio adponamus pro virium modulo novi aliquantulum fundamenti, cui postea superstruatur (si fors ita ferat) alia quaedam domus priori ab latere adjungenda, — vel potius omissis ambagibus: Salvis usque definitionibus Cauchyanis signorum, de quibus agitur, ubicumque iis uti per illustr. Cauchy hucusque licitum fuerit, nos postquam rationibus rite subductis invenimus nihil omnino impedire, quominus caeteris etiam in casibus conservata haec signa ad usum Analyseos insignem vertantur, id nobis hoc tempore injunximus negotium ut, quibus haec signa his ipsis in casibus jure vindicentur quantitatibus, breviter (quoad fieri poterit) ac perspicue exponatur.

---

*) Admonere heic juvat, Illustr. Cauchy, quamquam hoc loco signa illa Arcsin x et Arccos x abroganda esse censet, antea tamen alio quodam loco (Anal. Algébr. pag. 326. et 327.) eadem haec signa et quidem eo ipso in casu, cujus supra mentionem fecimus, Analysi concessisse adhibenda. Verumtamen significationem, quâ praedita tunc stiterat haec signa, male sibi constare haud latet. Forsitan haec ipsa est incuria, cui debeatur quod postea promulgavit magnus ille Geometra interdictum: — cujus praeterea (ut infra patebit) in lacunâ quadam argumentationis residet culpa.

**) Etenim fieri non potest, quin his ipsis lacunis rationibusque sibi haud perfecte constantibus tribuenda sit culpa eorum, quae supra commemoravimus, interdictorum.

Digitized by Google

Cui licet expositioni haud omnibus opus fuerit sigillatim perducendis, quae rem spectent, ratiociniis atque argumentis; tamen, ut ne abrumperetur inepte filum orationis, non potuimus quin cunctas plerisque in locis sibi proprias majoris certe momenti formulas, earumdemque licet permultas ex scriptis illustr. Cauchy jam perbene notas, adponendas curaremus. Praeterea vel maximi interfuit, ut cuique Sectioni, quaenam definitiones Analyseos legesque antepositae illi postularentur, nominatim foret praescriptum, eum videlicet in finem ut salvis, quae in praecedentibus Analyseos partibus statutae fuissent, legibus novas heic omni absque controversiâ et ambiguitate addi liceret. *)

Quid in Analysi valeant signa illa

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Tang}\,x,\ \text{Cot}\,x,\ \text{Sec}\,x,\ \text{Cosec}\,x\\ \text{Arctg}\,x,\ \text{Arccot}\,x,\ \text{Arcsec}\,x,\ \text{Arccosec}\,x\end{array}\right\}$$

definire, id quidem iis, quae dissertationi huic proposita sunt, intimo sane cohaeret nexu: nec possumus quin hoc loco fateamur iis, quae de „functionibus hisce compositis“ tradidit Cauchy, haud pauca (eademque majoris ad rem momenti) habere nos adjicienda; sed haec tamen et alia, ne justo prolixior evadat dissertatio, in aliud tempus differenda censemus.

---

*) Ex eo tamen (ut facile patet) minime consequitur, opinari nos in systemate Analyseos oportere notiones, quae heic inferuntur, iis, quae antepositae esse postulantur, immediate succedere. Sic ex. gr. nil impedit, quominus perfecte definiatur signum illud x^y, y reali (x reali aeque ac imaginariâ), etiamsi nulla prorsus huic Sectioni praemissa foret doctrinae serierum infinitarum particula, — id quod reverâ sic fieri posse commonstrant §§[i]. 1. et 2. Cap. I. subsequentis —; ex eo tamen minime consequitur negare nos ea, quae in hisce §§[is]. occurrunt, doctrinae illi serierum (realibus certe terminis), Cauchy ipso auctore (Anal. Algébr. Chap. VIII.), jure esse postponenda.

Digitized by Google

CAPUT I^mum^.

Quid in Analysi valeat signum

(1) . . . . x^y.

Quid valeat hoc signum x reali quâlibet eodemque tempore y quantitate reali tali, cui cedat valor numericus integer aut 0, nec non x Numerum (quantitatem positivam) denotante atque y realem quamlibet, id cognitum heic jure postulatur. De caetero ut praecise definiatur locus, quo nos heic positos esse fingamus, indicare juvat in §is. 1. et 2. subsequentibus postulari:

1°) quatuor illas operationes Arithmeticas, realibus applicatas quantitatibus, una cum iis, quae ad radices Numerorum positivas eorumque Potentias (Exponente reali quâlibet) pertineant;

2) elementa Trigonometriae planae (vid. Cauchy, Anal. Algébr. Not. I. pag. 425—435. unâ cum „Préliminaires" ibid. pag. 11—13.).

§. 1.

De Quantitatibus in genere prolegomena.

1. „Quantitas realis" nobis erit „Numerus (quant. positiva) aut negativa quant. aut zéro." — „Quantitas in genere" vel „Quantitas Analytica" vel etiam verbo „Quantitas" expressionem complectitur quamcumque formae $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus); ipsi α nomen cedit „pars realis quantitatis" „β Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$."

Imaginaria vocatur quantitas, cui Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$ haud 0 sit; e contrario formula unaquaeque $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, cui $\beta=0$ sit, soli α aequivalere ideoque realis esse quantitas censetur.

Notio illa „Modulus quantitatis" satis cognita est. Ex definitione ipsa „quantitatum aequalium" rectâ consequitur 1°) fieri non posse, quin moduli quantitatum aequalium aequales ipsi sint, et 2°) eam solam $=0$ esse quantitatem, cui modulus $=0$ cedat. Tum ex ipsa definitione notionum „Summae", „Differentiae", „Producti (Dignitatis)" et „Quoti" patet, quid valeat signum

(1) . . . . x^y seu $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^y$,

dum, x quantitate quâlibet, y realis est quantitas valore numerico integro ($=\pm m$), scilicet

$$x^m = xxx \ldots (m \text{ factoribus}),\ x^{-m} = \frac{1}{x^m},$$

nec non dum $y=0$ est (certe nisi simul $x=0$ fuerit) *), scilicet

$$x^0 = 1.$$

2. Quoniam (ut satis constat) quantitatem $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ quamlibet (modulo $=\varrho$ posito) formulâ illâ

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \varrho(\operatorname{Cos}\theta + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\theta)$$

exprimi licet, θ realem denotante quantitatem, quamviscumque eligi placuerit ex iis, quarum Sinus et Cosinus formulis illis

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \varrho\operatorname{Cos}\theta = \alpha, \\ \varrho\operatorname{Sin}\theta = \beta \end{cases}$$

satisfaciant; patet

1°) dum α positiva est, licere „Argumentum" θ cooptari $\tau = \operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, ideoque tunc loco ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ substitui istam

$$(2') \quad \ldots\ldots \quad \varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau);$$

2°) dum α negativa est, licere θ cooptari $\tau + \pi$, ideoque tunc loco ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ substitui

$$(2'') \quad \varrho[\operatorname{Cos}(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}(\tau+\pi)] \text{ seu } -\varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau);$$

atque 3°) dum $\alpha=0$ est (ideoque quantitas ipsa formae $\beta\sqrt{-1}$) licere loco illius ex arbitrio substitui vel (2′) vel (2″), eo quidem pacto ut litterâ illâ τ intelligatur $\pm\frac{\pi}{2}$ priori in casu, posteriori autem $\mp\frac{\pi}{2}$, prout positiva est β aut negativa. Licebit igitur contendere ambas illas aequationes

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} = \pm\varrho(\operatorname{Cos}\tau + \sqrt{-1}\operatorname{Sin}\tau),$$

(quarum illa positivis α quibuscumque, negativis haec, valet),

---

*) Quod attinet ad signum illud 0^y (y datâ quantitate generis cujuscumque), hoc loco (ne gutta supersit dubitationis) semel omnino indicare juvabit, quoniam hoc signum in Analysi nusquam occurrit, nisi ubi limes, in quem convergat x^y quantitate x ipsâ (tunc temporis propositâ) in 0 convergente, significetur, nos in sequentibus — ubicumque de signo x^y erit quaestio (certe excepto casu illo unico $y=1$) — verba illa „certe nisi $x=0$ fuerit" subintellecta velle: cujus praeterea reservationis memoriam quibus decet locis revocandam curabimus.

etiamsi $\alpha=0$ fuerit, permanere legitimas eo quidem pacto ut litterâ illâ τ tunc limes ipse, in quem Arctg$\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, quippe quoniam, tendente α in zéro ex plaga positivâ, $\pm\frac{\pi}{2}$ ipsi sunt limites hujus Arctg$\frac{\beta}{\alpha}$ (prout positiva est β aut negativa) et quidem vice versâ $\mp\frac{\pi}{2}$ tendente α in 0 ex plaga negativâ.

Ex his porro consequitur — quaequae sint α et β quantitates reales (certe nisi ambae $=0$) — fore ut, p realem denotante quantitatem valore numerico integro aut 0, semper valeat

$$(4)\ \ldots\ x^p=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^p=\varrho^p(\text{Cos}\,p\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\theta),$$

θ realem denotante, quamviscumque eligi placuerit ex iis, quarum Sinus et Cosinus aequationibus (3) seu conditioni huic

$$(5)\ \ldots\ \alpha+\beta\sqrt{-1}=\varrho(\text{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta)$$

satisfaciant; eamque ipsam ob rem contendi licere, prout α positiva est aut negativa, valere

$$(4')\ldots x^p=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^p=(\pm\varrho)^p\ (\text{Cos}\,p\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\tau),$$

ambasque simul aequationes hasce, dum $\alpha=0$ est, eo quidem pacto ut litterâ illâ τ tunc limes ipse, in quem Arctg$\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, ideoque $\pm\frac{\pi}{2}$ in superiori, at in inferiori $\mp\frac{\pi}{2}$, prout positiva est aut negativa β.

§. 2.

De Radicibus et Potentiis (Exponente reali) quantitatis cujuscumque.

Obs. Quantitas ipsa haud $=0$ esse supponitur. (Vid. Not. pag. 388.)

1. Si convenit (ut reverâ fert consuetudo) signo $((\alpha+\beta\sqrt{-1}))^{\frac{1}{n}}$, breviter $((x))^{\frac{1}{n}}$ seu $\sqrt[n]{x}$, eam intelligi formulam generalem, quae in se cunctas simul continet ipsius x Radices n^{ti} ordinis (n numero integro),

tum signo $((x))^{\frac{m}{n}}$ eam, quae in se m^{tam} Dignitatem (m numer. int.) uniuscujusque harum Radicum continet,

et signo $((x))^{-\frac{m}{n}}$ intelligi $\dfrac{1}{((x))^{\frac{m}{n}}}$;

probari licet, μ breviter denotante quantitatem realem formae + aut $-\frac{m}{n}$ (m et n num. int.), semper haberi

$$(6) \quad \ldots \quad ((x))^\mu = \varrho^\mu (\mathrm{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\theta)\,((1))^\mu,$$

θ denotante (ut supra) atque

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad ((1))^\mu = \mathrm{Cos}\,2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi,$$

valore ipsius k, praeterquam quod numerus erit integer aut 0, indeterminato relicto, sed tamen pro certo statui licet tributis ipsi $2k$ ex ordine omnibus, qui inter 0 et n (inclusive) versantur, numerorum parium valoribus (0 inclus.) reverâ exinde cunctos, quorum capax sit membrum illud (7) posterius, comparatos esse valores. Et quidem si fuerit $\frac{m}{n}$, i. e. valor ipsius μ numericus, fractio irreductibilis (m et n inter se primi, $n > 1$); cuncti hi valores sunt numero n, eodemque in casu

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad ((1))^{\pm\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}} = ((1^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Ne ipsâ quidem positione singulari valoris ipsius μ numerici integri aequationes istae (6) et (7) irritae evadunt; praeterea in hoc casu, ut ex aequat. (4) patet, $((x))^\mu$ in ipsam x^μ abit. Tandemque si convenit signo $((x))^0$ — (cui equidem signo in Analysi nullus hucusque fuit sensus tributus) — eam intelligi formulam, in quam membrum (6) posterius posito $\mu = 0$ abit, ideoque $((x))^0 = 1 = x^0$; exinde jam nobis venia consequitur statuendi veras permanere aequationes illas (6) et (7), quaequae sit μ quantitas realis ac rationalis.

Quod ad singularem illam positionem $x = -1$ attinet, licitum est unà cum eà, quam dat aequatio (6),

$$(9) \ldots\ldots ((-1))^\mu = (\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi)((1))^\mu,$$

hanc usitare aequationem

$$(9') \ldots\ldots ((-1))^\mu = \mathrm{Cos}\,(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi$$

ex eâque cunctos (numero n, ubi plurimum) elicere valores tribuendo successive ipsi $(2k+1)$ omnes, qui inter 0 et n (inclusive) versantur, numerorum imparium valores. Et quidem si fuerit $\frac{m}{n}$ (valor ipsius μ numericus) fractio irreductibilis, cuncti hi n valores diversi sunt eodemque in casu

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad ((-1))^{\pm\frac{m}{n}} = (([-1]^m))^{\frac{1}{n}}.$$

Dato jam unicuique earum, quae in signo $((x))^\mu$ — „Exponente“ μ reali ac rationali — comprehenduntur, quantitatum nomine „μ-Potentiae ipsius x“, ex aequat. (6) lex habetur

Digitized by Google

notabilis ista: Cunctas si vis comparare quantitatis cujusdam μ-potentias, sufficiet ut earum unica quaelibet in μ-potentias unitatis ex ordine omnes multiplicetur, seu (ut eam aliter pronuntiari licet): Unica μ-potentiarum quantitatis x quâlibet per $((1))^\mu$ multiplicatâ, quid valeat generale illud signum $((x))^\mu$ habebis. *)

2. In aequatione generali (6), uti supra est monitum, θ quamlibet assumi licet quantitatum realium, quarum Sin. et Cos. legi (5) satisfaciunt. Eorum tamen, quae sequuntur, vel maximi interest ut jam ad formam, quae aequationi huic (6) illato ibi τ (i. e. Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$) contingat, probe attendatur.

Dum α positiva est, quoniam tunc θ cooptari licet τ ipsum (§. 1.), aequationi (6) inde forma contingit ista

$$(6') \;.\;.\;.\;.\; ((x))^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau)((1))^\mu$$
$$= ((\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau);$$

dum vero α negativa est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau + \pi$,

$$((x))^\mu = \varrho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau+\pi)]((1))^\mu$$
$$= \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau)((-1))^\mu$$
$$= ((-\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau);$$

---

*) Binae quaelibet μ-potentiarum ipsius x ex membro (6) posteriori seu ex formulâ

$$\varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)[\text{Cos}\,2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,2k\mu\pi]$$

comparantur, aptum si tribueris ipsi k valorem singularem. Sit k' talis (quem placuerit potissimum). Contendo jam fore ut una vel altera formularum

$$\varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)[\text{Cos}\,2k'\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,2k'\mu\pi],$$

per $((1))^\mu$ multiplicata, productura sit $((x))^\mu$. Id quod reverà patet ex eo, quod loco utriusque ambarum harum

$$\varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)[\text{Cos}\,2k'\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,2k'\mu\pi]((1))^\mu$$

seu (quod idem valet) harum

$$\varrho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\theta \pm 2k\pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\theta \pm 2k\pi)]((1))^\mu,$$

scil. ipsâ $2k\pi$ eodem signo utrobique affectâ, substitui licet

$$\varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)((1))^\mu,$$

quippe quoniam littera θ (uti supra est monitum) designatum volumus arcum quem potissimum placuerit eligi ex iis, quorum Sin. et Cos. ipsi (5) satisfaciunt.

Digitized by Google

atque dum $\alpha = 0$ est, quoniam tunc θ cooptari licet ex arbitrio vel τ vel $\tau + \pi$ (eo quidem pacto, quod in §. 1. erat commemoratum), una harum (6′) et (6″) valet aeque ac altera, eo quidem pacto ut litterâ τ tunc limes ipse, in quem Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, — h. e. $\pm\frac{\pi}{2}$ in aequat. (6′), at $\mp\frac{\pi}{2}$ in (6″), prout positiva sit aut negativa β.

Cunctos si quis voluerit elicere valores diversos, quorum capax sit membrum aequat. (6′) et (6″) unumquodque, sufficiet (uti supra est monitum) ut ipsi $2k$ in

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((1))^{\mu} = \mathrm{Cos}\, 2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, 2k\mu\pi$$

successive omnium, qui inter 0 et denominatorem valoris μ numerici (inclus.) versantur, numerorum parium valores tribuantur, atque ipsi $2k + 1$ in

$$(9') \quad . \quad . \quad . \quad ((-1))^{\mu} = \mathrm{Cos}\,(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi$$

success. omnium, qui eosdem intra limites versantur, numerorum imparium valores tribuantur.

3. De Potentiis Principalibus. Ex μ-potentiis quantitatis x unam prae caeteris et quidem notâ illâ $(x)^{\mu}$ seu x^{μ} insigniri juvabit. Cuinam potissimum tribuatur hoc signum, decreturos nos omnium primo meminisse oportet, quisnam illi sensus in singularibus partium Analyseos praecedentium casibus jam fuerit tributus, scilicet

1⁰) x Numerum denotante, signum x^{μ} illi ipsi Numero, qui μ-potentiam hujus x conficit, fuit reservatum;

2⁰) x quantitate quâlibet, dum ipsi μ valor contigit numericus integer aut 0, signo x^{μ}

si fuerit α positiva, reservata erat aequatio

$$(11) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{\mu} = \varrho^{\mu}(\mathrm{Cos}\, \mu\tau + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \mu\tau),$$

sin vero α negativa, aequatio

$$\begin{aligned}(11') \quad . \quad . \quad . \quad x^{\mu} &= \varrho^{\mu}[\mathrm{Cos}\, \mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \mu(\tau+\pi)] \\ &= \varrho^{\mu}(\mathrm{Cos}\, \mu\tau + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \mu\tau)(-1)^{\mu} \\ &= (-\varrho)^{\mu}(\mathrm{Cos}\, \mu\tau + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \mu\tau),\end{aligned}$$

scilicet

$$(-1)^{\mu} = \mathrm{Cos}\, \mu\pi + \sqrt{-1}\, \mathrm{Sin}\, \mu\pi,$$

atque, si $\alpha = 0$ fuerit, una harum aeque ac altera aequatio (eo, quod supra dicebatur, pacto), seu breviter

Digitized by Google

$$(11'') \; \ldots\ldots \; (\beta\sqrt{-1})^\mu = (\sqrt{\beta^2})^\mu (\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2}),$$

prout positiva erat β aut negativa.

Quorum cum ea, quae ad quantitatem x parte reali haud negativâ instructam attinent, in lege isthac

$$(12) \; \ldots\ldots \; x^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

scilicet τ — dum $\alpha=0$ est — denotante $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est aut negativa, continentur; jam patet omnino, quo concilietur definitio signi x^μ (dum pars realis ipsius x haud negativa est), pro μ reali quâlibet eâdemque rationali, in ipsâ (12) adquiescere jure optimo licere.

Quod ad x parte reali negativâ instructam attinet, quoniam in hoc casu praeter (11') nullâ adstricti sumus lege praecedente, patet, quo concilietur huic casui definitio signi x^μ generalis, licere in ipsâ hac (11') adquiescere.

Quae jam definitae sunt ambae x^μ, ut ex membro aequationum (6') et (6'') secundo constat, eae sunt μ-potentiae ipsius x, quae positioni $k=0$ in expressione (7) ipsius $((1))^\mu$ generali debentur. Hae ipsae sunt, quarum utrique nomen „μ-potentia ipsius x principalis" seu „valor ipsius $((x))^\mu$ principalis" — (altera nempe, dum α haud negativa est, altera dum α positiva) — usque erit reservatum. Itaque, μ quâlibet reali ac rationali, habentur

$$(13) \; \ldots \; \begin{cases} 1^\mu = 1, \\ (-1)^\mu = \text{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi; \end{cases}$$

atque in genere, prout α haud negativa est aut negativa,

$$(14) \; \ldots \; x^\mu = (\pm\varrho)^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

scilicet

$$(15) \; \ldots\ldots \; (-\varrho)^\mu = \varrho^\mu(-1)^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi),$$

eo quidem pacto ut, dum $\alpha=0$ est, litterâ illâ τ tunc limes ipse, in quem $\text{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur (i. e. $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est aut negativa), verbo igitur

$$(16) \; \ldots\ldots \; (\beta\sqrt{-1})^\mu = (\sqrt{\beta^2})^\mu(\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2} \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2}),$$

prout positiva est aut negativa β.

Observ. Dolendum sane esse videtur quod de x^μ heic, ubi de μ reali ac rationali quâcumque ageretur, non idem plane ac

Digitized by Google

ubi antea de μ numerice integrâ (0 inclusive) illata erat mentio, licuerit contendi: valere (inquam) ambas illas (14), prout α positiva fuerit aut negativa, atque pro $\alpha=0$ unam aeque ac alteram eo, quod supra dicebatur, pacto ut litterâ τ in hoc casu limes intelligeretur ipse, in quem Arctg $\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergat, h. e. $\pm\frac{\pi}{2}$ in superiori (14) at vice versâ $\mp\frac{\pi}{2}$ in inferiori, prout positiva fuerit aut negativa β. Quam scilicet si temere pronuntiavissemus assertionem, id jure (dum β negativa est) nobis vitio esset vertendum, quod uno signo eodemque $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ duabus — certe nisi μ forte integra numerice aut 0 fuisset — disparibus hisce

$$(\sqrt{\beta^2})^\mu(\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2}-\sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$$

et

$$(-\sqrt{\beta^2})^\mu(\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2})$$

$$\text{i. e. } (\sqrt{\beta^2})^\mu(\text{Cos}\frac{3\mu\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{3\mu\pi}{2})$$

tributo confusionem nos sane graviorem Analysi induxissemus.

Quid autem? Quandoquidem, ut ex verbis novissimis plane apparet, quantitatum illarum x^μ seu $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ suum utraque in limitem convergit, decrescente valore ipsius α numerico indefinite, certe dum β negativa est nec μ valore numerico integro aut 0; nonne rei melius fuisset consultum, si, quemadmodum de signo 0^ν in nota pag. 388., sic quoque de signo ipso $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ statuissemus fore (inquam) ut in Analysi nusquam adhiberetur hoc signum, nisi quo limes umquam significaretur ipse, in quem imaginaria ea, cujus tunc mentio sit, quantitas x^μ parte suâ reali in 0 decrescente indefinite convergat? (quo ex statuto id nobis praeterea commodi esset profectum, ut in sequentibus nullâ opus foret signi $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ mentione speciali). Verumenimvero tali quodam decreto Analysi vel pessime fore consultum, ex eo solo patet, quod in Analysi saepenumero fit ut haec formula $\beta\sqrt{-1}$ separatam denotat suique quasi juris quantitatem (ideoque non tunc temporis limitem modo, in quem unum vel alterum genus quantitatum $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, valore numerico ipsius α indefinite decrescente, convergat): ex quo consequitur Analyseos non minoris interesse, ut notio illa „potentia ipsius $\beta\sqrt{-1}$ principalis“ [seu quid valeat signum $(\beta\sqrt{-1})^\mu$] definiatur, quam ut certa sit stabilisque vis signi ipsius $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, sive positiva sit sive negativa quantitas α.

Quum jam in eo eramus heic supra, ut definiretur hoc signum $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ — [vid. aequationem (16)] —; nullâ ex antecedentibus praeter aequationem (11''), eandemque non nisi de μ numerice integra aut 0 constitutam, adstricti eramus lege praecedente. Re

igitur ipsâ id solum nobis fuisse relictum negotium videbatur, ut legem hanc (11″) μ quâlibet reali ac rationali ratam esse deferremus, praesertim quum tali ex edito id insuper commodi redundavit, ut aequationum illarum (14) altera certe, scilicet

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}=\varrho^{\mu}(\operatorname{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau),$$

legitima exinde non solum pro α positivâ sed pro α haud negativa reddita sit.

(De hac re plura in Not. I. sub finem Dissertationis.)

Ex aequationibus (6′) et (6″) cum (14) collatis perspicitur omni in casu haberi

$$(17) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^{\mu}=x^{\mu}((1))^{\mu},$$

id quod praeterea jam cognitum erat ex ea, quae in fine art. I. praeced. exposita fuerat, lege.

Et quidem ex (14) patet haberi, dum α negativa est, semper

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{\mu}=(-x)^{\mu}(-1)^{\mu},$$

nec tamen semper, dum α haud negativa est.

Nota.

Eo in casu, quo sit „Exponens“ illa μ fractio, cui cedat Numerator unitas ($\mu=\frac{1}{n}$, n num. int.), potentiae illi principali $x^{\frac{1}{n}}$ hoc quoque signum $\sqrt[n]{x}$ nomenque „Radix ex quantitate x $n$ti gradûs principalis“ reservata erunt.

Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae $\sqrt[n]{x}$, scilicet

$$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}},$$

ea, quae de hac notulâ in partibus Analyseos praecedentibus (scil. dum x Numerus est nec non -1) statuta sunt, neutiquam laedere patet ex aequat. (14) et (15). Radix ex Numero quodam principalis (ut apparet) ipsa est ea, cui nomen in Elementis cessit „Radix numeri positiva.“

4. Quibus peractis jam constat, quid in Analysi valeat signum

$$x^{\mu},$$

certe dum, x quantitate quâlibet, μ realis est atque rationalis. Irrationali μ nullus omnino in praecedentibus, excepto casu illo singulari $\beta=0$ et α positivâ, tributus fuit sensus. Licet igitur abhinc, omni absque praecedentium noxâ, signum illud x^{μ} in hoc etiam casu (μ irrationali) membro secundo aequationum (11) et (11′) — seu ipsius (14) — aequivalens statuere, quippe quoniam hoc admisso aequat. ipsa (11) identica, dum $\beta=0$ ponitur, evadit. Quo facto jam, quid valeat signum

Digitized by Google

(1) . . . . x^y,

quaequae sit y quantitas realis, perfecte est determinatum.

Monere juvat hoc loco nihil sane impedire, quominus aequatio illa (6) ideoque etiam aequ. (6′) et (6″) hoc etiam in casu (μ irrationali) ratae sistantur, quippe quoniam tali μ quantitate signo illi $((x))^\mu$ in Analysi nondum tributus fuit sensus.

Omnibus jam eis, quae de Potentiis quantitatum hucusque statuta fuerunt, principiis in unum collatis memorabile hoc comparatur

Theorema.

Siquidem, $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$ quantitate quâlibet (certe haud $=0$), α et β realibus,

- p realis sit numerice integra aut 0,
- μ realis quaelibet,
- ϱ modulus $=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$,
- θ realis, quam potissimum placuerit eligi ex iis, quarum Sin. et Cos. aequationi (5) satis faciunt,
- $\tau=\text{Arctg}\,\dfrac{\beta}{\alpha}$;

semper obtinet

$$\text{(I)} \quad x^p \text{ seu } (\varrho[\text{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta])^p = \varrho^p(\text{Cos}\,p\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\theta),$$

$$\text{(II)} \quad ((x))^\mu \text{ seu } ((\varrho[\text{Cos}\,\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\theta]))^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)((1))^\mu = ((\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\theta+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta);$$

nec non semper, prout α positiva est aut negativa,

$$\text{(III)} \quad x^p=(\pm\varrho[\text{Cos}\,\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau])^p = (\pm\varrho)^p(\text{Cos}\,p\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,p\tau),$$

$$\text{(IV)} \quad ((x))^\mu=((\pm\varrho[\text{Cos}\,\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau]))^\mu = ((\pm\varrho))^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

et quidem, dum $\alpha=0$ est, superiori aeque ac inferiori uti licet signo, eo quidem pacto ut litterâ τ tunc limes intelligatur ipse, in quem $\text{Arctg}\,\dfrac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico decrescente indefinite convergat, h. e. $\pm\dfrac{\pi}{2}$, dum

superiori uteris signo, at $\mp\frac{\pi}{2}$ dum inferiori, prout positiva est aut negativa β;

tum semper aequatio obtinet

$$(V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^\mu = (\pm\varrho[\mathrm{Cos}\,\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\tau])^\mu$$
$$= (\pm\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

eâ quidem subjectâ conditione ut superiori utaris signo, dum α positiva est aut zéro (quo in casu novissimo litterâ illâ τ limites $\pm\frac{\pi}{2}$, prout β positiva est aut negativa, intelligantur), inferiori autem dum negativa est α; scilicet

$$(VI) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((\varrho))^\mu = \varrho^\mu((1))^\mu,$$

$$(VII) \quad . \quad . \quad . \quad ((-\varrho))^\mu = (-\varrho)^\mu((1))^\mu = \varrho^\mu((-1))^\mu,$$

$$(VIII) \quad (-\varrho)^\mu = \varrho^\mu(-1)^\mu = \varrho^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi);$$

porro

$$(IX) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^\mu = x^\mu((1))^\mu:$$

adeo ut, cunctas si vis obtinere quantitatis cujusdam μ-potentias, sufficiat ut principalem illius μ-potentiam per omnes ex ordine μ-potentias unitatis multiplices; denique, dum α negativa est,

$$(X) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^\mu = (-x)^\mu(-1)^\mu.$$

De caetero meminisse juvabit, non solum esse

$$(XI) \quad . \quad . \quad . \quad ((1))^\mu = \mathrm{Cos}\,2k\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi,$$

$$(XII) \quad ((-1))^\mu = (-1)^\mu((1))^\mu = (\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi)((1))^\mu,$$

$$(XII') \quad . \quad . \quad . \quad = \mathrm{Cos}\,(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,(2k+1)\mu\pi,$$

in quibus k (indeterm.) breviter „numerum int. aut 0“ denotat;

sed etiam fore ut, dum μ rationalis est quantitas $= +$ aut $-\frac{m}{n}$ (m et n numeri int.), pro certo statui liceat tributis ipsi $2k$ in (XI) successive omnibus, qui inter 0 et n (inclusive) versantur, numerorum parium (0 inclus.) atque ipsi $2k+1$ in (XII′) successive omnibus, qui eosdem inter limites versantur, numerorum imparium valoribus reverâ cunctos (et quidem numero n, ubi plurimos), quorum capaces sunt $((1))^\mu$ et $((-1))^\mu$, valores ex membr. poster. (XI) et (XII′) esse comparatos;

Digitized by Google

tandemque, ubi fuerit $\frac{m}{n}$ fractio irreductibilis (m et n inter se primi, $n > 1$), cunctos hos utriusque $((1))^{\mu}$ et $((-1))^{\mu}$ valores ipso esse numero n, eodemque in casu

$$\text{(XIII)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad ((1))^{\pm\frac{m}{n}} = ((1))^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{(XIV)} \quad \ldots\ldots \quad ((-1))^{\pm\frac{m}{n}} = (([-1]^{m}))^{\frac{1}{n}}.$$

Corollarium.

De Radicibus quantitatum realium. Theoremati convenienter praecedenti totidem sunt quantitatis cujuscumque (realis aeque ac imaginariae) n^{ti} ordinis Radices, quot contineat „Index" (numerus ordinis n) unitates; praeterea aequatio illa (IX) indicat, cunctas si placeat n^{ti} ordinis radices quantitatis comparare, sufficere ut radix ipsa principalis (ejusdem ordinis) per omnes successive unitatis radices n^{ti} ordinis multiplicetur. Itaque, dum A Numerum quemdam denotat, habentur

$$\text{(IX}'\text{)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\mathbb{V}}A = ((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{A} \\ \text{et} \\ \overset{n}{\mathbb{V}}-A = ((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt{}-A, \end{array} \right.$$

id quod jam insuper (VI) et (VII) indicabant.

Sin vero placet ambas hasce $\overset{n}{\mathbb{V}}\pm A$ ipsâ $\sqrt[n]{A}$ (h. e. radice principali ex valore numerico quantitatis $\pm A$ seu, quam vocant, Arithmeticâ ipsius A radice vel potius eo ipso Numero, qui radicem n^{ti} ordinis ex A conficit) expressas habere; aequationes illae (VI) et (VII) suppeditant

$$\text{(IX}''\text{)} \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \overset{n}{\mathbb{V}}A = ((1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{A} \\ \text{et} \\ \overset{n}{\mathbb{V}}-A = ((-1))^{\frac{1}{n}}.\sqrt[n]{A}, \end{array} \right.$$

quas equidem his fere verbis interpretari licet: Cunctas si placeat comparare n^{ti} ord. radices ex quantitate reali, sufficit ut Arithmetica n^{ti} ord. radix ex valore quantitatis numerico per omnes successive ejusdem ordinis radices ex unitate positivâ aut negativâ, prout quantitas ipsa proposita positiva est aut negativa, multiplicetur. Praeterea hae ipsae sunt aequationes novissimae, ex quibus rectâ consequitur lex illa notissima, in omnibus inquam n^{ti} ord. radicibus ex numero A unicam $\sqrt[n]{A}$, dum n impar est, at duas $\pm\sqrt[n]{A}$ n pari, esse reales; ex negativâ autem quantitate $(-A)$ unicam $-\sqrt[n]{A}$, dum n impar est, at n pari ne unam quidem, esse realem.

Digitized by Google

Nota. Probe est notandum numquam fieri ut $\sqrt[n]{-A} = -\sqrt[n]{A}$ sit (dum $n > 1$): illa, utpote quae principalem ipsius $-A$ conficit radicem, semper imaginaria est quantitas, scilicet

$$\sqrt[n]{-A} = \sqrt[n]{A}.\sqrt[n]{-1} = \sqrt[n]{A}.(\text{Cos}\frac{\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\pi}{n});$$

haec autem semper realis. *)

---

*) Fieri quidem potest ut graviter ferenda, primo saltem intuitu, videatur licentia realem, dum exsistit, quantitatis negativae radicem denominatione „radicis principalis" signoque $\sqrt[n]{}$ simplici fraudandi: seu (quo uno omnia complectamur verbo) temere forsan videbitur ac praepropere actum, quod in μ-potentiis quantitatis x (parte reali negativâ) non ea potissimum ornata fuerit denominatione „principalis" signoque illo x^μ, ea (inquam) quae realis ipsa evadit, dum x realis est et μ formâ $\frac{1}{n}$, n impari (scil. n pari nulla earum, quae in $\sqrt[n]{\!\!\sqrt{}}{-A}$ continentur, realis est). Verumtamen ex eo, quod μ-potentiae ipsius x (parte reali negativâ) omnes datae sunt formulâ

$$((x))^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau)[\text{Cos}(2k+1)\mu\pi \pm \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,(2k+1)\mu\pi],$$

patet quod diximus offendiculum aliter evitari non posse, nisi x^μ cooptaretur ea, cujus $(2k+1)\mu$ integro sit valore numerico — dum ita fieri poterit. Quod vero $2k+1$ talis nunquam exsistit, nisi forte fuerit μ rationalis ac valore numerico fractionis cui cedat imparis numeri denominator, propterea patet omnino arbitrio nihil aliud esse relictum, quam ut vel signo x^μ complures et quidem aliae aliis μ-valoribus propriae subjiciantur notiones — (id quod reverâ si foret admissum, periculum est ne ex hoc ipso in Cauchyanum illud induceremur consilium signi hujus x^μ, parte reali ipsius x negativâ, ex Analysi prorsus tollendi) — vel etiam eâ, quam nos supra inivimus, ratione (quamvis primo forsan conspectu speciem quandam prae se ferat offensionis) definiatur hoc signum. Utrum eligatur potissimum, id facile constat ratione habitâ emolumenti, quod Analysi contingat ex definitione ita comparatâ, ut in omnem μ quadret (realem immo non minus ac imaginariam). Nec id solum; alia est quaedam insuper, eademque ad hunc usque diem (quod jure licet mirari) neglecta, gravissimi sane ad rem dirimendam momenti ratio ea, quam indicant leges illae in num. 2°). 3°) et 4°) §i. 5. relatae: quippe quibus inopinatum fere arctissimumque, quo inter se cohaerent vinculo societatis ambo quantitatum genera ea, quae nos heic signis illis x^μ (quin immo $x^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$) et lx — negativa sit x quâ partem realem nec ne — intelligenda statuimus, est indicatum. Quâ demum perspectâ societate primo quidem patet, quemadmodum in quantitatibus signo $f((x))$ comprehensis nullam omnino signo lx notandam realem (dum x negativâ est parte reali) deprehendi licebit, sic quoque, dum in eo res agitur ut ex agmine quantitatum $((x))^\mu$ eligatur x^μ, id sane levioris esse momenti quod forte inter $((x))^\mu$ illas quaepiam exsistat, cui pro μ-valore quodam speciali forma cedat realis; tum vero deinceps haud praeterit, si ratione illâ forsitan praeoptatâ determinaretur x^μ (pro x quâ partem realem negativâ), profecto fore ut incassum abiret quod modo diximus vinculum societatis unâ cum omnibus, quae ex mirâ hac conjunctione pendent, legibus Analysi vere salutaribus.

Praeterea jure licet contendere jam signo ipso $-\sqrt[n]{A}$ effectum esse, ut reali illi $n$ti ordinis radici ex $(-A)$ satis contigerit remunerationis.

Digitized by Google

5. **Idiomata potentiarum principalium praecipua.** Ex aequatione (I) theorematis praecedentis rectâ consequitur fore ut, cujusvis sint generis quantitates x, x_1, x_2, ... x_n, si modo reales fuerint ac numerice integrae aut 0 istae p, p_1, p_2, ... p_n, ratae sint quae sequuntur leges (quarum praeterea auctoritas, dum x, x_1, ... x_n Numeros denotant, ex Elementis jam cognita est):

$$\left\{\begin{array}{l} x^p . x^{p_1} . x^{p_2} .... x^{p_n} = x^{p+p_1+p_2+....+p_n}, \text{ nec non } \dfrac{x^{p_1}}{x^p} = x^{p_1-p}, \\ \left.\begin{array}{l} \qquad (x^p)^{p_1} = x^{pp_1} \\ \text{ideoque etiam } = (x^{p_1})^p, \end{array}\right\} \\ x^p . x_1^p . x_2^p .... x_n^p = (x x_1 x_2 .... x_n)^p \text{ atque } \dfrac{x_1^p}{x^p} = \left(\dfrac{x_1}{x}\right)^p. \end{array}\right.$$

Sin vero reales equidem at ceteroquin indeterminatae relictae supponantur Exponentes μ, μ_1, μ_2, ... μ_n; non nisi certis subjectis conditionibus leges valent eaedem (quamvis sic quoque in genere iis uti liceat, ut satis constat, dum Numeri sunt x, x_1, ... x_n).

1°) **Haec tamen aequatio**

$$(19) \quad ..... \quad x^\mu . x^{\mu_1} . x^{\mu_2} .... x^{\mu_n} = x^{\mu+\mu_1+\mu_2+....+\mu_n}$$

numquam non valet, ideoque non minus aequatio

$$(20) \quad .... \quad \frac{x^{\mu_1}}{x^\mu} = x^{\mu_1-\mu}$$

atque in specie haecce

$$(20') \quad .... \quad \frac{1}{x^\mu} = x^{-\mu}.$$

Demonstr. Nam, parte reali ipsius x haud negativâ, aequatio (V) dat

$$x^\mu x^{\mu_1} ... x^{\mu_n} = \varrho^{\mu+\mu_1+....+\mu_n} \{\mathrm{Cos}(\mu+\mu_1+....+\mu_n)\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}(\mu+\mu_1+...+\mu_n)\tau\}$$
$$= x^{\mu+\mu_1+....+\mu_n}.$$

Et quidem, negativâ ipsius x parte reali, aequ. (V) cum (VIII) conjuncta dat

$$x^\mu x^{\mu_1} .... x^{\mu_n}$$

$$= \varrho^{\mu+\mu_1+....+\mu_n} . \left.\begin{array}{l} \{\cos(\mu+\mu_1+....+\mu_n)\tau \\ \qquad + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}(\mu+\mu_1+.....+\mu_n)\tau \end{array}\right\} . (-1)^\mu (-1)^{\mu_1} .... (-1)^{\mu_n},$$

Digitized by Google

i. e. quoniam ex (13), ut patet, $(-1)^{\mu}(-1)^{\mu_1}\ldots(-1)^{\mu_n}=(-1)^{\mu+\mu_1+\ldots+\mu_n}$ est,

$$=x^{\mu+\mu_1+\ldots+\mu_n}.$$

Q. E. D.

2°) Aequatio illa

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x^{\mu})^{\mu_1}=x^{\mu\mu_1}$$

valet (μ et μ_1 quibuscumque) certe quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, productum illud $\mu\tau$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (τ denotante, uti assolet).

Demonstr. Est enim in hoc casu (parte reali x haud negativâ), secundum (V),

$$x^{\mu}=\varrho^{\mu}(\text{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

nec non, quoniam heic $\mu\tau$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excederet, eâdem ex (V)

$$(x^{\mu})^{\mu_1}=\varrho^{\mu\mu_1}(\text{Cos}\,\mu_1\mu\tau+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu_1\mu\tau)=x^{\mu\mu_1}.$$

Q. E. D.

Nec minus valet ista aequatio, quoties, parte reali ipsius x negativâ, productum illud $\mu(\tau+\pi)$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat. Nam parte reali x negativâ ex aequ. (V) et (VIII) habetur

$$x^{\mu}=\varrho^{\mu}[\text{Cos}\,\mu(\tau+\pi)+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau+\pi)],$$

nec non, quoniam heic $\mu(\tau+\pi)$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excederet, eâdem ex (V)

$$(x^{\mu})^{\mu_1}=\varrho^{\mu\mu_1}[\text{Cos}\,\mu_1\mu(\tau+\pi)+\sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu_1\mu(\tau+\pi)],$$

quae quidem in hoc casu (negativâ ipsius x parte reali) reverâ valorem conficit ipsius $x^{\mu\mu_1}$, secundum (V) et (VIII). — Q. E. D.

Quibusnam praeterea in casibus rata sit nec ne aequatio illa (21), μ et μ_1 realibus indeterminatis relictis, id opus non heic est exponi: quippe quod, ubi forte sit opus, perfacili semper negotio licet discerni. De caetero in § 4. sequenti (pag. 411.) universalem magis ac vere notandum casuum, in quibus valeat ista aequatio, characterem in medio proferendum curabimus. Quadrati hoc idem in aequationem

$$(22) \quad \ldots\ldots \quad (x^{\mu})^{\mu_1}=(x^{\mu_1})^{\mu},$$

quae quidem certe (ut ex modo allatis patet) vim habet legitimam 1°) quoties, parte reali x haud negativâ, illorum $\mu\tau$ et $\underset{1}{\mu}\tau$ neutrum limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, atque 2°) quoties, negativâ ipsius x parte reali, productorum $\mu(\tau+\pi)$ et $\underset{1}{\mu}(\tau+\pi)$ neutrum limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat.

3°) Aequatio illa

$$(23) \quad \ldots\ldots \quad x^\mu x_1{}^\mu \ldots. x_n{}^\mu = (x x_1 \ldots. x_n)^\mu$$

valet (μ quâlibet) certe quoties, realibus ipsarum x, x_1, ... x_n partibus haud negativis, summa illa

$$(24) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau + \tau_1 + \ldots. + \tau_n$$

limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat: — ubi videlicet

$$\tau = \text{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \ \ \tau_1 = \text{Arctg}\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \ldots. \tau_n = \text{Arctg}\frac{\beta_n}{\alpha_n};$$

atque

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \ x_1 = \alpha_1 + \beta_1\sqrt{-1}, \ldots x_n = \alpha_n + \beta_n\sqrt{-1}.$$

Demonstr. Quod enim partes reales omnium x, x_1, ... x_n haud negativae sint, ideoque (ϱ, ϱ_1, ... ϱ_n modulos denotantibus)

$$x = \varrho(\text{Cos}\,\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau), \ x_1 = \varrho_1(\text{Cos}\,\tau_1 + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau_1), \ldots.$$
$$\ldots. x_n = \varrho_n(\text{Cos}\,\tau_n + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\tau_n),$$

propterea secundum (V) habetur

$$x^\mu x_1{}^\mu \ldots. x_n{}^\mu = (\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n)^\mu \{\text{Cos}\,\mu(\tau+\tau_1+\ldots+\tau_n) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau+\tau_1+\ldots\,\tau_n)\},$$

i. e.

$$= (x x_1 \ldots. x_n)^\mu,$$

quippe quoniam summa illa (24) limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedere posita erat.

Q. E. D.

Quod ad specialem illam

$$(23') \quad \ldots\ldots\ldots \quad x^\mu x_1{}^\mu = (x x_1)^\mu$$

attinet, facile patet satisfactum eâ esse conditioni heic supra expositae, quoties, realibus ipsarum x et x_1 partibus haud negativis, pars ipsa realis producti $x x_1$ haud negativa

Digitized by Google

sit. *) — Est alius insuper casus singularis, quo valet ista (23′) is inquam ubi, parte reali x positivâ, x_1 ipsa $=-1$ fuerit: etenim tunc secundum (X) habetur

$$(23'') \quad \ldots\ldots \quad x^\mu.(-1)^\mu=(-x)^\mu.$$

Quibusnam praeterea casibus rata sit nec ne aequatio illa (23), μ indeterminatâ relictâ, id opus non heic est exponi: quippe quod, ubi forte sit opus, perfacili semper negotio licet discerni. De caetero in §. 4. sequenti (pag. 412.) universalem magis ac vero notandum casuum, quibus valeat ista aequatio, characterem in medio proferendum curabimus.

4⁰) Aequatio illa

$$(25) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{x_1{}^\mu}{x^\mu}=\left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu$$

valet (μ quâlibet), certe quoties haud negativae sint partes reales tum utriusque x et x_1 tum Quoti ipsius $\frac{x_1}{x}$. Etenim si ita fuerit, ex (23′) habetur $x^\mu\left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu=x_1{}^\mu$.

Exinde consequitur, aequationem illam

$$(25') \ldots \left(\frac{1}{x}\right)^\mu=\frac{1}{x^\mu} \text{ ideoque } =x^{-\mu} \text{ secundum (20')}$$

valere (μ quâlibet), quoties haud negativa sit pars realis ipsius x. E contrario ista aequatio, dum negativa est pars realis ipsius x, neutiquam valet (nisi forte μ numerice integra aut 0 fuerit): tunc enim habetur

$$\left(\frac{1}{x}\right)^\mu=\left(-\frac{1}{x}\right)^\mu(-1)^\mu, \text{ secund. (X);}$$

at vero

$$x^{-\mu}=(-x)^{-\mu}(-1)^{-\mu}, \text{ secund. (X);}$$

h. e.

$$=\left(-\frac{1}{x}\right)^\mu(-1)^{-\mu},$$

quoniam heic $-x$ positivâ est parte reali; et quidem inaequales sunt $(-1)^\mu$ et $(-1)^{-\mu}$, nisi forte $\operatorname{Sin}\mu\pi=0$ fuerit.

---

*) Tunc enim fieri non potest ut summa $\tau+\tau_1$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, quippe quoniam extra hos limites nullus omnino arcus exsistit, cui, summae quidem duarum quarumdam τ et τ_1 limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedentium, cosinus cedat haud negativus.

§. 3.

De signo A^y, A numero, y valore quolibet.

Observ. Postulantur abhinc, praeter ea quae in hac Dissertatione jam sunt pertractata, sequentia nota: 1°) Doctrina logarithmorum (realium) Numerorum primaque doctrinae serierum infinitarum (terminis realibus) principia ea, quae in Anal. Algébr. Chap. VI. exposuit Cauchy, — (itaque, ut paucis complectar, summa operis illius Anal. Algébr. Chap. I—VI.) — adjectâ functionum illarum $\operatorname{Sin} x$ et $\operatorname{Cos} x$ evolutione secundum dignitates ipsius x (realis) *), atque 2°) Chap. VIII. §§. 1—4 **) operis ejusdem nec non ex Chap. IX. (de seriebus terminorum imaginariorum) ea, quae paginae 289 nominatimque his verbis „Cela posé si l'on &c." ***) praecedunt.

Quid in Analysi valeat hoc signum

(1) . . . . x^y,

quaeque sit x quantitas (realis, inquam, aut imaginaria), modo sit y realis, ex praecedentibus jam constat. Reliquum est ut inveniatur, quisnam huic signo in genere, i. e. talis qui Exponenti y cuilibet $= \mu + \nu\sqrt{-1}$ (μ et ν realibus) quadret, potissimum tribuatur sensus. Eandem heic persecuturis viam, quâ in partibus Analyseos praecedentibus perventum fuit ad sensum signi x^y pro y reali determinandum, nobis primo quidem injunctum est negotium ut signum hoc $x^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$, dum x Numerus est $=A$, seu breviter signum

---

*) Cauchy, ut satis constat, hanc rem in doctrina demum summationis serierum terminis imaginariis instructarum collocavit. Quae si necessaria esset dilatio, ex eâ re solâ (ut facile patet) id nobis impedimenti moraeque foret oblatum, ut ea quae jam reliqua sunt signa (x^y illud in genere, caeteraque) definiri eorumque idiomata explicari non omnino liceret, nisi viam persecuturi, quam Cauchy munivit, praemissa postularemus fere omnia, quae in Anal. Alg. Chap. IX. §. 2. post pag. 289. sequuntur, eamque ipsam ob caussam §um. illum 5. Chap. VIII. ibid. — At vero quandoquidem functionum illarum $\operatorname{Sin} x$ et $\operatorname{Cos} x$ (x reali) secundum dignitates ipsius x explicandarum legem facili negotio, vi quidem problematis in pag. 114. Anal. Algébr. propositi, sanciri licet (cui tamen rei hoc loco tempus impendere satis foret ineptum); nos quidem, hac re ipsi Chap. VI. Anal. Algébr. vindicatâ, jam nunc morâ disjectâ nil impedit quominus ad signa, de quibus agitur [x^y, $\operatorname{Log}_b(x)$, $\operatorname{Sin} x$ etc.] complete definienda progrediamur.

**) Nos tamen ea, quae modo supra in art. 5. §i nostri 2di allata sunt, in locum paginarum 243—246. §i 1. Chap. VIII. substituenda esse censere, per se patet.

***) Quod ad ea quae his verbis succedentia §um 2um Chap. IX. conficiunt (summationem, inquam, serierum quarumdam terminis imaginariis instructarum), nec non (qui iis postulatur praemissus) §um ipsum 2um Chap. VIII. attinet, tantum abest ut praemittenda necesse sint haec omnia iis, quae ad signa de quibus heic agitur definienda eorumque explicanda idiomata pertineant (id quod jam modo supra monuimus), ut potius in systemate ipso Analyseos postponenda esse haec omnia iis, quae opusculum hoc nostrum constituunt, jure esse concedendum videatur.

Digitized by Google

$$(26) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A^{u+v\sqrt{-1}} \text{ seu } A^y$$

determinemus. Quâ tamen in re satis cognitâ paucis tantummodo heic opus est verbis.

Non solum jure licitum sed ex analogiâ etiam praefinitum esse apparet, ut y-valore quolibet statuatur definitio

$$(27) \quad \ldots \quad A^y = 1 + \frac{ylA}{1} + \frac{(ylA)^2}{1.2} + \frac{(ylA)^3}{1.2.3} + \&c.$$

ideoque in specie, e denot. Basin systematis Neperiani,

$$(27') \quad \ldots\ldots \quad e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \&c.;$$

vi quarum, y-valore quolibet, habetur relatio

$$(28) \quad \ldots\ldots\ldots \quad A^y = e^{ylA}.$$

Porro, quae ex his consequitur, aequatio

$$(29) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^y . e^{y_1} = e^{y+y_1}$$

nec non latior ista

$$(30) \quad \ldots\ldots \quad A^y . A^{y_1} \ldots . A^{y_n} = A^{y+y_1+\ldots+y_n}$$

quoniam ratae sunt valoribus ipsarum y, y_1, ... y_n quibuscumque (realibus aeque ac imaginariis), exinde rectâ facillimoque usque negotio, vi quidem legis illius functionum $\mathrm{Sin}\,x$ et $\mathrm{Cos}\,x$ (x reali) secundum dignitates ipsius x explicandarum, deducitur notissima illa formae finitae relatio

$$(31) \quad \ldots\ldots \quad e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u(\mathrm{Cos}\,v + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,v)$$

nec non latior ista

$$(32) \quad \ldots \quad A^{u+v\sqrt{-1}} = A^u(\mathrm{Cos}[vlA] + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}[vlA]);$$

quâ ex novissimâ demum patet omnino Numeris A, A_1, ... A_n valere istam

$$(33) \quad \ldots\ldots \quad A^y . A_1{}^y \ldots . A_n{}^y = (AA_1 \ldots . A_n)^y,$$

quaequae sit y quantitas realis aut imaginaria.

Nota.

Ex eo ipso quod aequatio (31), θ quâlibet reali, suppeditat

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta,$$

id efficitur, ut, loco aequationum Theorematis illius in §. 2. relati, breviores eamque ipsam ob caussam usui plerumque commodiores substitui liceat hasce:

Digitized by Google

(34) . . . x^p seu $(\varrho e^{\theta\sqrt{-1}})^p = \varrho^p e^{p\theta\sqrt{-1}}$,

(35) . . . $((x))^\mu$ seu $((\varrho e^{\theta\sqrt{-1}}))^\mu = \varrho^\mu e^{\mu\theta\sqrt{-1}}((1))^\mu$
$= ((\varrho))^\mu e^{\mu\theta\sqrt{-1}}$,

tum, prout positiva est aut negativa α,

(34') . . . . $x^p = (\pm\varrho e^{\tau\sqrt{-1}})^p = (\pm\varrho)^p e^{p\tau\sqrt{-1}}$,

(35') . . . $((x))^\mu = ((\pm\varrho e^{\tau\sqrt{-1}}))^\mu = ((\pm\varrho))^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}}$,

atque, pro $\alpha = 0$, superius aut inferius ex arbitrio signum (pacto illo solito); porro, prout α haud negativa est aut negativa, potentiae principali

(36) . . . $x^\mu = (\pm\varrho e^{\tau\sqrt{-1}})^\mu = (\pm\varrho)^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}}$;

tandemque

(37) $((1))^\mu = e^{\pm 2k\mu\pi\sqrt{-1}}$ atque $((-1)^\mu = (-1)^\mu((1))^\mu = e^{\pm(2k+1)\mu\pi\sqrt{-1}}$,

(38) . . . . $(-1)^\mu = e^{\mu\pi\sqrt{-1}} = (e^{\pi\sqrt{-1}})^\mu$.

§. 4.

I. Antequam ea, quae notulae illi (1) latissimo sensu acceptae (i. e. tali, qui ad x- et y-valores quoscumque pertineat) determinandae inserviant, adgredimur, id nobis injunctum est negotium ut, quae proxime antecedentibus intimo conjuncta sunt nexu, praecipua

De Logarithmis Quantitatum Naturalibus

principia praemittantur.

Problema. Invenire quantitates eas z universas, quibus conditioni huic

(39) . . . . $e^z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$

(e Basin denotante systematis logarithmorum naturalium, α et β quantitates reales) fiat satis; seu, quod idem valet (ϱ modulum $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ denotante ac θ quantitatem realem, quam potissimum eligi placuerit, cujus Sin. et Cos. ipsi (5) satisfaciant): Invenire quantitatis eas z universas, quibus conditioni fiat satis huic

(39') . . . . $e^z = \varrho(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)$.

Tali (si exsistat) quantitati unicuique forma cedat necesse isthaec $u + v\sqrt{-1}$ (u et v realibus), ideoque loco aequationis novissimae hanc licet substitui:

Digitized by Google

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = \varrho(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta).$$

i. e.

$$e^u(\mathrm{Cos}\,v + \sqrt{-1}\sin v) = \varrho(\mathrm{Cos}\,\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\theta)$$

seu

(40) . . . . $\begin{cases} e^u = \varrho, \text{ i. e. } u = l\varrho, \\ v \text{ formâ } \theta \pm 2k\pi. \end{cases}$

Quarum ex priori (40) jam primo quidem patet, si quantitas illa proposita $\alpha + \beta\sqrt{-1} = 0$ fuisset, nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) z, quâ fiat satis problemati. At ceteroquin semper — ut facillimum est expertu — problemati reverâ fit satis unâquâque quantitatum in formula

(41) . . . . . . $z = l\varrho + (\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}$,

quemvis placuerit ipsi k tribuere numeri integri (0 inclus.) valorem, comprehensarum.

Quantitatum, quibus aequationi (39) fiat satis, unaquaeque appellabitur „e-logarithmus quidam (item logarithmus naturalis) ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$" *): et quidem formula ea universalis, quae in se cunctos hos continet ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ seu x (breviter) logarithmos, signo illo $l((x))$ intelligenda erit. Unde aequatio illa

(42) . . . : $l((x)) = l\varrho + (\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}$,

θ denotante (uti supra est monitum).

Ex. gr. Quoniam, dum x est 1, θ cooptari licet 0, atque, dum x est -1, θ cooptari licet π;

ex aequatione (42) patet esse

(43) . . . . . . $l((1)) = \pm 2k\pi\sqrt{-1}$,

imaginariis omnibus unico $=0$ excepto,

$$l((-1)) = \pi\sqrt{-1} + l((1)) = \pm(2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

imaginariis omnibus.

Licebit igitur, loco aequationis (42), hac uti

(42′) .... $l((x)) = l\varrho + l((1)) + \theta\sqrt{-1} = l((\varrho)) + \theta\sqrt{-1}$,

quae quidem indicat, cunctos quantitatis cujusdam e-loga-

---

*) Nosmet hac definitione nullo modo ea, quae in partibus Analyseos praecedentibus de logarithmis Numerorum naturalibus statuta sunt, laedere plane apparet.

Loco vocabuli „e-logarithmus" explicatius dicitur „logarithmus ex systemate baseos e."

Digitized by Google

rithmos eo modo comparari licere, ut eorum unico — quem potissimum eligi placuerit — addatur $l((1))$ i. e. addantur successive e-logarithmi omnes unitatis.

Nota. Ex his patet, μ reali quâlibet (x haud zéro), semper obtinere

$$(45) \quad \ldots\ldots \quad e^{\mu l((x))} = ((x))^{\mu}.$$

Nam

$$e^{\mu l((x))} = e^{\mu[l\varrho + (\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}]} = \varrho^{\mu} \cdot e^{\mu(\theta \pm 2k\pi)\sqrt{-1}},$$
$$= ((x))^{\mu}, \text{ secundum } (35).$$

2. Dum α positiva est, quoniam tunc θ cooptari licet τ (§. 1. art. 2.), aequationi (42′) inde forma contingit ista

$$(46) \ldots\ldots l((x)) = l\varrho + l((1)) + \tau\sqrt{-1} = l((\varrho)) + \tau\sqrt{-1};$$

dum α negativa est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau + \pi$,

$$(46') \quad \ldots \quad l((x)) = l\varrho + l((1)) + (\tau + \pi)\sqrt{-1}$$
$$= l\varrho + l((-1)) + \tau\sqrt{-1} = l((-\varrho)) + \tau\sqrt{-1};$$

atque, dum $\alpha = 0$ est, una valet aeque ac altera aequatio, eo quidem pacto ut litterâ τ tunc limes ipse, in quem $\operatorname{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$ valore ipsius α numerico indefinite decrescente convergit, intelligatur, h. e. $\pm\frac{\pi}{2}$ in (46), at $\mp\frac{\pi}{2}$ in (46′), prout positiva est aut negativa β.

„Principali ipsius $l((x))$ valore“ seu „e-logarithmo quantitatis x principali“ eum ipsum intelligi juvabit, qui secundo membro aequationis (46) convenienter, dum α positiva est aut zéro, et secundo membro aequationis (46′) dum negativa est α, positioni $k=0$ in expressione (43) ipsius $l((1))$ generali debetur. Principali huic logarithmo signum illud $l(x)$ seu lx erit reservatum. *) Habentur itaque

$$(47) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} l(1) = 0, \\ l(-1) = \pi\sqrt{-1}; \end{cases}$$

atque in genere, dum α haud negativa est,

$$(48) \quad \ldots\ldots \quad lx = l\varrho + \tau\sqrt{-1},$$

---

*) Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae lx (x-valore quolibet) reverâ eum, quem huic signo pro x = Numero A in Elementis jam vindicarunt, sensum in integro reliquisse, id satis patet ex eo quod aequatio (48), quae significationem hujus lx pro x omni qua partem realem positivâ indicat, in hoc casu singulari identica evadit. Principalis igitur Numeri cujusdam e-logarithmus is ipse est, cui in Elementis nomen cessit „e-logarithmus numeri.“

Digitized by Google

scilicet, si $\alpha=0$, litterâ τ intelligatur (ut supra),

dum vera α negativa

$$(48') \dots\; lx = l\varrho + (\tau + \pi)\sqrt{-1} = l\varrho + l(-1) + \tau\sqrt{-1}$$
$$= l(-\varrho) + \tau\sqrt{-1};$$

verbo: semper obtinet aequatio

$$(49) \quad \dots\dots \quad lx = l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1},$$

scilicet $-\varrho$, dum α negativa est, alioquin $+\varrho$. Ideoque, secundum (46) et (46'), omni in casu habetur

$$(50) \quad \dots\dots \quad l((x)) = lx + l((1)),$$

id quod praeterea jam cognitum erat ex verbis aequationem (42') proxime insequentibus.

Et quidem ex (49) patet haberi, dum α negativa est, semper

$$(51) \quad \dots\dots \quad lx = l(-x) + l(-1),$$

nec tamen semper alioquin.

Nota 1. Aequatio (50) indicat positivae cuique quantitati unicum esse e-logarithmum, principalem inquam, realem; negativae autem ne unum quidem.

Nota 2. Ex aequ. (49) patet, μ reali quâlibet (x haud zéro), semper obtinere

$$(52) \quad \dots\dots \quad e^{\mu lx} = x^{\mu}.$$

Nam (49) dat

$$e^{\mu lx} = e^{\mu[l(\pm\varrho)+\tau\sqrt{-1}]},$$

scilicet, dum α haud negativa est,

$$= e^{\mu(l\varrho+\tau\sqrt{-1})} = \varrho^{\mu} e^{\mu\tau\sqrt{-1}} = x^{\mu} \text{ secund. (36)},$$

atque, dum negativa est α,

$$= e^{\mu(l\varrho+\overline{\tau+\pi}\sqrt{-1})} = \varrho^{\mu} e^{\mu(\pi+\tau)\sqrt{-1}} = x^{\mu} \text{ secund. (36)}.$$

Nota 3. Jamque ex aequ. (52), quippe quâ indicatur esse μlx unus e-logarithmorum ipsius x^{μ}, consequitur, vi legis illius infra aequat. (42') expositae, esse

$$(53) \quad \dots\dots \quad l((x^{\mu})) = \mu lx + l((1)).$$

Quae licet aequatio cum aequatione (50) — juxta quam habetur $l((x))^{\mu} = l(x^{\mu}) + l((1))$ — conjuncta arguat semper esse

$$l(x^{\mu}) + l((1)) = \mu lx + l((1)),$$

ex hac tamen cavendum est ne falsa ea ducatur conclusio, sic quoque in genere esse

$$l(x^\mu) \text{ principalem } = \mu lx.$$

Ubi demum μlx principalem ipsius x^μ logarithmum conficiat, id infra erit explicatum. Aequatione illâ (53) id constat solummodo, quantitatum omnium ex parte alterâ suam cuique ex alterâ parte aequivalere.

3. Idiomata e-logarithmorum principalium praecipua. Quae logarithmis (realibus) Numerorum $x, x_1, \ldots. x_n$ propria sunt solitisque his comprehensa aequationibus

$$\begin{cases} l(x^\mu) = \mu lx, \ (\mu \text{ reali}), \\ l(x) + l(x_1) + \ldots. + l(x_n) = l(xx_1 \ldots. x_n), \\ l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right); \end{cases}$$

idiomata non nisi certis subjectis conditionibus, dum ipsis x, $x_1, \ldots$ $\ldots. x_n$ sensus quantitatum quarumcumque subjicitur, integra manent.

1°) De aequatione illâ

$$(55) \quad \ldots\ldots\ldots \quad l(x^\mu) = \mu lx$$

ea ipsa, quae in 2°) pag. 401. de aequatione

$$(21) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (x^\mu)^{\mu}_{1} = x^{\mu\mu}_{1},$$

pronuntiari licebit.

Demonstr. Semper equidem μlx unum conficit ex e-logarithmis ipsius x^μ, secund. (52). Contendimus autem hoc loco conficere eam ambobus, de quibus agitur, in casibus principalem ipsum logarithmum $l(x^\mu)$.

Logarithmus ipsius x^μ principalis, juxta definitionem, est

$$(56) \quad \ldots\ldots \quad l(x^\mu) = l(\pm R) + T\sqrt{-1},$$

denotante R modulum ipsius x^μ atque

$$T = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{Coëff. ipsius } \sqrt{-1} \text{ in } x^\mu}{\text{parte ejusd. } x^\mu \text{ reali}}\right);$$

et quidem, ab alterâ parte,

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad \mu lx = \mu.[l(\pm \varrho) + \tau\sqrt{-1}].$$

Quod autem, secundum (36), habetur

$$x^\mu = (\pm \varrho)^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}},$$

scilicet

$$= \varrho^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}}, \ \alpha \text{ haud negativâ},$$

et quidem

$$=\varrho^{\mu} e^{\mu(\tau+\pi)\sqrt{-1}},\ \alpha \text{ negativâ};$$

propterea priori in casu (α haud negativâ), quoties $\mu\tau$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, obtinet ista

$$l(x^{\mu}) = l(\varrho^{\mu}) + \mu\tau\sqrt{-1} = \mu l x \text{ casûs hujusce,}$$

nec minus posteriori (α negativâ), quoties $\mu(\tau+\pi)$ hisce $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (ex quo consequitur esse partem ipsius x^{μ} realem haud negativam), ista

$$l(x^{\mu}) = l(\varrho^{\mu}) + \mu(\tau+\pi)\sqrt{-1} = \mu\,[l(-\varrho) + \tau\sqrt{-1}] = \mu l x$$

casûs hujusce.

Q. E. D.

Quibusnam praeterea casibus rata sit ista aequatio (55), id (ubi forte sit opus) perfacili semper negotio, collatis quidem inter se aequationibus (56) et (57), licebit discerni.

Nota. Id certe constat, quoties

(55) . . . . $l(x^{\mu}) = \mu l x$

sit, toties hanc etiam obtinere aequationem

(21) . . . . $(x^{\mu})^{\mu_1} = x^{\mu\mu_1}$.

Nam semper habetur

$$(x^{\mu})^{\mu_1} = e^{\mu_1 l(x^{\mu})}, \text{ secund. (52),}$$

ideoque

$$= e^{\mu_1 \mu l x}, \text{ quoties rata sit (55),}$$

quae autem ipsa $e^{\mu_1 \mu l x}$ numquam non $= x^{\mu\mu_1}$ est, secundum (52).

2°) De aequatione illâ

(58) . . . $l(x) + l(x_1) + \dots + l(x_n) = l(x x_1 \dots x_n)$

ea ipsa, quae in 3°) pag. 402. de aequatione

(23) . . . . . $x^{\mu} x_1^{\mu} \dots x_n^{\mu} = (x x_1 \dots x_n)^{\mu}$,

pronuntiari licebit.

Demonstr. Semper equidem summa $l(x) + l(x_1) + \dots + l(x_n)$ unum conficit ex e-logarithmis producti $(x x_1 \dots x_n)$, quippe quoniam haec $e^{l(x)+l(x_1)+\dots+l(x_n)}$ semper $= x x_1 \dots x_n$ est secund. (30). Contendimus autem hoc loco summam istam casu, de quo agitur, ipsum conficere logarithmum principalem $l(x x_1 \dots x_n)$.

Logarithmus ipsius $(x x_1 \dots x_n)$ principalis, juxta definitionem, est

Digitized by Google

(59) . . . $l(xx_1 \ldots x_n) = l(\pm R) + T\sqrt{-1}$,

denotante R modulum producti $xx_1 \ldots x_n$ atque

$$T = \text{Arc}\left(\text{tg} = \frac{\text{Coëff. ipsius } \sqrt{-1} \text{ ibid.}}{\text{parte reali ibid.}}\right);$$

et quidem, ab altera parte,

$$(60)\quad l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(\pm\varrho) + l(\pm\varrho_1) + \ldots + l(\pm\varrho_n) + (\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n)\sqrt{-1}.$$

Quae autem ambae reverâ, dum haud negativae sunt partes omnium $x, x_1, \ldots x_n$ reales eamque ob caussam

$$l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l((\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n) + (\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n)\sqrt{-1}$$

atque

$$l(xx_1 \ldots x_n) = l[\varrho\varrho_1 \ldots \varrho_n \,.\, e^{(\tau+\tau_1+\ldots+\tau_n)\sqrt{-1}}],$$

aequales sunt, quoties summa illa $\tau + \tau_1 + \ldots + \tau_n$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excesserit.

Q. E. D.

Quod ad specialem illam

(58′) . . . . . $l(x) + l(x_1) = l(xx_1)$

attinet, facile patet in eam quadrare, quae in pag. 402. de aequat.

(23′) . . . . . . $x^\mu x_1^\mu = (xx_1)^\mu$

pronuntiebantur edicta: ne hoc quidem excepto, quod positivâ ipsius x parte reali rata sit non secus aequatio

(58″) . . . . $l(x) + l(-1) = l(-x)$ *)

ac ista

(23″) . . . . . $x^\mu(-1)^\mu = (-x)^\mu$.

Quibusnam praeterea casibus rata sit aequ. (58), id (ubi forte sit opus) perfacili semper negotio, collatis inter se aequationibus (59) et (60), discerni licebit.

Nota. Id certe constat, quoties

(58) . . . . $l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(xx_1 \ldots x_n)$

sit, toties hanc etiam obtinere aequationem

*) Id quod jam ipsa indicavit aequatio (51).

Digitized by Google

(23) . . . . $x^\mu x_1^\mu \ldots x_n^\mu = (x x_1 \ldots x_n)^\mu$.

Nam semper habetur

$$x^\mu x_1^\mu \ldots x_n^\mu = e^{\mu(lx + lx_1 + \ldots + lx_n)}, \text{ secund. (52)},$$

ideoque

$$= e^{\mu l(x x_1 \ldots x_n)}, \text{ quoties rata sit (58)},$$

quae autem ipsa $e^{\mu l(x x_1 \ldots x_n)}$ numquam non $=(x x_1 \ldots x_n)^\mu$ est, secund. (52).

3⁰) De aequatione illâ

(61) . . . . . . $l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right)$

ea ipsa, quae in 4⁰) pag. 403. de aequatione

$$\frac{x_1^\mu}{x^\mu} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu,$$

pronuntiari licebit.

Nam hoc ipso in casu (partibus ipsarum x, x_1 et $\frac{x_1}{x}$ haud negativis), secundum (58′), habetur $l(x) + l\left(\frac{x_1}{x}\right) = l(x_1)$.

Exinde consequitur, aequationem

(61′) . . . . $l\left(\frac{1}{x}\right) = -lx$,

non secus ac istam

(25′) . . . . $\left(\frac{1}{x}\right)^\mu = x^{-\mu}$,

valere, quoties haud negativa sit pars realis ipsius x. Neutiquam vero, dum negativa est x quâ partem realem, valere eandem patet ex eo quod tali in casu sit

$$lx = l\varrho + \tau\sqrt{-1} + \pi\sqrt{-1},$$

at vero

$$l\left(\frac{1}{x}\right) = -(l\varrho + \tau\sqrt{-1}) + \pi\sqrt{-1}.$$

Nota. Id certe constat, quoties rata sit (61), ipsam quoque obtinere aequ. (25).

Nam semper habetur

$$\frac{x_1^\mu}{x^\mu} = \frac{e^{\mu l x_1}}{e^{\mu l x}}, \text{ secund. (52)},$$

seu

$$= e^{\mu(lx_1 - lx)} \text{ secund. (30)},$$

Digitized by Google

ideoque

$$= e^{\mu l\left(\frac{x_1}{x}\right)}, \text{ quoties rata sit (61),}$$

quae autem ipsa numquam non $= \left(\frac{x_1}{x}\right)^\mu$ est, secundum (52).

Coloph. His jam de logarithmis principalibus qualitercumque peractis commonere demum juvat, aequationem illam

$$(62) \quad \ldots\ldots \quad l((x)) + l((x_1)) + \ldots\ldots + l((x_n)) = l((xx_1 \ldots\ldots x_n))$$

ideoque hanc quoque ipsam

$$(63) \quad \ldots\ldots \quad l((x_1)) - l((x)) = l\left(\left(\frac{x_1}{x}\right)\right)$$

nec non, in specie, istam

$$(63') \quad \ldots\ldots \quad l\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -l((x))$$

legitimas quibuscumque ipsarum $x, x_1, \ldots\ldots x_n$ valoribus (certe, uti adsolet, 0 excepto) permanere, id quod reverâ juxta legem (42) experiri licebit.

§. 5.

Quid in Analysi valeat signum x^y x et y quibuscumque *).

1. Ex partibus Analyseos praecedentibus jam constat: 1º) quantitate x quâlibet $= \alpha + \beta\sqrt{-1}$ (α et β realibus), si modo fuerit y realis, semper haberi

$$(64) \quad \ldots\ldots \quad (\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu = (\pm \varrho)^\mu e^{\mu\tau\sqrt{-1}} = e^{\mu l(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

(scil. $-\varrho$, dum α negativa est; alioquin $+\varrho$),

atque 2º) x positivâ $= \varrho$, $y = \mu + \nu\sqrt{-1}$ (μ et ν realibus), haberi

$$(65) \quad \ldots\ldots \quad \varrho^{\mu + \nu\sqrt{-1}} = e^{(\mu + \nu\sqrt{-1})l\varrho} = \varrho^\mu . e^{\nu l\varrho\sqrt{-1}}.$$

Quae quoniam ambae aequationes in unam hanc reverâ coëunt

$$(66) \quad \ldots\ldots \quad x^y = e^{ylx},$$

nec aliud quodpiam in praecedentibus Analyseos partibus de signo illo (1), scil. x^y seu $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu + \nu\sqrt{-1}}$, fuit statutum; jam plane apparet non solum jure esse licitum, sed re ipsa postulatum, ut

*) Uti adsolet, x haud zéro esse putatur. De signo 0^y vid. notulam sub pag. 388.

Digitized by Google

ab hoc inde tempore (ex analogiâ) habeatur aequatio illa (66) rata et universalis definitio signi x^y in Analysi Mathematica: itaque, ut explicate eloquamur,

$$(66') \ldots\ldots (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu+\nu\sqrt{-1}} = e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})l(\alpha+\beta\sqrt{-1})}.$$

Praeterea (66) ista, positivâ ϱ quâlibet, suppeditat

$$(67) \ldots\ldots\ldots (\pm\varrho)^y = e^{yl(\pm\varrho)},$$

nec non, ϱ modulum ipsius x denotante,

$$(68) \ldots\ldots\ldots x^y = (\pm\varrho)^y e^{y\tau\sqrt{-1}},$$

prout pars realis ipsius x haud negativa est aut negativa.

Eâdem insuper ex aequatione (66), quippe quâ indicatur ylx unus esse ex e-logarithmis ipsius x^y, consequitur, vi legis illius infra aequat. (42') expositae, aequationem hancce

$$(69) \ldots\ldots\ldots l((x^y)) = e^{ylx} + l((1))$$

x et y quibuscumque manere legitimam. Generalis hujusce speciem quamdam aequatio illa (53) conficit.

2. Iis convenienter, quae jam antea diversis ipsarum x et y positionibus specialibus fuerunt admissa, quibuscumque abhinc x- et y-valoribus appellabitur x^y „principalis ipsa y-potentia *) quantitatis x", ipsi autem y nomen cedet „Exponentis." Et quod ad idiomata potentiarum principalium (latissimo hoc sensu acceptarum) earumque logarithmorum naturalium praecipua attinet, sequentes hoc loco exponere juvabit leges universales, quarum equidem ditioni (ut per se patet) subditae sunt speciales eae, quae jam in pag. 400—403, 405, 410—414 expositae idiomata potentiarum principalium Exponentibus nonnisi realibus exhibuerunt:

1°) Aequatio illa

$$(70) \ldots\ldots x^y x^{y_1} \ldots. x^{y_n} = x^{y+y_1+\ldots.+y_n}$$

numquam non valet, ideoque non minus aequatio

$$(70') \ldots\ldots\ldots \frac{x^{y_1}}{x^y} = x^{y_1-y}$$

atque in specie haecce

$$(70'') \ldots\ldots\ldots \frac{1}{x^y} = x^{-y}.$$

---

*) Nihil equidem impedit, quominus Analysi item vindicetur signum ipsum $((x))^y$, etiamsi y imaginaria sit (caeteris, ut constat, in casibus omnibus hoc signum fuit acceptum et quidem eo, quem indicant aequ. (35) et (35'), sensu). Nihilominus tamen, donec Analysi forsitan usui cuidam fore videbitur, hoc signum supervacaneum (uti hactenus usque) censeri liceat.

Digitized by Google

Patet hoc quidem ex ipsa definitione (66) una cum aequ. (33).

2⁰) Quoties aequatio illa

$$(71) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad l(x^y) = ylx$$

obtineat, toties haec etiam rata est aequatio

$$(72) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (x^y)^{y_1} = x^{yy_1}.$$

Nam semper habetur

$$(x^y)^{y_1} = e^{y_1 l(x^y)}, \text{ secund. definitionem (66),}$$

ideoque

$$= e^{y_1 ylx}, \text{ quoties obtineat (71),}$$

quae quidem ipsa $e^{y_1 ylx}$ numquam non $= x^{yy_1}$ est, secund. definitionem (66).

Quibusnam autem casibus legitima sit (71), ut constet aliquatenus, id juvat probari valere eam, certe

a) quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, quantitas illa $\mu\tau + \nu l\varrho$ limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, nec non

b) quoties, parte reali ipsius x negativâ, quantitas $\mu(\tau + \pi) + \nu l\varrho$ limit. $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat.

Demonstr. Semper equidem ylx unum conficit ex ipsis $l((x^y))$, quippe quoniam x^y numquam non $= e^{ylx}$ est. Contendimus autem hoc loco conficere eam ambobus, de quibus agitur, in casibus principalem ipsum logarithmum $l(x^y)$.

Logarithmus ipsius x^y principalis, juxta definitionem, est

$$(73) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad l(x^y) = l(\pm R) + T\sqrt{-1},$$

R et T denotantibus (sicut in aequ. (56) immutatâ modo μ in y); et quidem, ab alterâ parte,

$$(74) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad ylx = y[l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1}].$$

Quod autem, secundum (68), habetur

$$x^y = (\pm\varrho)^y e^{y\tau\sqrt{-1}},$$

scilicet

$$= \varrho^y e^{y\tau\sqrt{-1}} = \varrho^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \cdot e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})\tau\sqrt{-1}},$$

α haud negativâ, et quidem

$$= (-\varrho)^y e^{y\tau\sqrt{-1}} = \varrho^{\mu+\nu\sqrt{-1}} \cdot e^{(\mu+\nu\sqrt{-1})(\tau+\pi)\sqrt{-1}},$$

Digitized by Google

α negativâ; propterea priori in casu obtinet

$$x^y = e^{\mu l\varrho - \nu\tau} \,.\, e^{(\mu\tau + \nu l\varrho)\sqrt{-1}},$$

ideoque, quoties $\mu\tau + \nu l\varrho$ limitibus illis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat, secundum (49) habetur

$$l(x^y) = \mu l\varrho - \nu\tau + (\mu\tau + \nu l\varrho)\sqrt{-1} = ylx \text{ casûs hujusce;}$$

atque in posteriori obtinet

$$x^y = e^{\mu l\varrho - \nu(\tau+\pi)} \,.\, e^{[\mu(\tau+\pi) + \nu l\varrho]\sqrt{-1}},$$

ideoque, quoties $\mu(\tau+\pi) + \nu l\varrho$ hisce $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedat (ex quo consequitur esse partem ipsius x^y realem haud negativam), habetur

$$l(x^y) = \mu l\varrho - \nu(\tau+\pi) + [\mu(\tau+\pi) + \nu l\varrho]\sqrt{-1} = ylx \text{ casûs hujusce.}$$

Q. E. D.

Quibusnam praeterea casibus rata sit ista aequatio (71) — ideoque etiam (72) — id (ubi forte sit opus) collatis inter se aequationibus (73) et (74) discerni licebit.

Nota. Ex allatis hoc loco patet, quoties obtineant ambae

$$l(x^y) = ylx, \quad l(x^{y_1}) = y_1 lx,$$

toties hanc quoque ratam esse aequationem

(75) . . . . $(x^y)^{y_1} = (x^{y_1})^y$:

et quidem rem ita se habere, certe

a) quoties, parte reali ipsius x haud negativâ, quantitatum illarum $\mu\tau + \nu l\varrho$ et $\mu_1\tau + \nu_1 l\varrho$ neutra limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat, atque

b) quoties, negativâ ipsius x parte reali, quantitatum $\mu(\tau+\pi) + \nu l\varrho$ et $\mu_1(\tau+\pi) + \nu_1 l\varrho$ neutra ipsis $\pm\frac{\pi}{2}$ excedat,

scil. $y = \mu + \nu\sqrt{-1}$,
$y_1 = \mu_1 + \nu_1\sqrt{-1}$.

3º) Quoties aequatio illa

(58) . . . . $l(x) + l(x_1) + \dots + l(x_n) = l(xx_1 \dots x_n)$

obtinet, toties haec etiam rata est aequatio

(76) . . . . . . $x^y \,.\, x_1^y \dots x_n^y = (xx_1 \dots x_n)^y$.

Digitized by Google

Nam semper habetur

$$x^y x_1^y \dots x_n^y = e^{y(lx+lx_1+\dots+lx_n)},$$

secund. defin. (66) et aequ. (30), ideoque

$$= e^{yl(xx_1 \dots x_n)},$$

quoties obtineat (58), quae quidem ipsa numquam non $=(xx_1 \dots x)^y$ est, secund. definitionem (66).

De ipsâ autem legis (58) auctoritate, quantum hoc tempore satis esse videtur, in 2⁰) jam pag. 411. est allatum.

Sic ex. gr. valet aequatio

$$(76') \quad \dots \dots \quad x^y x_1^y = (xx_1)^y,$$

certe quoties, partibus realibus harum x et x_1 haud negativis, pars ipsa realis producti xx_1 haud negativa sit; nec non aequatio

$$(76'') \quad \dots \dots \quad x^y(-1)^y = (-x)^y,$$

quoties positiva fuerit x quâ partem realem.

4⁰) Quoties aequatio illa

$$(61) \quad \dots \dots \quad l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right)$$

obtineat, toties haec etiam rata est aequatio

$$(77) \quad \dots \dots \quad \frac{x_1^y}{x^y} = \left(\frac{x_1}{x}\right)^y.$$

(Id quod eâdem prorsus ratione ac in 2⁰) et 3⁰) probatur). De ipsâ autem legis (61) auctoritate, quantum hoc tempore satis esse videtur, in 3⁰) jam pag. 413. est allatum.

Sic ex. gr. valet aequatio

$$(77') \quad \dots \dots \quad \left(\frac{1}{x}\right)^y = x^{-y},$$

quoties haud negativa sit x quâ partem realem. Sin minus, neutiquam valet, nisi forte y realis fuerit ac numerice integra aut 0, id quod reverâ facillimo usque negotio eâdem, quem in pag. 403. secuti fuimus, viâ experiri licebit ratione habitâ relationum, quas secum fert (67), harum:

$$(67') \dots \quad (-1)^y = e^{\pi y\sqrt{-1}} = e^{-\nu\pi}(\mathrm{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$
$$(-1)^{-y} = e^{-\pi y\sqrt{-1}} = e^{\nu\pi}(\mathrm{Cos}\,\mu\pi - \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi.$$

Digitized by Google

CAPUT II^um.

Quid in Analysi valeat signum

(1) . . . . $\mathrm{Log}_b(x)$.

1. Omnium primo juvabit, quod proxime antecedentibus intimo conjunctum est nexu, hoc solvi

Problema. Invenire quantitates eas z universas, quibus conditioni huic

(2) . . . . $b^z = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ seu x (breviter)

fiat satis: b datam denotante quantitatem (0 atque 1 exceptis) *), α et β reales datas.

Definitioni (66) convenienter conditionem (2) sic licet describi

(2′) . . . . $e^{zlb} = x$,

ex quâ patet extemplo, si fuerit x zéro, nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) z, quâ fiat satis problemati **).

At ceteroquin semper aequatio (2′) huic aequivalet, secund. §. 4. art. 1.,

$$z = \frac{l((x))}{lb},$$

quâ igitur ipsâ in genere solutum est problema.

Quantitatum, quibus aequationi (2) fiat satis, unaquaeque appellabitur „b-logarithmus quidam ipsius x" nec non „logarithmus ipsius x quidam ex systemate baseos b" ***):

---

*) Si foret $b=1$; ex relatione illâ $b^z = e^{zlb}$, i. e. heic $1^z = e^{zl(1)}$, patet tunc fore propositum ut invenirentur quantitates z universae eae, quibus conditioni fieret satis huic

$$e^{zl(1)} = x.$$

At talis quaepiam (ut plane apparet) inveniri non potest, nisi forte $x=1$ fuisset: et quidem satis tunc fit conditioni propositae z-valore quolibetcumque.

**) Etenim quis est, qui non videat nullam omnino exsistere quantitatem (finitam) $u+v\sqrt{-1}$ (u et v realibus), quâ conditioni huic $e^{u+v\sqrt{-1}}=0$ fieret satis.

***) Omni absque negotio patet hanc definitionem ab iis, quae in partibus Analyseos praecedentibus de vocabulo „Logarithmo" statuta sunt, minime discrepare; congruit e contrario iisdem perfecte.

Digitized by Google

et quidem formula universalis ea, quae in se cunctos hos continet ipsius x logarithmos, signo illo $\mathrm{Log}_b((x))$ nec non — dum nullum adest erroris ex suppressâ baseos notulâ discrimen — leviori hoc $\mathrm{Log}((x))$ *) erit intelligenda. Itaque, subjectâ quidem conditione ut ne sit basis β zéro nec unitas (nec $x=0$), habetur

$$(3) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((x))}{lb};$$

ex quâ patet, cunctos quantitatis cujusdam b-logarithmos eo modo comparari licere, ut eorum unico — quem potissimum eligi placuerit — addatur

$$(4) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Log}_b((1)) = \frac{l((1))}{lb} = \pm\frac{2k\pi}{lb}\sqrt{-1},$$

i. e. addantur successive b-logarithmi omnes unitatis **).

Praeterea, ut patet, aequatio (3) suppeditat

$$(3') \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((\varrho)) + \theta\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((\varrho)) + \frac{\theta}{lb}\sqrt{-1},$$

θ denotante (uti adsolet).

Nota. Ex aequ. (3) consequitur, μ reali quâlibet (x haud zéro), semper obtinere

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad b^{\mu\,\mathrm{Log}_b((x))} = ((x))^\mu.$$

Nam prius hoc membrum $= e^{\mu\,\mathrm{Log}((x)).lb}$ est, secund. (66),
i. e. $= e^{\mu l((x))}$, secund. (3),
$= ((x))^\mu$, secund. (45).

2. Dum α (pars realis ipsius x) positiva est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau = \mathrm{Arctg}\frac{\beta}{\alpha}$, aequatio (3) suppeditat

$$(6) \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((\varrho)) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((\varrho)) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1};$$

---

*) Itaque signum hoc $\mathrm{Log}_e((x))$ illi, quo antea usi fuimus, $l((x))$ aequivalet: id quod praeterea aequatio illa (3) proxime insequens commonstrat.

**) Nam unum recipe, quem potissimum valueris, ex b-logarithmis ipsius x: sit (breviter) $\mathfrak{L}(x)$. Qui huic respondet e-logarithmus ipsius x notulâ $\lambda(x)$ signetur. (Scilicet reverâ b-logarithmis quantitatis x suum cuique respondere e-logarithmum ejusdem x, id ex aequ. (3) plane apparet). Verbis convenienter iis, quae aequationem (42′) proxime insequuntur, haec obtinet relatio

$$l((x)) = \lambda(x) + l((1)),$$

ideoque, secund. (3),

$$\mathrm{Log}\,_b((x)) = \frac{\lambda(x)}{lb} + \frac{l((1))}{lb} = \mathfrak{L}(x) + \mathrm{Log}\,_b((1)).$$

Digitized by Google

dum α negativa est, quoniam tunc θ cooptari licet $\tau+\pi$,

$$(6') \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \frac{l((-\varrho)) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b((-\varrho)) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1};$$

atque, dum $\alpha=0$ est, una valet aeque ac altera aequatio, quippe quoniam tunc θ cooptari licet ex arbitrio τ aeque ac $\tau+\pi$, salvo equidem pacto illo solito.

„Principali ipsius $\mathrm{Log}_b((x))$ valore“ seu „b-logarithmo quantitatis x principali“ ex iis, quas in se continet membrum posterius aequationis (3), quantitatibus eam ipsam, cui signum debetur $\frac{lx}{lb}$, intelligi juvabit: seu (aliter) unicum ex b-logarithmis eum, qui principali illi e-logarithmo $l(x)$ respondet. Hic ipse est cui signum illud $\mathrm{Log}_b(x)$ seu $\mathrm{Log}\,x$ erit reservatum *). Unde aequatio habetur ista

$$(7) \quad \mathrm{Log}_b(x) = \frac{lx}{lb} = \frac{l(\pm\varrho) + \tau\sqrt{-1}}{lb} = \mathrm{Log}_b(\pm\varrho) + \frac{\tau}{lb}\sqrt{-1},$$

scil. $-\varrho$, dum α negativa est, alioquin $+\varrho$; nec non, in specie,

$$(8) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \mathrm{Log}_b(1) = \frac{l(1)}{lb} = 0, \\ \mathrm{Log}_b(-1) = \frac{l(-1)}{lb} = \frac{\pi}{lb}\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Praeterea ex verbis aequationem (3) proxime insequentibus patet haberi semper

$$(9) \quad \ldots \quad \mathrm{Log}_b((x)) = \mathrm{Log}_b(x) + \mathrm{Log}_b((1));$$

atque ex aequ. ipsâ (7), dum α negativa est, obtinere istam

$$(10) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Log}_b(x) = \mathrm{Log}_b(-x) + \mathrm{Log}_b(-1),$$

nec tamen semper alioquin.

3. Quaestioni illi, „quibusnam in casibus realis sit datae cujusdam quantitatis logarithmus principalis“, responsum jam facili negotio ab aequatione (7) ferri licebit, quippe quam (7), denotantibus

---

*) Nosmet hoc modo definitâ significatione notulae $\mathrm{Log}\,b(x)$ — quibuscumque ipsius x atque baseos b (praeter 0 et 1) valoribus — reverâ eum, quem huic signo utrâque harum x et b Numerum denotante in Elementis jam vindicarunt, sensum in integro reliquisse, id satis patet ex eo quod aequatio (7) in hoc casu singulari identica evadit. Principalis igitur Numeri cujusdam b-logarithmus, dum basis ipsa b Numerus est, is ipse est cui in Elementis nomen cessit „b-logarithmus Numeri.“ Et quidem „e-logarithmum principalem“ definitionis jam nunc acceptae eam ipsam conficere quantitatem, cui in Cap. I. praecedente tributum fuit hoc nomen, id reverâ ex ipsâ patet definitione. Signum igitur $\mathrm{Log}\,e(x)$ huic lx aequivalet.

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l} R \text{ modulum baseos,} \\ T \text{ ipsum Arc}\left(\text{tg}=\dfrac{\text{Coëff. } \sqrt{-1} \text{ baseos}}{\text{parte baseos reali}}\right), \end{array}\right.$$

sic licet describi

$$(7') \quad \ldots \quad \operatorname{Log}_b(x) = \frac{lx}{lb} = \frac{l(\pm\varrho)+\tau\sqrt{-1}}{l(\pm R)+T\sqrt{-1}}$$

(denominatore semper finito nec $=0$) *).

1⁰)

Parte reali ipsius x haud negativâ:

$$\operatorname{Log}_b(x) = \frac{l\varrho+\tau\sqrt{-1}}{l(\pm R)+T\sqrt{-1}}.$$

a) **Parte reali baseos haud negativâ**

habetur

$$\operatorname{Log}_b(x) = \frac{(l\varrho+\tau\sqrt{-1})(lR-T\sqrt{-1})}{(lR)^2+T^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$\tau lR - Tl\varrho = 0,$$

seu huic

$$(11) \quad \ldots \quad R^\tau = \varrho^T,$$

fuerit satisfactum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

$$(12) \quad \ldots \quad \frac{lR.l\varrho+T.\tau}{lR.lR+T.T}$$

realem conficit $\operatorname{Log}_b(x)$ principalem.

b) **Parte reali baseos negativâ**

habetur

$$\operatorname{Log}_b(x) = \frac{(l\varrho+\tau\sqrt{-1})[lR-(T+\pi)\sqrt{-1}]}{(lR)^2+(T+\pi)^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$\tau lR-(T+\pi)l\varrho=0,$$

seu huic

$$R^\tau = \varrho^{T+\pi}, \quad \ldots \quad (13)$$

fuerit satisfactum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

$$\frac{lR.l\varrho+(T+\pi).\tau}{lR.lR+(T+\pi).(T+\pi)} \quad (14)$$

realem conficit $\operatorname{Log}_b(x)$ principalem.

Ex. gr. Unitati systema quodlibet realem suppeditat, eundemque $=0$, logarithmum principalem (id quod jam supra aequatio illa (8) indicabat). Alii cuique Numero ϱ

**) Scilicet semper (uti supra est monitum) basis ipsa b haud $=1$ (nec 0), ideoque lb semper quantitas finita haud $=0$, esse putatur.

Digitized by Google

ea sola realem praebent logarithmum principalem systemata, quibus basis ipsa Numerus sit.

Nam posito $\tau=0$, conditio illa (11) in $Tl\varrho=0$, i. e. $T=0$, abit modulo R indeterminato relicto; at alteri (13), quippe quae (pos. $\tau=0$) in $(T+\pi)l\varrho=0$ abit, nullo modo satisfieri potest, dum ϱ haud $=1$ est.

2⁰)

Parte reali ipsius x negativâ:

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{l(\varrho)+(\tau+\pi)\sqrt{-1}}{l(\pm R)+T\sqrt{-1}}.$$

a) **Parte reali baseos haud negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{[l\varrho+(\tau+\pi)\sqrt{-1}](lR-T\sqrt{-1})}{(lR)^2+T^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$(\tau+\pi)lR-Tl\varrho=0,$$

seu huic

$$(15)\quad\ldots\quad R^{\tau+\pi}=\varrho^{T},$$

satis fuerit factum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

b) **Parte reali baseos negativâ**

habetur

$$\mathrm{Log}_b(x)=\frac{[l\varrho+(\tau+\pi)\sqrt{-1}][lR-(T+\pi)\sqrt{-1}]}{(lR)^2+(T+\pi)^2},$$

realis videlicet iis solis in casibus, quibus conditioni

$$(\tau+\pi)lR-(R+\pi)l\varrho=0,$$

seu huic

$$R^{\tau+\pi}=\varrho^{T+\pi},\quad\ldots\quad(17)$$

satis fuerit factum. Et quidem tali in systemate unoquoque, cujus baseos R et T conditioni huic satisfaciant, haec ipsa

Digitized by Google

$$(16) \ldots \frac{lR \cdot l\varrho + T \cdot (\tau + \pi)}{lR \cdot lR + T \cdot T}$$

realem conficit $\text{Log}_b(x)$ principalem.

$$\frac{lR \cdot l\varrho + (T+\pi) \cdot (\tau + \pi)}{lR \cdot lR + (T+\pi) \cdot (T+\pi)} \quad (18)$$

realem conficit $\text{Log}_b(x)$ principalem.

Ex. gr. Quoniam, positâ $x =$ quant. negat. $-\varrho$ (ideoque $\tau = 0$), conditiones illae (15) et (17) in

$$(15') \ldots\ldots \pi lR = Tl\varrho \text{ et } \pi lR = (T+\pi)l\varrho \ldots\ldots (17')$$

abeunt, facili exinde patent negotio *) sequentia:

Quantitati negativae $-\varrho$ (sive sit -1 sive alia quaepiam) realem nullum aliud praebet logarithmum principalem systema baseôs realis, quam cui basis negativa est ipsa illa quantitas $-\varrho$ (realis iste log. principalis $=1$ est). Systematum vero basi imaginariae superstructorum realem ipsi $-\varrho$ logarithmum principalem suppeditat id unumquodque

a) cui basis, quâ partem realem haud negativa, conditioni satisfaciat huic

$$(15'') \ldots\ldots\ldots R^{\frac{1}{T}} = \varrho^{\frac{1}{\pi}},$$

nec non

b) cui basis, quâ partem realem negativa, conditioni satisfaciat huic

$$(17'') \ldots\ldots\ldots R^{\frac{1}{T+\pi}} = \varrho^{\frac{1}{\pi}}.$$

Quantitati igitur -1 realem ea sola, quibus modulus baseos $=1$ sit, systemata praebent logarithmum principalem: horum in unoquoque

$$\text{Log}(-1) = \frac{\pi}{T} \text{ aut } \frac{\pi}{T+\pi}$$

---

*) Scilicet: 1°) Positâ $x = -1$, conditiones illae (15′) et (17′) ambae in $\pi lR = 0$, i. e. $R = 1$, abeunt; — 2°) Sin vero x alia quaepiam fuerit quantitas negativa $-\varrho$,

tunc *A*) conditioni (15′) nullâ profecto basi reali satisfieri potest: — nam, posito $T = 0$, conditio haec (15′) in $lR = 0$ ($R = 1$) abit, quae quidem basin ipsam (quippe cui in (15′) haud negativa cedere pars realis putatur) $= 1$ postulat, quod autem genus baseos jam antea semel omnino fuit abrogatum; — ideoque tunc loco ipsius (15′) jure licet substitui (15″);

et quidem *B*) conditioni (17′) satisfieri aliter positione illâ $T = 0$ (i. e. baseos realis) nequire, nisi simul $R = \varrho$ (i. e. basis ipsa $= -\varrho$) assumatur, patet per se: nec non licere loco ipsius (17′) substitui (17″).

est, prout haud negativa est aut negativa basis quâ partem realem.

Nota. Praeterea omnino non latet ex aequationibus hisce (11), (13), (15) et (17) ferri licere responsum quaestioni alteri huic, cujusnam sint generis quantitates, quibus realem datum quoddam systema suppeditet logarithmum principalem."

4. Quemadmodum basi e, secund. (52) universamque illam (66), sic quoque secund. definitionem (7) basi cuilibet b habetur in genere*)

$$(19) \quad \ldots\ldots \quad b^{y\,\mathrm{Log}_b(x)} = x^y,$$

eamque ab caussam (verbis convenienter aequationem (3) proxime insequentibus) quemadmodum basi e, secund. (53) universamque illam (69), sic quoque in genere

$$(20) \quad \ldots \quad \mathrm{Log}_b((x^y)) = y\,\mathrm{Log}_b(x) + \mathrm{Log}_b((1)).$$

Et quidem de caeteris principalium ex systemate quolibetcumque logarithmorum idiomatibus id rectâ ex definit. (7) consequitur, quoties ratae sint aequationes

$$\left\{\begin{array}{c} l(x^y) = y\,lx, \\ l(x) + l(x_1) + \ldots + l(x_n) = l(xx_1 \ldots x_n),\ l(x) + l(-1) = l(-x), \\ l(x_1) - l(x) = l\left(\frac{x_1}{x}\right),\ l\left(\frac{1}{x}\right) = -lx \end{array}\right.$$

toties obtinere, quae ex iis mutato l in Log_b comparantur, aequationes.

Denique ex ipsâ definitione (2) patet tres illas, quae in pag. 414. commemorabantur, aequationes omni absque exceptione legitimas permanere, etiamsi in novas has immutantur:

$$\left\{\begin{array}{r} \mathrm{Log}_b((x)) + \mathrm{Log}_b((x_1)) + \ldots + \mathrm{Log}_b((x_n)) = \mathrm{Log}_b((xx_1 \ldots x_n)), \\ \mathrm{Log}_b((x_1)) - \mathrm{Log}_b((x)) = \mathrm{Log}_b\left(\left(\frac{x_1}{x}\right)\right), \\ \mathrm{Log}_b\left(\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\mathrm{Log}_b((x)). \end{array}\right.$$

*) Nam $b^{y\,\mathrm{Log}\,x} = e^{y\,\mathrm{Log}\,x\,.\,lb}$ est, secund. (66), i. e. $= e^{ylx}$ secund. (7), $= x^y$ secund. (66).

N O T A E.

N o t a I.

(Vid. pag. 395.)

Ex hisce jam patet licere signum illud $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, ubi occurrat, ex arbitrio interpretari per „principalem separatae illius quantitatis $\beta\sqrt{-1}$ potentiam“ aut per „limitem, in quem $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — (α positivâ) — convergit decrescente α indefinite“, minime vero (μ quàlibet) per limitem, in quem $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — α negativâ — convergit decrescente valore ipsius α numerico indefinite, certe dum β negativa est: qui quidem limes novissimus (ut supra monebatur in „Observ.“ pag. 393.) est

$$(a) \quad . \; . \; . \; . \quad (\sqrt{\beta^2})^\mu\left(\mathrm{Cos}\frac{3\mu\pi}{2}+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{3\mu\pi}{2}\right),$$

at vero $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, dum β negativa est, breviter denotaret

$$(b) \quad . \; . \; . \; . \quad (\sqrt{\beta^2})^\mu\left(\mathrm{Cos}\frac{\mu\pi}{2}-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\frac{\mu\pi}{2}\right),$$

quarum alteram ab alterâ, nisi forte μ integra numerice aut 0 fuerit, discrepare plane apparet.

Propterea, si cui nobiscum *) placuerit signo illi x^μ, etiamsi x negativa fuerit quà partem realem, admisso notiônem in hoc casu subjicere istam

$$(-\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

haud latet omnino oportere eum propositioni huic „Aeqatio illa

$$(c) \quad . \; . \; . \; . \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=(-\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$$

numquam non valet, dum α negativa est“ nullam, nisi quae his ipsis verbis „α negativâ“ fuit expressa, notionem intelligere subjectam.

Sin vero de $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, α negativâ, nihil aliud statui liceret, quam quid in ipso etiam limite 0 (in quem α illa negativa, decrescente valore suo numerico indefinite, tendit) sibi constaret, vel potius (ut aperte loquamur): si Analysi hoc uti signo $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, dum α negativa est, haud alio liceret pacto, nisi quantitas, cui hoc vindicaretur signum, decrescente valore ipsius α numerico indefinite in eundem ipsa convergeret limitem ac ea demum quantitas, cui, dum α positiva est, addictum fuerit hoc signum $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; profecto inde Cauchyanum, necesse est conseque-

---

*) Vid. pag. 392. praecedentem.

Digitized by Google

retur consilium hujus signi x^μ pro α negativâ ex Analysi plane tollendi *), certe donec placuerit hoc signo x^μ quampiam denotari quantitatum in formulâ

$$(d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^\mu = \rho^\mu (\text{Cos}\,\mu\theta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\theta)((1))^\mu$$

comprehensarum, quarum (ut patet) unicuique forma haecce

$$(e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho^\mu (\text{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\vartheta),$$

ϑ denotante arcuum quemdam realium eorum, quorum Sin. et Cos. conditioni illi

$$(f) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \rho(\text{Cos}\,\vartheta + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\vartheta) = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

satisfaciant **).

---

*) Cauchy (Exercices de Mathemat. T. I. pag. 2.) rem his fere verbis expediendam curavit: Admisimus nos quidem hoc signum x^μ, quo breviter exprimatur quantitatum illarum

$$((x))^\mu = \rho^\mu (\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau)((1))^\mu,$$
(x positivâ qua part. realem),

ea, quae positioni $k=0$ in $((1))^\mu$ debetur, h. e.

$$x^\mu = \rho^\mu (\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau).$$

Jam vero si cui insuper hoc ipso signo x^μ, dum x negativâ gaudet parte reali, licere uti videretur, cum quidem in finem ut breviter exprimeretur quantitatum

$$((x))^\mu, \text{ i. e. (in hoc casu) } \rho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\tau+\pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau+\pi)]((1))^\mu,$$

ea, quae positioni illi $k=0$ in $((1))^\mu$ debeatur, h. e.

$$x^\mu = \rho^\mu (\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau)(\text{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi);$$

profecto, „quoniam harum utramque aequationum pro x tali, cui pars cedat realis $=0$ atque Coëfficiens ipsius $\sqrt{-1}$ negativa, sibi constare oporteret“, concedendum illi esset necesse denotare signum $(-\sqrt{-1})^\mu$ non solum

$$\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2} - \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2},$$

sed etiam

$$(\text{Cos}\frac{\mu\pi}{2} + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\frac{\mu\pi}{2})(\text{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi),$$

qua tamen ex ambiguitate, ut patet, Analysi sane „un grave inconvénient“ accideret.

Dissimulari non potest, hoc „quoniam harum utramque ...... oporteret“ sufficientem minime conficere rationem signi x^μ, dum x negativa gaudet parte reali, ex Analysi plane tollendi.

**) Hujuscemodi adesse necessitatem, siquidem ϑ cooptari placeat τ et $\tau+\pi$, prout positiva est aut negativa α, jam supra fuit expertum. At alios

Digitized by Google

Quandoquidem vero, ut tempora nunc sunt Analyseos severa, ita nihil omnino adsit periculi, ne, si quis forte statuerit quempiam signo

---

forsan arcus quospiam ϑ' et ϑ'' vel potius (ut accurate loquamur) $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$, per quos fiat satis conditionibus illis

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l}\varrho[\operatorname{Cos}\vartheta'(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\vartheta'(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1},\text{ dum }\alpha\text{ positiva est,}\\ \text{et}\\ \varrho[\operatorname{Cos}\vartheta''(\alpha,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\vartheta''(\alpha,\beta)]=\alpha+\beta\sqrt{-1},\text{ dum }\alpha\text{ negativa.}\end{array}\right.$$

deprehendi liceat tales, quibus ratae reddantur aequationes

$$(\beta)\ \ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}=\varrho^{\mu}(\operatorname{Cos}\mu\vartheta'+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta'),\\ (\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}=\varrho^{\mu}(\operatorname{Cos}\mu\vartheta''+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta''),\end{array}\right.$$

illa, inquam, pro α positivâ, haec autem pro α negativâ, atque ambae insuper pro $\alpha=0$, h. e.

$$(\gamma)\ \ldots.\ (\beta\sqrt{-1})^{\mu}=(\sqrt{\beta^2})^{\mu}.[\operatorname{Cos}\mu\vartheta'(0,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta'(0,\beta)]$$
$$=(\sqrt{\beta^2})^{\mu}.[\operatorname{Cos}\mu\vartheta''(0,\beta)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta''(0,\beta)]\,?$$

Qui, si tales forsitan exsistant, arcus ϑ' et ϑ'' ita demum comparati sint necesse, secundum aequationes (γ), ut non solum

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Cos}\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Cos}\vartheta''(0,\beta),\\ \operatorname{Sin}\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Sin}\vartheta''(0,\beta),\end{array}\right.$$

sed etiam, μ reali quâlibet ac rationali,

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Cos}\mu\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Cos}\mu\vartheta''(0,\beta),\\ \operatorname{Sin}\mu\vartheta'(0,\beta)=\operatorname{Sin}\mu\vartheta''(0,\beta),\end{array}\right.$$

ideoque ut harum utrique differentiarum

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)\\ \text{et}\\ \mu[\vartheta'(0,\beta)-\vartheta''(0,\beta)]\end{array}\right\}$$

alterutra cedat formarum $\pm 2k\pi$ communis (k num. integ. 0 inclus.); quod equidem aliter fieri non posse apparet, nisi ita fuerint isti $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ comparati, ut pro $\alpha=0$ in plenam reducantur identitatem

$$(\delta)\ \ldots\ldots\ldots\ \vartheta'(0,\beta)=\vartheta''(0,\beta).$$

Constat autem solos, per quos satis demum fieri possit aequationibus (α), arcus $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ comprehensos esse in

$$\left\{\begin{array}{l}\tau\pm 2k\pi,\text{ dum }\alpha\text{ positiva est aut }0,\\ \text{et}\\ \tau+\pi\pm 2k'\pi,\text{ dum }\alpha\text{ negativa est aut }0,\end{array}\right.$$
$$(k\text{ et }k'\text{ num. int. 0 incl.})$$

Digitized by Google

$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ — (α negativâ) — tribuendum esse sensum, injunctum illi esse videatur officium, ut de continuatione hujusce sensûs in ipso etiam

---

scil. salvo, quod in Theoremate pag. 396. exposuimus, reservato de τ, dum

$$\alpha=0 \text{ est};$$

ideoque soli, quibus finem propositum assequi demum liceat, arcus $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ in his contineantur, necesse est,

$$1^0)\ \vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\ \vartheta''(\alpha,\beta) \text{ aut } =\tau+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\tau-(2k'-1)\pi,$$

$$2^0)\ \vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\ \vartheta''(\alpha,\beta) \text{ aut } =\tau+(2k'+1)\pi$$
$$\text{aut } =\tau-(2k'-1)\pi,$$

denotantibus jam k et k' numeros integros (0 incl.) eos, quibus acceptis conditioni (δ) satisfaciant $\vartheta'(0,\beta)$ et $\vartheta''(0,\beta)$, praecedentibus debiti, isti:

$$1^0)\ \vartheta'(0,\beta)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \vartheta''(0,\beta) \text{ aut } =\mp\frac{\pi}{2}+(2k'+1)\pi$$

$$\text{aut } =\mp\frac{\pi}{2}-(2k'-1)\pi,$$

$$2^0)\ \vartheta'(0,\beta)=\pm\frac{\pi}{2}-2k\pi,\ \vartheta''(0,\beta) \text{ aut } =\mp\frac{\pi}{2}+(2k'+1)\pi$$

$$\text{aut } =\mp\frac{\pi}{2}-(2k'-1)\pi$$

(scil. signis superioribus aut inferioribus, prout β positiva est aut negativa):

quod equidem reverâ novissimum de k et k' reservatum id efficit, ut in minorem contrahatur numerus arcuum $\vartheta'(\alpha,\beta)$ et $\vartheta''(\alpha,\beta)$ aptorum praecedentium: id quod jam facili negotio perspici licebit.

a) Quo finem propositum assequi liceat acceptis

$$\left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi\\ \text{et}\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k+1)\pi,\end{array}\right.$$

id certe requiritur, vi conditionis illius (δ), ut accipiatur $k'=k$, dum β positiva est, et quidem $=k-1$, dum β negativa;

tum *b*) quo finem propositum assequi liceat acceptis

$$\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi$$
et
$$\vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi,$$

id certe requiritur, ut accipiatur $k'=-k$ (i. e. utraque $=0$), dum β positiva est, et quidem $=-(k-1)$, dum β negativa; et sic porro.

Quae si jam colligantur experta atque deinceps ex quatuor illis combinationibus

Digitized by Google

limite $\alpha=0$ spondeat; propterea nec sane est timendum, ne, quem nobis visum fuit oportere signo x^μ (α negativâ) vindicari, sensu inducatur in

---

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k'+1)\pi;\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi;\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k'+1)\pi;\end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k'-1)\pi\end{array}\right.$$

excludantur eae, quibus acceptis ut finem propositum assequi liceret, id foret requisitum ut acciperetur k' quantitas negativa; perfacili exinde patebit negotio superesse, quibus finem hunc assequi liceat, nonnisi hasce:

dum β positiva est:

$$\text{aut}\ \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k+1)\pi,\end{array}\right\}\ \text{aut}\ \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k-1)\pi\end{array}\right\}$$

dum β negativa est:

$$\text{aut}\ \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau+2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau+(2k-1)\pi,\end{array}\right\}\ \text{aut}\ \left\{\begin{array}{l}\vartheta'(\alpha,\beta)=\tau-2k\pi,\\ \vartheta''(\alpha,\beta)=\tau-(2k+1)\pi\end{array}\right\}.$$

Quod igitur soli hi sunt ϑ'- et ϑ''-valores, quibus ratae demum reddi possint aequationes (β), illa (inquam) pro α positivâ, haec autem pro α negativâ, atque ambae simul pro $\alpha=0$; propterea sufficit,

$$(\beta')\left\{\begin{array}{l}\text{dum } \alpha \text{ positiva est,}\\ \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu \text{ cooptari } \varrho^\mu\{\cos\mu(\tau+2k\pi)+\sqrt{-1}\,\sin\mu(\tau+2k\pi)\},\\ \text{dum } \alpha \text{ negativa est,}\\ \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu \text{ cooptari}\\ \qquad \varrho^\mu\{\cos\mu[\tau+(2k\pm1)\pi]+\sqrt{-1}\,\sin\mu[\tau+(2k\pm1)\pi]\}\\ \qquad\qquad \text{prout } \beta \text{ positiva est aut negativa,}\end{array}\right.$$

vel etiam

$$(\beta'')\left\{\begin{array}{l}\text{dum } \alpha \text{ positiva est,}\\ \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu \text{ cooptari } \varrho^\mu\{\cos\mu(\tau-2k\pi)+\sqrt{-1}\,\sin\mu(\tau-2k\pi)\},\\ \text{dum } \alpha \text{ negativa est,}\\ \qquad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu \text{ cooptari}\\ \qquad \varrho^\mu\{\cos\mu[\tau-(2k\mp1)\pi]+\sqrt{-1}\,\sin\mu[\tau-(2k\mp1)\pi]\}\\ \qquad\qquad \text{prout } \beta \text{ positiva est aut negativa,}\end{array}\right.$$

quo cum assequaris finem ut, quae signo hoc $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ denotata fuit, quantitas decrescente valore ipsius α numerico indefinite ipsa in eundem, sive positiva fuerit sive negativa α, tendat limitem: et quidem (ut facile est expertu) nil refert, quemvis potissimum ipsi k tribueris numeri integri (0 inclus.) valorem —; nec tamen ullis omnino aliis hunc assequi licet scopum. [Accepto $k=0$ ambae, ut patet, in unam coëunt (β') et (β'')].

ambiguum Analysis; e contrario emolumenta, quae hoc signo admisso contingant Analysi, totidem certe quot excluso incommodo percenseri licebit.

(*Ea, quae restant* *), *alio quodam tempore sequentur.*)

Nihiominus ea nobis permanet immota sententia, quae supra in contextu dicebatur, tollendum plane esse (uti placuit Cauchy) ex Analysi signum illud x^μ pro α negativâ, siquidem Analysi hoc uti signo tunc (i. e. α negativa) alio non liceret pacto, nisi quantitas, cui hoc vindicaretur signum, decrescente valore ipsius α numerico indefinite in eundem ipsa convergeret limitem ac ea demum quantitas, cui, dum α positiva est, addictum fuisset hoc signum x^μ. Nam sive (β') admissam fueris sive (β'') — solas, inquam, quibus admissis quem diximus novissime finem assequi demum liceat —; in aliud quoddam incidis majoris sane impedimenti incommodum: accidit nempe ut, cui (dum α negativa est) addictum fuit tali modo signum x^μ, quantitas decrescente valore ipsius β numerico indefinite in diversos ipsa tendat duos limites, prout ex plagâ positivâ aut negativâ in 0 contenderit haec β: adeo ut (A Numerum denotante), si forte (β') admitti placuerit, concedendum foret

$(-A)^\mu$ significare non solum

$$A^\mu(\mathrm{Cos}\,2k\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi)(\mathrm{Cos}\,\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$

sed etiam

$$A^\mu(\mathrm{Cos}\,2k\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,2k\mu\pi)(\mathrm{Cos}\,\mu\pi-\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi),$$

quippe quarum altera limitem conficit, in quem convergente β positivâ in 0, altera in quem convergente β negativâ in 0, tendit ipsa $(-A+\beta\sqrt{-1})^\mu$ ex formulâ (β') definita; et quidem si potius placuerit (β'') admitti, ejusdem plane generis incommodum adforet.

Quod quoniam incommodum, ut plane apparet, majoris admodum est impedimenti quam prius illud, ex acceptâ definitione istâ

$$x^\mu=(\pm\varrho)^\mu(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$$

prout α haud negativa est aut negativa

oriundum; propterea nos hanc quidem ipsis (β') et (β'') praeferendam putavimus, opinati praeterea nec injunctum nobis esse officium nec veniam quidem datam ex Analysi, ob indicatum (si ita demum vocabitur) incommodum, signi x^μ pro α negativa tollendi.

*) Quae heic jam allata sunt, ea conficiunt omnia, quae de signis x^y et Log $b(x)$ in Actis Acad. Scient. Stockholm. et quidem Dissertatione tituli praecedentibus superscripti referenda nos quidem curavimus. Quae in hac Dissert. occurrunt caetera non nisi signa illa Sin x et Cos x, Arcsin x et Arccos x spectant.

Digitized by Google

Postscriptum.

Anno jam praecedente 1846 vix duas partes provecto, nondum in finem perducto negotio typis Suecanis exprimendae (in Actis Acad. Scient. Stockholm.) Dissertationis, cujus ea, quae heic Latine reddita sunt, partem explent majorem — (praeterlapso quidem post recitatam in Academia Dissertationem anni unius spatio) —, mirum id mihi contigit gaudii ac voluptatis, ut popularis quidam, Parisiis cum Cauchy ipso collocutus, redux inde mandatis convenienter, quae sibi ab eo data fuerant *), certiorem me fecerit, quod princeps ille Geometra vix bene praeterlapso tempore has ipsas Analyseos partes retractandas adgressus signorum interdictis, quorum in praecedentibus (pag. 383. et 384.) facta erat mentio, haudquaquam opus esse Analysi. ipse quidem jam fuerat expertus. Mense demum Decembris vixdum elapso perscriptis jam fere omnibus, quae huic „postscripto“ praecedunt, schedulas accepi extremas Tomi Illi operis praeclari „Exercices d'Analyse et de phys. mathématique“, quibus Cauchy perill. rem suo modo tractatam in medium proferendam curavit. Quibus ex schedulis quum comperi non omnibus omnino numeris congruere definitiones, novas illas quidem, Cauchyanas cum meis: at plurimum tamen referat, ut Analyseos inter cultores de rebus hujusce naturae, ipsis inquam quibus innitatur aedificium Analyseos fundamentis, perfecte conveniat; non possum quin breviter heic praecipua, quae discrepantiam istam constituunt, momenta exponam, sperans fore ut rem demum accurate explicatam manifestamque eo redditam perfacili tandem negotio dirimi in sempiternum liceat.

Quâ tamen in expositione (ut decet) nonnisi iis, quae signa illa x^y et Log $b(x)$ spectant, hoc loco propositis pauca, quae de signis illis Arcsin x et Arccos x definiendis admonere voluerim, in aliud tempus — quo nempe data mihi fuerit occasio caeteras Dissertationis meae partes, Latine quidem redditas huic „Archivo“ offerendi — differo **).

---

*) Quorum videlicet mandatorum ansam dederat Nota quaedam infra pag. 12. Commentationis nostrae cujusdam titulo „Doctrinae serierum infinit. Exercitationes, P. Ima“ subscriptae, cujus paullo ante perlustrandae copia Illustr. Cauchy data fuerat. Quâ quidem in Nota nos obiter ea, quae in Dissertatione praesenti signa illa x^y et Log $b(x)$ spectant, paucis indicata feceramus.

**) Hoc tamen loco non possum quin obiter admoneam laborare hanc partem Commentationis Cauchyanae et quidem nominatim pag. 385. graviori quodam calami lapsu. Scilicet quoniam, dum $t=0$ atque s numerice >1 ponuntur, formula illa S in $\sqrt{s^2}$ (nec semper, uti loco cit. contendit Illustr. Auctor, in s) abit, exinde consequitur loco formulae (37) substitui oportere memorabilem istam

$$\text{Arccos}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2}}\right) \mp \sqrt{-1}\, l(\sqrt{s^2}+\sqrt{s^2-1}).$$

Digitized by Google

Dum in eo res vertitur, ut determinetur, cuinam potissimum ex μ-potentiis (μ reali) quantitatis illius $x(=\alpha+\beta\sqrt{-1})$ innumeris hisce

$$(a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ((x))^{\mu}=\rho^{\mu}(\operatorname{Cos}\mu\theta+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\theta)$$

[θ hoc loco, salvis solummodo ambabus illis $\begin{pmatrix}\operatorname{Cos}\theta=\alpha\\ \operatorname{Sin}\theta=\beta\end{pmatrix}$, indeterminato relicto] singulare cedat signum x^{μ} nec non — uti nobis quidem visum fuit — nomen „μ-potentia principalis"; ex praecedentibus equidem Analyseos partibus arbitrio usque relicta est res tota, si modo ita definiatur haec notio

$$(b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad x^{\mu}=\rho^{\mu}(\operatorname{Cos}\mu\vartheta+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta)$$

(ϑ breviter debitum ipsum θ-valorem denotante), ut,

1) pro $x=$ Numero A, in A^{μ} ipsam Elementorum

atque,

2) pro $\left\{\begin{matrix} x=-1 \\ \mu=\frac{1}{2}\end{matrix}\right\}$, in $(-1)^{\frac{1}{2}}$ seu $\sqrt{-1}$

reducatur hoc membrum posterius (b). Admonere heic juvat ambabus his rite satisfieri conditionibus, sive Cauchyana (nova illa quidem) sive nostra cooptetur determinatio ipsius ϑ: et quidem multis praeterea, quin immo innumeris, aliis ipsius ϑ determinandi modis ita fieri posse.

Sin vero ad ea simul, quae sequentibus Analyseos partibus futura sint consectaria ex hac definitione, advertitur animus; primum id quidem sese offert optandum, ut quae demum cooptata fuerit quantitas (b) seu $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}$ talem confectura sit ipsarum α et β functionem, cui nulla accidat, variatis licet α et β quomodocumque, solutio continuitatis, quaequae sit μ forte quantitas realis. Talem vero nullum omnino inveniri posse ϑ-valorem, cujus beneficio compotes hujusce voti fiamus, id ut rationibus naturae rei debitis universis argui quidem liceat, tamen in praesenti sequentia solummodo, eademque ut per se manifesta ita ad rem dirimendam prae ceteris idonea, singularia attulisse argumenta sufficiet.

Valorem ipsius ϑ, si quis exsistat, cujus beneficio compotes nos fieri liceat voti jam nunc commemorati, duplici huic (ut jam caeteras praetermittamus) satisfacere oportebit conditioni ut (A et B Numeros denotantibus)

1°) α^{μ} communis ambabus his $(\alpha\pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ futura sit limes decrescente B in 0 indefinite, atque

2°) $(\beta\sqrt{-1})^{\mu}$ communis ambabus his $(\pm A+\beta\sqrt{-1})^{\mu}$ futura sit limes decrescente A in 0 indefinite.

Verumenimvero in „Nota I" jam proxime praecedente evidenter nos quidem probavimus eo, quo solo finem illum 2°) assequi liceat, modo ipsius ϑ determinandi alterum illum 1°) — certe α negativâ — non posse attingi. Id quod reverâ sufficit, ut plane apparet.

Quod si, uti jam nunc constat perfecte, fieri non potest ut talem inveniri liceat ϑ-valorem, cujus beneficio compotes quod supra diximus voti fiamus; id deinceps sese praebet optandum, ut ϑ talis cooptetur, quo alterutrum certe propositorum illorum 1°) et 2°) attingi liceat, quippe quoniam ne haec quidem ambo simul consequi ullo modo pote-

Digitized by Google

ris. At, utrum potissimum? Tali de re ne ullum quidem hoc tempore relictum esse locum dubitandi, id jure nobis licitum esse contendere videtur. Etenim quis est, cui non sit persuasum Analysi longe majora profectura esse emolumenta ex tali institutione, quà liceat realem (plerumque) illam

$$a^{\mu}$$

censeri limitem ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ communem, quam quae illi forte contingant ex venia imaginariam (longe plerumque)

$$(\beta\sqrt{-1})^{\mu}$$

censendi limitem ambarum $(\pm A + \beta\sqrt{-1})^{\mu}$? *)

Quid plura? In hoc tamen ipso momentum vertitur differentiae inter Cauchyanam nostramque ϑ-valoris determinandi rationem, quod nempe nostrà admissà definitione ipsius x^{μ} propositum illud 1°) attingatur, Cauchyanà vero non attingatur: id quod, heic maximi momenti rem, jam paucis explicare conabimur.

A) Nobis, prout α positiva aut negativa, erat (β reali quàlibet)

$$(c) \ldots (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu} = (\pm \varrho)^{\mu}(\mathrm{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

$$\tau \text{ denot. } \mathrm{Arctg}\,\frac{\beta}{\alpha},$$

ex quà patet extemplo

$$\alpha^{\mu}$$

conficere limitem, in quem tendit $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu}$ convergente β (positivà an negativà, nil refert) in 0 indefinite.

B) Cauchyanà ex definitione habetur

$$(d) \ldots (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{\mu} = \varrho^{\mu}(\mathrm{Cos}\,\mu\vartheta + \sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\vartheta),$$

ϑ denotante unicum ex Argumentis θ ipsius $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ id, quod limitibus $+\pi$ atque (exclusive) $-\pi$ continetur; ideoque

---

*) Sic Cauchy ipse (pag. 375. operis cit. „Exercices etc.“) talem ipsius ϑ determinandi rationem repudiavit, ex quà profecturum id esset incommodi (verbum refero ipsius Auctoris Latine quidem redditum), ut

$$\alpha^{\mu}, \text{ dum } \alpha \text{ positiva est,}$$

communis non evaderet ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ limes. Eo magis miror, quid sit quod Cauchy hoc ipso temporis momento talem hujus ϑ determinandi rationem proposuerit admittendum, ex quà necesse id consequatur incommodi, ut

$$\alpha^{\mu}, \text{ dum } \alpha \text{ negativa est,}$$

communem non censeri liceat ambarum $(\alpha \pm B\sqrt{-1})^{\mu}$ limitem: quum tamen, et quidem nostrae definitionis beneficio, ambo simul evitari licet incommoda, id quod praeterea paucis mox infra patebit verbis.

dum α positiva $= A$ est, habetur $\vartheta = \text{Arctg}\,\frac{\beta}{\alpha} = \tau$, β reali quâlibet,

unde, secund. (d),

$$(A + \beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

ideoque A^μ ex hac etiam definitione limes est ambarum $(A \pm \sqrt{\beta^2}.\sqrt{-1})^\mu$ communis, decrescente valore ipsius β numerico in 0 indefinite;

dum vero α negativa $= -A$ est, habetur

$$\vartheta = \text{Arctg}\,\frac{\beta}{-A} + \pi = \tau + \pi,\ \text{dum}\ \beta\ \text{haud negativa est},$$

at

$$= -(\pi - \text{Arctg}\,\frac{\beta}{-A}) = \tau - \pi,\ \text{dum}\ \beta\ \text{negativa},$$

unde, secundum (d),

$$(-A + \beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu.[\text{Cos}\,\mu(\tau \pm \pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau \pm \pi)],$$

prout β haud negativa est aut negativa,

ideoque $(-A)^\mu$ *) ex hac definitione ipsius $(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu$ limitem equidem censeri licet ipsius $(-A + \beta\sqrt{-1})^\mu$ convergente β positivâ in 0, minime vero β negativâ in 0 convergente.

Observ. Reverâ Cauchy hoc modo ipsi x^μ eam ipsam, quae in „Nota I" proxime praecedente ocurrit, definitionem (β') pro $k = 0$ [seu, quae idem valet, (β'') pro $k = 0$], i. e.

α positivâ (0 inclusive)

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu(\text{Cos}\,\mu\tau + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\tau),$$

α negativâ (0 inclus.)

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\tau \pm \pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau \pm \pi)],$$

prout β positiva est aut negativa,

admisit, eo tamen insuper adjecto posteriori huic aequationi reservato — quo scilicet praetermisso anceps plerumque evaderet definitio ipsius α^μ (α negativâ) ut ne legem illam

$$„(\alpha + \beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu[\text{Cos}\,\mu(\tau - \pi) + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu(\tau - \pi)],$$

dum β negat. est,"

---

*) Obiter admonere hoc loco juvat, definitionem ipsius $(-A)^\mu$ Cauchyanam hancce

$$(-A)^\mu = A^\mu(\text{Cos}\,\mu\pi + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,\mu\pi) = A^\mu.(-1)^\mu$$

cum nostra omnimodo convenire. (Quâ de re vid. quae in nota infra pag. 399 praeced. allata sunt.)

Digitized by Google

in ipso etiam limite $\beta=0$ ratam censeri liceat. **Cauchy** igitur posterioris quam diximus aequationis loco reverà hanc cooptavit:

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu[\operatorname{Cos}\mu(\tau\pm\pi)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu(\tau\pm\pi)],$$

prout β haud negativa est aut negat.

Ex quibus — eorum vi ipsorum, quae in Notà illà I. praecedente allata sunt — rectà et quidem omni absque explicatione ulteriori perspicitur **Cauchy** definitione suà propositum illud „2⁰)", altero „1⁰)" amisso, attingere. Nostra prorsus in contrarium tulit ratio rei gerendae.

Quae cum ita sint, nobis certe — quippe quibus (uti supra dictum est) nihil omnino superesse videatur dubii, quin quisque re satis accurate examinatà talem, quà propositum illud „1⁰)" attingatur, institutionem longe sit praeoptaturus tali, quà alterum illud „2⁰)", quandoquidem non ambo simul attingere ullo modo liceat, — nobis (inquam) **Cauchy** videatur, necesse est, incuriae cujusdam culpà nec re satis bene exploratà in eam, quam modo diximus, definiendi rationem incidisse.

Pauca haec tandem addere juvat verba. Si quis forte **unicam**, eandemque Cauchyanae illi (d) analogam, maluerit formulam loco **ambarum** definitionis nostrae aequationum harum

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu = (\pm\varrho)^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau),$$

prout α haud negat. est aut negativa,

seu, explicatius,

$$(e)\quad \begin{cases} (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu = \varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\tau+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\tau), & \text{dum } \alpha \text{ haud negativa est,} \\ \text{atque } = \varrho^\mu[\operatorname{Cos}\mu(\tau+\pi)+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu(\tau+\pi)], & \text{dum } \alpha \text{ negativa.} \end{cases}$$

substituendam; nil sane impedit, quominus optato illius subveniatur substitutà equidem hac solà:

$$(d') \quad \ldots\ldots \quad (\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=\varrho^\mu(\operatorname{Cos}\mu\vartheta+\sqrt{-1}\operatorname{Sin}\mu\vartheta),$$

ϑ denotante **unicum ex Argumentis** θ **ipsius** $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ **id, quod limitibus hisce**

$$\frac{\pi}{2}-\pi \text{ atque (exclusive) } \frac{\pi}{2}+\pi\ ^{*})$$

continetur, quippe quoniam arcus ille τ in priori aequat. ipsis $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedere, in posteriori autem intra hos limites $\pm\frac{\pi}{2}$ (quoniam in eà $\alpha=0$ haud occurrit) inclusus censetur.

---

*) Proposuimus igitur reverà nos quidem arcum φ (vid. pag. 375. operis cit. „Exercices etc.") cooptandum nec π (quem Cauchy repudiavit) nec 0 (quem proposuit ille admittendum), sed ipsum illud medium Arithmeticum $\frac{\pi}{2}$.

Tum quod ad differentiam inter Cauchyanam nostramque definitionem ipsius, quem diximus nos quidem, „*e*-logarithmi principalis"

$$l(\alpha+\beta\sqrt{-1})$$

attinet, analoga ea est (nec inopinato id quidem) praecedenti, quae definitiones illas „potentiae principalis"

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\mu}$$

spectabat.

Nostra quidem definitione id contigit emolumenti, ut

$l(\alpha)$, sive positiva sit sive negat. α,

communis evadat limes amborum $l(\alpha\pm B\sqrt{-1})$ decrescente B in 0 indefinite; attamen hunc

$$l(\beta\sqrt{-1})$$

limitem equidem semper ipsius $l(A+\beta\sqrt{-1})$, decrescente A in 0 indefinite, nec tamen semper (scil. β negativâ haud licet) ipsius $l(-A+\beta\sqrt{-1})$ censeri licebit.

E contrario Cauchyanâ definitione id accidit incommodi, ut

$$l(\alpha)$$

communem non semper (scil. α negativâ $=-A$ haud semper licebit) censeri liceat amborum $l(\alpha\pm B\sqrt{-1})$ limitem decrescente B in 0 indefinite; — attamen hic

$l(\beta\sqrt{-1})$, sive positiva sit sive negat. β,

communis evadit limes amborum $l(\pm A+\beta\sqrt{-1})$ decrescente A in 0 indefinite.

Praeterea nostrûm utrique rata est haecce relatio

$$l(-A)=lA+l(-1)=lA+\pi\sqrt{-1}.$$

Denique de differentia inter Cauchyanam definitionem nostramque signorum universalium horum

x^y et $\mathrm{Log}_b(x)$

(x, y, b quantitatibus quibuscumque, realibus aeque ac imaginariis,)

nullâ sane post haec opus est explicatione aliâ quam hâc generali, quod nostrûm utrique cooptatae fuerint definitiones illae

$$(f) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x^y=e^{ylx},\ \mathrm{Log}_b(x)=\frac{lx}{lb}.$$

Quo scilicet ex facto patet omnino differentiam, de quâ quaeritur, ex solâ (cujus supra mentionem fecimus) differentiâ inter Cauchyanam defi-

Digitized by Google

nitionem nostramque ipsorum $l(x)$ et $l(b)$, x et b imaginariis negativarum equidem partium realium, pendere. Quare, si umquam eo perventum fuerit, ut de principatu alterutrius modi horum $l(x)$ et $l(b)$ definiendorum conveniat, eodem demum temporis momento, uter potissimum generalibus illis x^y et $\mathrm{Log}_b(x)$ reservatus permaneat sensus, inter Geometras erit lege sancitum.

Illustrissimo Cauchy, si ei placuerit suam ipsius post haec pronuntiare sententiam, hujus aevi Geometrae aeque ac venturi plurimum se debere certissime confitebuntur. Quod ad nos attinet, tantâ jam dudum imbuti sumus assuetudine explicationis apud Cauchy in rebus dubiis petendae accipiendaeque, ut persuasum nobis hoc quoque tempore habere videamur, fore ut brevi ille quidem Geometras accepto quod diximus beneficio obligatos sibi sit devincturus.

XLV.

Ueber die Rektifikation und Quadratur der Toroide.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die in Archiv Thl. VIII. S. 375. ff. betrachtete Kurve besteht wesentlich aus zwei Kurven, eine, welche ich die äussere, die andere, die ich die innere Toroide nennen will. Für die erstere gelten in den Gleichungen (17) des erwähnten Aufsatzes die obern Zeichen, für die andere die untern. Ich betrachte hier bloss die erste der zwei Kurven, denn die andere hat, je nach der Grösse von k, ganz andere Gestalten, indem — wie man durch Untersuchung findet — sie Rückkehr- und Doppelpunkte haben kann, der äussern aber gleicht, wenn $k \leqq \frac{b^2}{a}$, jedoch auch nur alsdann. In eine spezielle Untersuchung der einzelnen Gestalten will ich hier nicht eingehen, da dieselbe im Ganzen nicht schwer ist, auch es sich hier vorzüglich um Rektifikation und Quadratur handeln soll.

Digitized by Google

Die äussere Toroide ist eine vollkommen geschlossene Figur, die sich in die vier Koordinatenwinkel vollkommen symmetrisch vertheilt, so dass, wenn man das ganze System um die Axe der x dreht, die Kurventheile sich decken, und eben so, wenn man es um die Axe der y dreht. Es genügt also den Quadranten im Koordinatenwinkel der positiven x und y zu betrachten. Dieser Quadrant geht durch die Axe der x im Punkte $x=a+k$, $y=0$, und durch die Axe der y im Punkte $x=0$, $y=b+k$, sonst trifft er keine der Axen mehr.

Setzt man in den Gleichungen (17) a. a. O. $x_1=a\cos t$, $y_1=b\sin t$, was man darf, da alsdann $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x &= \left(a+\frac{kb}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)\cos t,\\ y &= \left(b+\frac{ka}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)\sin t; \end{aligned}\right\}\quad(1)$$

wenn x und y die laufenden Koordinaten der Kurve sind.

Man zieht aus den Formeln (1)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -a\sin t\left[1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right],\\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b\cos t\left[1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right]. \end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Sei nun, von $t=0$ an gerechnet, s der Bogen, der zum Winkel $t\left(\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ gehört, so ist

$$s=\int_0^t \partial t\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}$$

$$=\int_0^t\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,.\,\partial t.$$

Dieser Bogen fängt an bei dem Punkte $x=a+k$, $y=0$.

Führt man die Multiplikation aus, so ergiebt sich:

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,.\,\partial t+abk\int_0^t\frac{\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

$$=a\int_0^t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,.\,\partial t+abk\int_0^t\frac{\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t},$$

wo $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$.

Was nun zuerst das erste dieser Integrale anbelangt, so hat man, wenn man $t=\frac{\pi}{2}-\varphi$ setzt:

Digitized by Google

$$\int_0^t \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,\partial t = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi - \int_0^{\varphi} \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Bezeichnet man durch $E(\psi, m)$ wie gewöhnlich das elliptische Integral

$$\int_0^{\psi} \sqrt{1-m^2\sin^2\psi}\,\partial\psi,$$

so findet sich:

$$\int_0^t \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,\partial t = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E(\varphi, e) = E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - t, e\right).$$

Was das zweite Integral anbelangt, so ist es:

$$\frac{1}{a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1-e^2\cos^2 t} = \frac{1}{2a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1+e\cos t} + \frac{1}{2a^2}\int_0^t \frac{\partial t}{1-e\cos t}$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{e+\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{-e+\cos t}{1-e\cos t}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2ab}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{(1-e^2)\cos^2 t - \sin^2 t}{1-e^2\cos^2 t}\right).$$

Also findet sich

$$\left.\begin{aligned} s = a\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2} - t, e\right)\right] & \\ + \frac{k}{2}\operatorname{arc}\left(\cos = \frac{(1-e^2)\cos^2 t - \sin^2 t}{1-e^2\cos^2 t}\right). & \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für $k=0$ ist die Toroide eine Ellipse, deren Halbaxen a und b sind; für $a=b$ ist sie ein Kreis vom Halbmesser $a+k$.

Setzt man $t=\frac{\pi}{2}$, so findet sich als Länge des Quadranten

$$aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + \frac{k}{2}\pi,$$

also ist die Länge der ganzen Kurve:

$$4aE\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + 2k\pi,$$

gleich der Länge der Ellipse + der des erzeugenden Kreises.

Digitized by Google

Für $a=b$ ist $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)=E\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\frac{\pi}{2}$, also die Länge der ganzen Toroide: $2(a+k)\pi$.

Wenden wir uns zur Berechnung der Fläche. Sie möge wieder anfangen bei $y=0$, $x=a+k$, und ein Stück davon endigen mit den zu t gehörigen Ordinaten; ist dasselbe v, so hat man:

$$v=-\int_0^t y\frac{\partial x}{\partial t}\partial t$$

$$=a\int_0^t \sin^2 t\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)\partial t,$$

$$\frac{v}{a}=b\int_0^t \sin^2 t\partial t+ab^2k\int_0^t\frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}$$

$$+ak\int_0^t\frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}+a^2bk^2\int_0^t\frac{\sin^2 t\partial t}{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^2}.$$

Nun ist

$$\int_0^t \sin^2 t\partial t=-\tfrac{1}{2}\sin t\cos t+\frac{t}{2}.$$

Ferner findet man, wie oben:

$$\int_0^t\frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a^3\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$=\frac{F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)}{a^3e^2}-\frac{F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)}{a^3e^2}$$

$$-\frac{\sin t\cos t}{a^3\sqrt{1-e^2\cos^2 t}},$$

wenn man, wie gewöhnlich, $\int_0^{\psi}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}=F(\psi,m)$ setzt, und beachtet, dass

$$\int_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi\partial\psi}{\sqrt{(1-m^2\sin^2\psi)^3}}=\frac{F(\psi,m)-E(\psi,m)}{m^2}+\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\psi}}.$$

Eben so ist

$$\int_0^t\frac{\sin^2 t\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\int_0^{\varphi}\frac{\cos^2\varphi\partial\varphi}{a\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2},e\right)}{ae^2}-\frac{E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)-(1-e^2)F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)}{ae^2}.$$

Digitized by Google

Endlich ist

$$\int_0^t \frac{\sin^2 t \partial t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2} = \int_0^t \frac{\operatorname{tg}^2 t . \partial t}{(b^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t)^2 \cos^2 t} = \int_0^x \frac{x^2 \partial x}{(b^2+a^2x^2)^2},$$

wenn $\operatorname{tg} t = x$ gesetzt wird. Das letzte Integral ist aber

$$\frac{-x}{2a^2(b^2+a^2x^2)} + \frac{1}{2a^3b}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{ax}{b}\right).$$

Demnach ist:

$$\int_0^t \frac{\sin^2 t \partial t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2} = \frac{-\operatorname{tg} t}{2a^2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)} + \frac{1}{2a^3b}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right).$$

Fasst man die gewonnenen Resultate zusammen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} v = & -\frac{ab}{2}\sin t\cos t + \frac{abt}{2} \\ & + \frac{b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right) + E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)\right\} \\ & - \frac{b^2k}{a}\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} \\ & + \frac{ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right) + \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)\right\} \\ & - \frac{abk^2\operatorname{tg} t}{2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)} + \frac{k^2}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Um den Quadranten zu erhalten, hat man $t = \frac{\pi}{2}$ zu setzen. Er ist:

$$\begin{aligned} & \frac{ab\pi}{4} + \frac{b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} \\ & + \frac{ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} + \frac{k^2\pi}{4}, \end{aligned}$$

mithin der von der ganzen Kurve umschlossene Raum:

$$\left.\begin{aligned} & ab\pi + \frac{4b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right) - E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} \\ & + \frac{4ak}{e^2}\left\{I\left(\frac{\pi}{2},e\right) - \frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\} + k^2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Setzt man $k=0$, so erhält man den Raum, der von der Ellipse umschlossen ist. Der zwischen der Ellipse und der äussern Toroide befindliche Raum ist:

Digitized by Google

$$\frac{4b^2k}{ae^2}\left\{F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}+\frac{4ak}{e^2}\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{b^2}{a^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right\}+k^2\pi$$
$$=\frac{4k}{ae^2}(a^2-b^2)E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi=4ak\,E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi.$$

Auf gleiche Art reduzirt sich die Formel (4), und man findet:

$$\left.\begin{array}{l} v=-\frac{ab}{2}\sin t\cos t+\frac{ab}{2}t+ak\left\{E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)\right\} \\ -\frac{b^2k}{a}\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}-\frac{abk^2\operatorname{tg} t}{2(b^2+a^2\operatorname{tg}^2 t)}+\frac{k^2}{2}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{a}{b}\operatorname{tg} t\right). \end{array}\right\} \quad (4')$$

Für $a=b$ ist $e=0$, $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-E\left(\frac{\pi}{2}-t,e\right)=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=t$; setzt man ferner $t=\frac{\pi}{2}$ und nimmt das Resultat vierfach, so ergiebt sich:

$$\pi(a^2+2ak+k^2)=\pi(a+k)^2,$$

wie sich gehört.

Die Formel (5) ist:

$$ab\pi+4ak\,E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+k^2\pi. \qquad (5')$$

Somit wäre nun die vorgelegte Aufgabe gelöst. Es dürfte jedoch nicht uninterressant sein, auch den Umdrehungskörper näher zu betrachten, der durch die äussere Toroide entsteht.

Es drehe sich also das ganze System um die Axe der x. Sei p der Inhalt der Oberfläche, die von dem Bogen der Toroide, der dem Winkel t entspricht (von $t=0$ an gerechnet) beschrieben wird, so ist bekanntlich:

$$p=-2\pi\int_0^t y\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,\partial t,$$

also

$$\frac{p}{2\pi}=\int_0^t\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}}\right)\sin t\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}\right)\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\partial t$$

$$=b\int_0^t\sin t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\partial t+ab^2k\int_0^t\frac{\sin t\,dt}{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+ak\int_0^t\sin t\,\partial t+a^2bk^2\int_0^t\frac{\sin t.\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}.$$

Dadurch, dass man $\cos t=x$ setzt, erhält man:

$$\int_0^t\sin t\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}\,\partial t=-\int_1^x\sqrt{a^2-(a^2-b^2)x^2}\,\partial x=a\int_0^1\sqrt{1-e^2x^2}\,\partial x-a\int_0^x\sqrt{1-e^2x^2}\,\partial x$$

$$=\frac{b}{2}-\frac{\cos t}{2}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+\frac{a}{2e}\operatorname{arc}(\sin=e\sqrt{1-e^2\cos^2t}-\frac{eb}{a}\cos t).$$

$$\int_0^t\frac{\sin t\partial t}{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}=\int_0^1\frac{\partial x}{a^2(1-e^2x^2)}-\int_0^x\frac{\partial x}{a^2(1-e^2x^2)}=\frac{1}{2a^2e}\log\left\{\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right\}.$$

$$\int_0^t\frac{\sin t.\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2t+b^2\cos^2t)^3}}=\int_0^1\frac{\partial x}{a^3\sqrt{(1-e^2x^2)^3}}-\int_0^x\frac{\partial x}{a^3\sqrt{(1-e^2x^2)^3}}=\frac{1}{a^3\sqrt{1-e^2}}-\frac{\cos t}{a^3\sqrt{1-e^2\cos^2t}}.$$

$$\int_0^t\sin t.\partial t=-\cos t+1.$$

Fasst man diese Resultate zusammen, so ergiebt sich:

$$p=2\pi\left[\frac{b^2}{2}-\frac{b\cos t}{2}\sqrt{a^2\sin^2t+b^2\cos^2t}+\frac{ab}{2e}\operatorname{arc}(\sin=e\sqrt{1-e^2\cos^2t}-e\frac{b}{a}\cos t)\right.$$
$$\left.+\frac{b^2k}{2ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right)-ak\cos t+ak+k^2-\frac{bk^2\cos t}{a\sqrt{1-e^2\cos^2t}}\right]. \quad (6)$$

Diejenigen Glieder dieser Formel, die kein k enthalten, geben den entsprechenden Theil der von der Ellipse beschriebenen Oberfläche.

Für die Hälfte der erzeugten Oberfläche ist $t=\frac{\pi}{2}$, also die ganze Oberfläche:

$$2\pi\left[b^2+\frac{ab}{e}\operatorname{arc}(\sin=e)+\frac{b^2k}{ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)+2ak+2k^2\right].$$

Für $a=b$ ist $e=0$, also die Oberfläche der Kugel:

$$2\pi[a^2+a^2+2ak+2ak+2k^2]=4\pi(a+k)^2,$$

wie bekannt.

Suchen wir nun auch den körperlichen Inhalt zu bestimmen. Er sei q, so ist

$$q=\pi\int_0^t-y^2\frac{\partial x}{\partial t}\partial t=a\pi\int_0^t\sin^3 t\left(b+\frac{ak}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}\right)^2\left(1+\frac{abk}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}\right)\partial t,$$

$$\frac{q}{a\pi}=b^2\int_0^t\sin^3 t\partial t+2abk\int_0^t\frac{\sin^3 t.\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}}+a^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

$$+akb^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^3}}+2a^2b^2k^2\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{(a^2\sin t^2+b^2\cos^2 t)^2}$$

$$+a^3bk^3\int_0^t\frac{\sin^3 t\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^5}}.$$

Durch die Substitution $\cos t = x$ werden diese Integrale alle auf bekannte zurückgeführt und man erhält folgende Formeln:

$$\int_0^t \sin^3 t\,\partial t = -\tfrac{1}{3}\sin^2 t\cos t - \tfrac{2}{3}\cos t + \tfrac{2}{3}.$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t\,\partial t}{\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}} = \frac{b}{2a^2e^2} - \frac{\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{2ae^2}$$
$$+ \frac{2e^2-1}{2ae^3}\,\mathrm{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t\,\partial t}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = -\frac{b^2}{2a^4e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{1}{a^2e^2} - \frac{\cos t}{a^2e^2}.$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t\,\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^3}} = -\frac{b^2}{a^5e^2}\left(\frac{a}{b} - \frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)$$
$$+ \frac{1}{a^3e^3}\,\mathrm{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t\,\partial t}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^2} = -\frac{1}{2a^4e^2} - \frac{b^2\cos t}{2a^6e^2(1-e^2\cos^2 t)}$$
$$+ \frac{e^2+1}{4a^4e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right).$$

$$\int_0^t \frac{\sin^3 t\,\partial t}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^5}}$$
$$= \frac{1}{a^5}\left(-\frac{a}{3be^2} + \frac{b^2\cos t}{3a^2e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}} + \frac{2e^2+1}{3e^2\sqrt{1-e^2}} - \frac{(2e^2+1)\cos t}{3e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right).$$

Substituirt man, so ergiebt sich:

$$q = a\pi\Bigg[-\frac{b^2}{3}\sin t\cos t - \frac{2b^2}{3}\cos t + \frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{ae^2} - \frac{kb\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{e^2}$$
$$+ \frac{(2e^2-1)kb}{e^3}\,\mathrm{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right)$$
$$- \frac{b^2k^2}{2a^2e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + \frac{k^2}{e^2} - \frac{k^2\cos t}{e^2} - \frac{kb^4}{a^3e^2}$$
$$- \frac{kb^5}{a^4e^2}\frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} + \frac{kb^3}{a^2e^3}\,\mathrm{arc}\left(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - \frac{eb}{a}\cos t\right)$$
$$- \frac{b^2k^2}{e^2a^2} - \frac{b^4k^2\cos t}{a^4e^2(1-e^2\cos^2 t)} + \frac{(e^2+1)b^2k^2}{2a^2e^3}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right)$$
$$- \frac{k^3}{3ae^2} + \frac{b^3k^3\cos t}{3a^4e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}} + \frac{(2e^2+1)k^3b}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2}}$$
$$- \frac{(2e^2+1)k^3b\cos t}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\Bigg]$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}
&= a\pi\Big[-\frac{b^2}{3}\sin t\cos t - \frac{2b^2}{3}\cos t + \frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{a}\\
&-\frac{kb\cos t\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}{e^2} + \frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin = e\sqrt{1-e^2\cos^2 t} - e\frac{b}{a}\cos t)\\
&+\frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\cdot\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}\right) + k^2 - \frac{k^2\cos t}{e^2}\\
&-\frac{kb^5}{a^4e^2}\cdot\frac{\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} + \frac{2k^3}{3a} + \frac{b^3k^3\cos t}{3a^4e^2\sqrt{(1-e^2\cos^2 t)^3}}\\
&-\frac{(2e^2+1)k^3b\cos t}{3a^2e^2\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\Big].
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Für die Hälfte setzt man $t = \frac{\pi}{2}$, und somit ist der ganze Körper:

$$2a\pi\left[\frac{2b^2}{3} + \frac{kb^2}{a} + \frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin = e) + \frac{b^2k^2}{2a^2e}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right) + k^2 + \frac{2k^3}{3a}\right]. \quad (8)$$

Für $a = b$ ist $e = 1$ und die Kugel:

$$2a\pi\left(\frac{2a^2}{3} + ka + ka + k^2 + k^2 + \frac{2k^3}{3a}\right) = \frac{\pi}{3}(4a^3 + 12a^2k + 12ak^2 + 4k^3)$$
$$= \frac{4\pi}{3}(a+k)^3,$$

wie bekannt.

Die von k freien Glieder in (7) und (8) geben den körperlichen Inhalt des analogen, durch die Ellipse erzeugten Körpers; während die k enthaltenden zusammen den durch den Raum zwischen der Ellipse und der Toroide erzeugten Körper ausdrücken.

Es ist nun auch leicht, den Körper zu betrachten, der durch Umdrehung um die Axe der y entsteht; wir übergehen diese Betrachtung jedoch.

In Bezug auf die analogen Formeln für die innere Toroide, die ausserhalb des Kreises dieser Betrachtungen liegt, bemerken wir nur noch, dass, wenn $k \overset{=}{<} \frac{b^2}{a}$, alle obigen Formeln für dieselbe gelten, wenn man statt k setzt $-k$. Daraus folgt, dass unter dieser Voraussetzung hinsichtlich k:

Der Unterschied der Längen beider Toroiden:

$$4k\pi;$$

die Fläche zwischen beiden Toroiden:

$$8akE\left(\frac{\pi}{2}, e\right);$$

der Unterschied der Oberflächen der beiden Umdrehungskörper, welche durch beide Kurven erzeugt werden, wenn das ganze System sich um die grosse Axe der Ellipse dreht:

Digitized by Google

$$4\pi\left(\frac{b^2k}{ae}\log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)+2ak\right);$$

und der körperliche Raum, der durch das Flächenstück zwischen beiden Kurven erzeugt wird:

$$4a\pi\left[\frac{kb^2}{a}+\frac{kb}{e}\operatorname{arc}(\sin=e)+\frac{2k^3}{3a}\right].$$

Anderweitige Resultate liessen sich noch leicht erhalten; wir enthalten uns dessen aber hier, um nicht dem Gegenstande eine zu grosse Ausdehnung zu geben.*)

XLVI.

Eine geometrische Anwendung der Lehre vom Grössten und Kleinsten.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Vor schon langer Zeit stellte Hr. Prof. Steiner in Crelle's Journal folgende interessante Aufgabe:

> Wenn drei Punkte ihrer Lage nach gegeben sind, einen vierten Punkt in der Ebene jener so zu bestimmen, dass die Summe der μten Potenzen der Entfernungen des gesuchten Punktes von den gegebenen ein Minimum werde;

und theilte zugleich zwei Bedingungen mit, welche zur Bestimmung des fraglichen Punktes hinreichen, nämlich die folgenden:

$$x^{\mu-1}\sin(x,z)=y^{\mu-1}\sin(y,z),$$
$$x^{\mu-1}\sin(x,y)=z^{\mu-1}\sin(y,z);$$

worin x, y, z die Entfernungen des gesuchten Punktes von den drei gegebenen bezeichnen; den Beweis für diese Bedingungsgleichungen hat er aber nicht geliefert. Es dürfte daher nicht überflüssig sein, eine Bearbeitung dieses Problemes mitzutheilen, wobei dasselbe als eine sehr einfache Spezialisirung des folgenden weit allgemeineren erscheint:

*) Ich würde den Herrn Vf. dieser recht gute Beispiele für die Anwendung der elliptischen Functionen enthaltenden Abhandlung doch bitten, seine Betrachtungen gelegentlich fortzusetzen. G.

Digitized by Google

Man soll in der Ebene des gegebenen Dreiecks *ABC* (Taf. X. Fig. 13.) den Punkt *O* so bestimmen, dass für $AO=x$, $BO=y$, $CO=z$ die Summe

$$\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z),$$

worin φ, ψ, χ drei völlig willkührliche Funktionen bezeichnen, ein Maximum oder Minimum werde.

Für die Lösung dieser Aufgabe ist zunächst die Bemerkung von Gewicht, dass x, y, z nicht drei von einander unabhängige Variabele sind; denn wenn wir die Winkel des Dreieckes *ABC* der Reihe nach mit α, β, γ, die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c und den Winkel *BAO* mit t bezeichnen, so finden die Gleichungen

$$y^2=c^2+x^2-2x\cos t, \qquad (1)$$

$$z^2=b^2+x^2-2bx\cos(\alpha-t) \qquad (2)$$

statt, und mithin bildet die Summe $\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z)$ eine Funktion von nur zwei unabhängigen Veränderlichen x und t.

Bezeichnet nun $f(x,t)$ irgend eine Funktion zweier unabhängigen Variabelen, so findet man bekanntlich diejenigen Werthe von x und t, welche $f(x,t)$ zu einem Maximum oder Minimum machen, dadurch, dass man die nach x und t genommenen partiellen Differenzialquotienten von $f(x,t)$ entwickelt und hierauf aus den Gleichungen

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=0,\ \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=0$$

x und t eliminirt. Um nachher zu entscheiden, welche von den gefundenen Werthen einem Maximum und welche einem Minimum von $f(x,t)$ entsprechen, muss man die höheren Differenzialquotienten dieser Funktion in Betracht ziehen; diese Diskussion ist aber in den Fällen überflüssig, wo man aus der Natur von $f(x,t)$ unmittelbar ersieht, wann überhaupt ein Maximum oder Minimum in ihr vorkommen kann.

In der Anwendung auf unser Problem ist

$$f(x,t)=\varphi(x)+\psi(y)+\chi(z), \qquad (3)$$

folglich

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\frac{\partial\chi(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad (4)$$

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=\frac{\partial\psi(y)}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\frac{\partial\chi(z)}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right). \qquad (5)$$

Andererseits findet man aus den Gleichungen (1) und (2) leicht durch partielle Differenziation nach x:

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{x-c\cos t}{y},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{x-b\cos(\alpha-t)}{z},$$

und durch partielle Differenziation nach t

$$\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)=\frac{cx\sin t}{y},\quad \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)=-\frac{bx\sin(\alpha-t)}{z}.$$

Durch Substitution dieser Werthe gehen die Gleichungen (1) und (2) in die folgenden über:

$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)=\varphi'(x)+\psi'(y)\frac{x-c\cos t}{y}+\chi'(z)\frac{x-b\cos(\alpha-t)}{z},$$
$$\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)=\psi'(y)\frac{cx\sin t}{y}-\chi'(z)\frac{bx\sin(\alpha-t)}{z};$$

und wenn jetzt die partiellen Differenzialquotienten links gleich Null gesetzt werden, so bleiben zur Bestimmung von x und t die beiden Gleichungen:

$$\varphi'(x)=\psi'(y)\frac{c\cos t-x}{y}+\chi'(z)\frac{b\cos(\alpha-t)-x}{z}, \qquad (6)$$

$$0=\psi'(y)\frac{c\sin t}{y}-\chi'(z)\frac{b\sin(\alpha-t)}{z}, \qquad (7)$$

welche eine sehr elegante Umformung zulassen, wenn man auf die geometrische Bedeutung der Coefficienten von $\psi'(y)$ und $\chi'(z)$ eingeht. Wird nämlich AO über O hinaus unbestimmt verlängert, $\angle AOL=p$, $\angle BOL=q$ gesetzt, und werden ferner auf die verlängerte Gerade AO von B und C aus die Perpendikel BP und CQ herabgelassen, so ist

$$\frac{c\cos t-x}{y}=\frac{AP-AO}{BO}=\frac{PO}{BO}=\cos p,$$
$$\frac{b\cos(\alpha-t)-x}{z}=\frac{AQ-AO}{CO}=\frac{QO}{CO}=\cos q,$$
$$\frac{c\sin t}{y}=\frac{BP}{BO}=\sin p,$$
$$\frac{b\sin(\alpha-t)}{z}=\frac{CQ}{CO}=\sin q;$$

und hierdurch verwandeln sich die Gleichungen (6) und (7) in die folgenden:

$$\varphi'(x)=\psi'(y)\cos p+\chi'(z)\cos q,$$
$$0=\psi'(y)\sin p-\chi'(z)\sin q.$$

Hieraus lässt sich einmal $\chi'(z)$ und dann $\psi'(y)$ climiniren; man erhält ohne Schwierigkeit:

Digitized by Google

$$\varphi'(x)\sin q = \psi'(y)\sin(p+q),$$
$$\varphi'(x)\sin p = \chi'(z)\sin(p+q).$$

Bezeichnen wir endlich die Winkel BOC, AOC, AOB mit u, v, w, so ist $\sin q = \sin v$, $\sin p = \sin w$, $\sin(p+q) = \sin u$ und hierdurch gelangen die vorigen Gleichungen zu der sehr eleganten Gestalt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x)\sin v &= \psi'(y)\sin u,\\ \varphi'(x)\sin w &= \chi'(z)\sin u;\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

oder in Form von Proportionen:

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x):\psi'(y) &= \sin u:\sin v,\\ \varphi'(x):\chi'(z) &= \sin u:\sin w.\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Es ist leicht zu sehen, dass implicite hierin die Auflösung unseres Problemes liegt; rechnen wir nämlich zu den zwei Gleichungen in No. (8) noch die vier folgenden:

$$\left.\begin{aligned}u+v+w &= 360^0,\\ a^2 &= y^2+z^2-2yz\cos u,\\ b^2 &= x^2+z^2-2xz\cos v,\\ c^2 &= x^2+y^2-2xy\cos w;\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

so haben wir im Ganzen sechs Gleichungen zur Bestimmung der sechs Unbekannten x, y, z, u, v, w. Ein Theil dieser, wie es scheint sehr weitläufigen Elimination lässt sich ungemein leicht ausführen, wenn man berücksichtigt, dass die Proportionen in No. (9) denen sehr ähnlich sehen, welche in einem Dreiecke mit den Seiten $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$, $\chi'(z)$ und den Winkeln u, v, w statt finden würden; nur ist der Unterschied, dass in (9) die Summe $u+v+w$ nicht 180^0 beträgt, wie in einem Dreiecke der Fall sein würde, sondern 360^0. Dieser Uebelstand hebt sich aber sehr leicht, wenn man statt der Winkel u, v, w ihre Supplemente einführt, also

$$u = 180^0 - u', \quad v = 180^0 - v', \quad w = 180^0 - w'$$

setzt; es wird dann

$$u' + v' + w' = 180^0$$

und nach No. (9)

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(x):\psi'(y) &= \sin u':\sin v',\\ \varphi'(x):\chi'(z) &= \sin u':\sin w'.\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung wie folgt:

$$\xi = \varphi'(x), \quad \eta = \psi'(y), \quad \zeta = \chi'(z); \qquad (12)$$

so können wir uns ξ, η, ζ, oder diesen Grössen proportionale Ge-

Digitized by Google

rade, als Seiten eines Dreiecks, u', v', w' als die gegenüberstehenden Winkel denken und haben dann:

$$\cos u' = \frac{\eta^2 + \zeta^2 - \xi^2}{2\eta\zeta},$$

$$\cos v' = \frac{\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2}{2\xi\zeta},$$

$$\cos w' = \frac{\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2}{2\xi\eta};$$

und für $\cos u$, $\cos v$, $\cos w$ gelten die nämlichen Werthe, nur mit entgegengesetztem Zeichen. Die Gleichungen (10) gehen jetzt in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= y^2 + z^2 + \frac{yz}{\eta\zeta}(\eta^2 + \zeta^2 - \xi^2), \\ b^2 &= x^2 + z^2 + \frac{xz}{\xi\zeta}(\xi^2 + \zeta^2 - \eta^2), \\ c^2 &= x^2 + y^2 + \frac{xy}{\xi\eta}(\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2); \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

und hier giebt es blos noch drei Unbekannte, weil in ξ, η, ζ nur x, y und z vorkommen. Weiter lässt sich natürlich die Elimination nicht treiben, weil die ferneren Schritte der Rechnung durch die Natur der Funktionen ξ, η, ζ erst bestimmt werden müssen. Ein paar Beispiele für unsere allgemeinen Formeln sind die folgenden.

1) Sei $\varphi(x) = \alpha x$, $\psi(y) = \beta y$, $\chi(z) + \gamma z$; so wird

$$\varphi'(x) = \xi = \alpha,\ \psi'(y) = \eta = \beta,\ \chi'(z) = \zeta = \gamma;$$

und die Proportionen in (11) bestimmen dann unmittelbar die Winkel u', v', w'. Construirt man nämlich ein Dreieck, dessen Seiten die Grössen α, β, γ oder ihnen proportionale sind, so ist der Gegenwinkel zur Seite α gleich dem Winkel u', und ebenso sind v', w' die Gegenwinkel zu den Seiten β, γ. Beschreibt man jetzt über den Seiten a, b, c des gegebenen Dreiecks als Sehnen Kreisbögen, in welchen u', v', w' die Peripherienwinkel bilden, so giebt der gemeinschaftliche Durchschnitt der drei Kreisbögen den gesuchten Punkt O. Für $\alpha = \beta = \gamma = 1$ werden u', v', w' einander gleich, nämlich $= 120^0$, und man kommt dann auf einen sehr bekannten Fall zurück.

2) Für $\varphi(x) = x^2$, $\psi(y) = y^2$, $\chi(z) = z^2$ bestimmen die obigen Formeln den Schwerpunkt des Dreiecks; denn es wird dann

$$\xi = 2x,\ \eta = 2y,\ \zeta = 2z;$$

und aus den Gleichungen (13) erhält man durch Elimination leicht:

$$x = \tfrac{1}{3}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

$$y = \tfrac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$z = \tfrac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}.$$

Digitized by Google

Da diese Formeln mit denen zusammenfallen, welche für den Schwerpunkt des Dreiecks gelten, so folgt hieraus die Identität unseres Punktes mit jenem.

3) Setzt man $\varphi(x)=lx$, $\psi(y)=ly$, $\chi(z)=lz$; so würde

$$lx+ly+lz=l(xyz),$$

d. h. xyz zu einem Minimum zu machen sein. Es wird hier

$$\xi=\frac{1}{x},\ \eta=\frac{1}{y},\ \zeta=\frac{1}{z};$$

und die Gleichungen (13) gehen über in:

$$a^2=2(y^2+z^2)-\frac{y^2z^2}{x^2},$$

$$b^2=2(x^2+z^2)-\frac{x^2z^2}{y^2},$$

$$c^2=2(x^2+y^2)-\frac{x^2y^2}{z^2}.$$

Da hier nur die Quadrate der sechs Grössen x, y, z vorkommen, so kann man vorerst die Exponenten 2 sämmtlich streichen, wenn man am Ende der Rechnung wieder a^2, b^2, c^2, x^2, y^2, z^2 für a, b, c, x, y, z schreibt. Nach dieser Reduktion bleibt für x eine cubische Gleichung, nach deren Auflösung noch die Ausziehung einer Quadratwurzel nöthig wird. Vielleicht lässt sich das Endresultat auch durch Intersektionen von Kegelschnitten geometrisch construiren, doch hat dies der Verfasser nicht versucht.

XLVII.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Oskar Werner,
Schüler des polytechnischen Institutes zu Dresden.

(Fortsetzung von Nr. XXXIX.)

Folgendes ist zu beweisen:

Für jedes positive ganze n ist

2. $$\left\{\begin{array}{l}\frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\sec\alpha\sec(\alpha+n\beta)=\sec\alpha\sec(\alpha+\beta)+\sec(\alpha+\beta)\sec(\alpha+2\beta)+\ldots\\ \qquad+\sec[\alpha+(n-1)\beta]\sec[\alpha+n\beta],\\ \frac{\sin n\beta}{\sin\beta}\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}(\alpha+n\beta)=\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\\ \qquad+\operatorname{cosec}(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}(\alpha+2\beta)+\ldots\ldots\\ \qquad+\operatorname{cosec}[\alpha+(n-1)\beta]\operatorname{cosec}[\alpha+n\beta];\end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{l}\frac{(-1)^{n-1}\sin[\alpha+(n-1)\beta]\sin(\alpha+n\beta)+\sin(\alpha-\beta)\sin\alpha}{2\cos\beta}\\ \qquad=\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha+\beta)+\ldots.(-1)^{n-1}\sin^2[\alpha+(n-1)\beta],\\ \frac{(-1)^{n-1}\cos[\alpha+(n-1)\beta]\cos(\alpha+n\beta)+\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha}{2\cos\beta}\\ \qquad=\cos^2\alpha-\cos^2(\alpha+\beta)+\ldots.(-1)^{n-1}\cos^2[\alpha+(n-1)\beta];\end{array}\right.$$

4. $$\operatorname{cotang}\alpha-2^n\operatorname{cotang}2^n\alpha$$
$$=\operatorname{tang}\alpha+2\operatorname{tang}2\alpha+4\operatorname{tang}4\alpha+\ldots.+2^{n-1}\operatorname{tang}2^{n-1}\alpha;$$

5. $$\frac{1}{2^n}\operatorname{cotang}\frac{\alpha}{2^n}-\operatorname{cotang}\alpha$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{4}\alpha+\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{1}{8}\alpha+\ldots.+\frac{1}{2^n}\operatorname{tang}\frac{1}{2^n}\alpha;$$

6. $$\operatorname{cotang}\frac{1}{2^n}\alpha-\operatorname{cotang}\alpha$$
$$=\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\alpha+\operatorname{cosec}\frac{1}{4}\alpha+\ldots..+\operatorname{cosec}\frac{1}{2^{n-1}}\alpha.$$

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

$$\frac{\cos(a\alpha)}{r^a}+\frac{\cos(a+b)\alpha}{r^{a+b}}+\frac{\cos(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}}+\frac{\cos(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}}+\ldots\text{ in inf.}$$
$$=r^{b-a}.\frac{r^b\cos(a\alpha)-\cos(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos(b\alpha)+1},$$

$$\frac{\sin a\alpha}{r^a}+\frac{\sin(a+b)\alpha}{r^{a+b}}+\frac{\sin(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}}+\frac{\sin(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}}+\ldots.\text{ in inf.}$$
$$=r^{b-a}.\frac{r^b\sin(a\alpha)+\sin(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\beta+1},$$

wenn $r > 1$, $a > 0$, $b > 0$, α reell.

Hieraus folgt:

$$\frac{\cos\alpha}{r^a}+\frac{\cos 2\alpha}{r^{2a}}+\frac{\cos 3\alpha}{r^{3a}}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{r^a\cos\alpha-1}{r^{2a}-2r^a\cos\alpha+1},$$

$$\frac{\sin\alpha}{r^a}+\frac{\sin 2\alpha}{r^{2a}}+\frac{\sin 3\alpha}{r^{3a}}+\ldots\text{ in inf.}=\frac{r^a\sin\alpha}{r^{2a}-2r^a\cos\alpha+1},$$

unter denselben Bedingungen.

II.

$$1-\tfrac{1}{2}\frac{r^2\cos 2\varphi}{1.2}+\tfrac{1}{3}\frac{r^4\cos 4\varphi}{1.2.3.4}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{r^{2n}\cos 2n\varphi}{1.2\ldots 2n}+\ldots$$

$$=\frac{e^{-r\sin\varphi}+e^{r\sin\varphi}}{r^2}\cos(r\cos\varphi).\cos 2\varphi+\frac{e^{-r\sin\varphi}-e^{r\sin\varphi}}{r^2}\sin(r\cos\varphi).\sin 2\varphi$$

$$-\frac{2\cos 2\varphi}{r^2}+\frac{e^{-r\sin\varphi}+e^{r\sin\varphi}}{r}\sin(r\cos\varphi)\cos\varphi$$

$$+\frac{e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi}}{r}\cos(r\cos\varphi)\sin\varphi;$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{r^2\sin 2\varphi}{1.2}+\tfrac{1}{3}\frac{r^4\sin 4\varphi}{1.2.3.4}-\tfrac{1}{4}\frac{r^6\sin 6\varphi}{1.2\ldots 6}+\ldots\text{ in inf.}$$

$$=-\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{r^2}\cos(r\cos\varphi)\sin 2\varphi$$

$$+\frac{e^{-r\sin\varphi}-e^{r\sin\varphi}}{r^2}\sin(r\cos\varphi)\cos 2\varphi+\frac{2\sin 2\varphi}{r^2}$$

$$-\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{r}\sin(r\cos\varphi).\sin\varphi+\frac{e^{r\sin\varphi}-e^{-r\sin\varphi}}{r}\cos(r\cos\varphi).\cos\varphi,$$

wenn $r \overset{=}{>} 0$ und φ beliebig ist.

III.

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1^2.3}{2^2.4^2}+\frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2}+\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}+\ldots+\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r-1)^2(2r+1)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r+2)^2}$$

$$=1-\frac{1^2.3^2.5^2\ldots(2r+1)^2(2r+3)}{2^2.4^2.6^2\ldots(2r+2)^2}.$$

Digitized by Google

XLVIII.

Miscellen.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Als ein etwas frappantes Beispiel für die Lehre von den Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten benutzt man gewöhnlich die Aufgabe: zwei Zahlen zu finden, deren Summe Produkt und Quadratdifferenz gleich sind; und dieselbe ist auch in so fern instruktiv, als keine unmittelbar gegebenen Zahlen in den betreffenden Gleichungen vorkommen. Man scheint dagegen nicht bemerkt zu haben, dass die analoge Frage nach zwei Unbekannten, deren Differenz, Quotient und Quadratsumme gleich sein soll, ein nicht minder nettes Beispiel für die Gleichungen dritten Grades darbietet.

Aus

$$y-x=\frac{x}{y}=x^2+y^2$$

folgt nämlich zunächst

$$x=\frac{y^2}{y+1},$$

und für y die cubische Gleichung:

$$y^3+y^2=\tfrac{1}{2}.$$

Durch die Substitution $y=z-\frac{1}{3}$ erhält man hieraus die transformirte Gleichung

$$z^3=\tfrac{1}{3}z+\frac{23}{54},$$

auf welche sich die Cardansformel anwenden lässt; man findet nämlich

$$z=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{23+\sqrt{513}}{4}\right)}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{23-\sqrt{513}}{4}\right)},$$

oder in Zahlen:

$$z=0{,}898530\ldots.,$$

und hieraus:

$$y=0{,}565197\ldots.,$$
$$x=0{,}204094\ldots..$$

Der gemeinschaftliche Betrag von $y-x$, $\frac{x}{y}$ und x^2+y^2 endlich ist 0,36110.....

Digitized by Google

XXXIII.
Literarischer Bericht.

(In Folge der schon bei dem Literarischen Berichte Nr. XXXII. gemachten Bemerkung enthält die vorliegende Nummer eine grössere Anzahl blosser Titel und weniger ausführlichere Anzeigen. Die nächste Nummer wird wieder eine grössere Anzahl der letzteren bringen, namentlich auch von mehreren der Redaction zugesandten Werken.)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Kopernik et ses travaux, par Jean Czynski; de 19 feuilles ¼, plus un portrait. Paris. 1846. 8.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

System of Pratical Mathematics. Pt. I. containing Algebra and Geometry: being No. 16. of a New Series of School Books by the Scottisch School-Book Association. 12mo. Edinburgh. bd. 5s.

Arithmetik.

Fritsch, Ph.: die Decimal-Rechnung und ihre practische Anwendung bei Münz- Maas- und Gewichts-Rechnungen. Heidelberg. 1846. 7½ Sgr.

Herrmann, Fr. J.: kurze Anleitung zur Algebra für Gymnasien und zum Privatgebrauch. gr. 8. Darmstadt 1846. 1 Thlr.

Digitized by Google

Gentil, M. E.: Traité d'Algèbre. Première partie. Paris. 1846.

Bryce, J. Jun.: Treatise on the Elements of Algebra. 2. edition, with various additions and improvements. bound 4 s. 6 d.

Vasalli, S.: algebra ad uso delle scuole della reale militare academia. Edizione seconda. Torino. 1845. Vol. I. 8.

Cournot, A. A.: Elementarlehrbuch der Theorie der Functionen oder der Infinitesimal-Analysis. Deutsch bearbeitet von C. H. Schnuse. 2. Lfr. Darmstadt. 1846. 2 Thlr.

Anleitung zur Differential- und Integralrechnung, von Dr. Ph. Jolly, ausserordentlichem Professor der angewandten Mathematik an der Universität Heidelberg. Heidelberg. 1846. 8. 1 Thlr. 20 Sgr.

Der Herr Vf. sagt in der Vorrede: „Meine Absicht war, auf einem möglichst elementaren und doch nicht zu weitläufigen Wege zur Kenntniss der Differentialrechnung zu führen, indem ich mir vorsetzte, für Jene eine Anleitung zu schreiben, welche die Differentialrechnung ihrer Anwendung halber suchen, für die es daher erlaubt, ja sogar geboten sein wird, weitläufige Erörterungen zu vermeiden und der Einfachheit der Herleitung, selbst wenn durch dieselbe von vornherein nicht die sonst erreichbare Allgemeinheit sogleich erzielt werden sollte, ein entscheidendes Moment einzuräumen" und hat dadurch selbst der Kritik den an seine Schrift anzulegenden Maasstab an die Hand gegeben. Wir glauben nämlich, dass gewöhnliche Praktiker, die in den Fall kommen können, von der Differential- und Integralrechnung einfache Anwendungen zu machen, in dieser deutlich verfassten Schrift eine für ihre Zwecke hinreichende, ihren Fähigkeiten angemessene Belehrung suchen und finden können, und empfehlen daher dieselbe ihnen zur Beachtung aus Ueberzeugung. Dagegen dürfen wir aber auch nicht verschweigen, dass diese Schrift höheren wissenschaftlichen Ansprüchen auch nicht im Entferntesten entspricht, weil sie dem Leser nicht eine Ahnung giebt von der strengen, keinem Zweifel, keiner Ungenauigkeit Raum lassenden und in mehr als einer Beziehung wahrhaft kritischen Behandlung der Differential- und Integralrechnung und der Analysis überhaupt, zu welcher in den zwei letzten Decennien einige neuere Analytiker auf die rühmlichste Weise die Bahn gebrochen haben, die aber gewiss auch keineswegs schon als abgeschlossen betrachtet werden darf. Denn was auf S. 113. über diese neue Behandlung unter dem, wenn auch allerdings das Fundamentaltheorem ursprünglich von Ampère herrühren dürfte, doch etwas sonderbar klingenden Namen „Methode von Ampère" etwa gesagt ist, ist nicht geeignet, von dieser neuen Behandlung im Ganzen und Grossen und von den wichtigen, zum Theil höchst allgemeinen Theoremen, zu denen dieselbe bereits geführt hat, auch nur im Entferntesten einen einigermassen hinreichenden Begriff zu geben. Wollte man also in der vorliegenden Schrift ein Bild des gegenwärtigen Zustandes der höheren Analysis zu finden hoffen, so würde man sehr irren. Vielmehr finden sich dieselben höchst misslichen Anwendungen der Methode der unbestimmten Coefficienten, dieselben Vernachlässigungen der Reste der unendlichen Reihen, und an-

Digitized by Google

dere, den mit diesen neuen grossen Fortschritten der analytischen Methode gehörig vertrauten Analytikern allgemein bekannte, daher ohne unnütze Weitläufigkeit hier nicht zu wiederholende, zu Fehlern und Trugschlüssen leider nur zu häufig Veranlassung gebende Ungenauigkeiten in dieser Schrift in demselben reichlichen Maasse, wie sie sich z. B. in Lacroix's bekanntem kleineren Werke, mit dem die vorliegende Schrift überhaupt ziemlich auf gleicher Stufe steht, fast auf jeder Seite finden, wobei wir auch noch bemerken wollen, dass — nach unserer Ueberzeugung wenigstens — die auf S. 180—194 beigebrachten Sätze von der Convergenz und Divergenz der Reihen dem ganzen Geiste dieser Schrift zu wenig entsprechen und deshalb gewiss überhaupt besser weggelassen worden wären, da sie ja in der ihnen hier gegebenen Fassung überdies nicht der Differential- und Integralrechnung, sondern recht eigentlich der sogenannten Analysis des Endlichen oder der algebraischen Analysis angehören.

Einen Lehrer, der durch die bloss praktische Tendenz und geringe Fassungskraft seiner Schüler genöthigt ist, die höhere Analysis jetzt noch in ähnlicher Weise wie in dem vorliegenden Buche vorzutragen, beneiden wir wahrlich nicht! Denn wir wenigstens würden fast in jeder Stunde an unsere Brust zu schlagen und uns zu fragen genöthigt seyn, in wie weit denn die in scheinbar allgemeiner Gültigkeit den Schülern vorgelegten Resultate wirklich richtig seyen, und ob wir dieselben nicht vielleicht in einer gewissen Weise am Gängelbande der höchst unwissenschaftlichen Methode der unbestimmten Coefficienten und der sogenannten Entwickelung der Functionen in Reihen, wie sie im vorliegenden Buche auf S. 110. ganz nach Lagrange in derselben unwissenschaftlichen und gegenwärtig als völlig antiquirt zu betrachtenden Weise wiedergegeben worden ist, nur an der Nase herumführten; denn, wenn letzterer Ausdruck auch etwas trivial und etwas stark ist, so ist er doch nach unserer vollkommensten Ueberzeugung für einen Unterricht in der Differential- und Integralrechnung und der mathematischen Analysis überhaupt nach der älteren Weise der allein bezeichnende. Strenge Richtigkeit der gewonnenen Resultate und Einschränkung derselben in die gehörigen Gränzen, über welche hinaus ihre Anwendung unsicher ist und zu Fehlschlüssen führt, ist für uns erstes und wichtigstes Haupterforderniss jeder Darstellung einer mathematischen Wissenschaft, und gegen sie müssen für's Erste alle übrigen Rücksichten auf Eleganz, sogenannte heuristische oder wohl gar philosophische Entwickelung oder wie dergleichen zu benennen sonst noch zuweilen beliebt zu werden pflegt, in den Hintergrund treten. Aber freilich müssen wir leider immer mehr und mehr die Ueberzeugung gewinnen, dass die neuere kritische Methode bei dem Unterrichte in der Analysis bis jetzt nur auf sehr wenigen Lehranstalten, ja selbst auf nur sehr wenigen Universitäten, sich Bahn gebrochen hat. So betrübend dies ist, so wahr ist es doch. Der Stellung jeder Universität wäre es aber doch allein würdig und angemessen, wenigstens einen Lehrer zu gewinnen, welcher die Analysis nach den strengeren neueren Methoden, als Vertreter derselben, zu lehren im Stande und befähigt wäre, eine Befähigung, die freilich jetzt noch nicht häufig angetroffen wird. Dass übrigens auch selbst bei dem Unterrichte von Praktikern sich mit gehöriger

Digitized by Google

Auswahl von den neueren Methoden ein verständiger Gebrauch machen lässt: dafür liefert das in Nr. XX. S. 302. des Literarischen Berichts angezeigte, für den Unterricht in der Analysis auf dem polytechnischen Institute in Wien bestimmte Werk von Salomon einen recht erfreulichen Beweis, wie a. a. O. mit Mehrerem hervorgehoben worden ist, auf das wir daher namentlich Praktiker hier gelegentlich wiederholt aufmerksam machen.

So lebhaft sich auch diese und ähnliche Betrachtungen uns bei der Ansicht des vorliegenden Buchs wieder von Neuem aufgedrängt haben, so wiederholen wir doch unser im Eingange ausgesprochenes Urtheil hier recht gern noch einmal, dass der Herr Vf. ein für die gewöhnlichen, keine höheren Ansprüche machenden Praktiker in gewisser Rücksicht nützliches Buch geliefert hat; und auf eine andere Anerkennung macht ja derselbe laut der Vorrede in sehr lobenswerther Bescheidenheit selbst nicht Anspruch. Möge daher das auch äusserlich recht gut ausgestattete Buch in seinem Kreise den von dem Herrn Verf. beabsichtigten Nutzen im reichlichsten Maasse stiften, was wir demselben von Herzen wünschen. Denn es ist immer schon ein Verdienst, wenn durch eine deutliche und einfache Darstellung die höhere Analysis in weiteren Kreisen verbreitet und derselben neue Jünger gewonnen werden, namentlich aber auch Praktiker zu deren möglichst häufiger Anwendung, deren dieselbe ja so sehr fähig ist, angeregt und angeleitet werden, wozu dieses Buch mitzuwirken gewiss recht wohl geeignet ist. Unsere obigen gelegentlichen Auslassungen betreffen nur die leider noch zu häufige Darstellung der Lehren der Differentialrechnung im Allgemeinen, die immermehr in den Hintergrund zu drängen nach unserer Ueberzeugung sehr Noth thut, wie namentlich auch in diesem Archive von mehreren Seiten her schon oft und gewiss auf sehr eindringliche Weise hervorgehoben und deutlich nachgewiesen worden ist. Denn dass die neueren Methoden, gegen welche die ältere Darstellungsweise, was nach unserer Ueberzeugung gewiss nicht zu viel gesagt ist, in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge und Evidenz in ein wahres Nichts verschwindet, sich immer mehr Bahn brechen und dass wenigstens auf jeder Universität ein dieselbe in ihrem unbestreitbaren Rechte vertretender Lehrer sich finde, ist jedenfalls im höchsten Grade zu wünschen und der hohen Würde dieser Lehranstalten allein angemessen.

Cauchy, A. L.: Vorlesungen über die Differential-Rechnung. Aus dem Franz. übersetzt von Schnuse. Zusätze. Braunschweig. 1846. 8. $1/4$ Thlr.

Richter's Differential- and Integral-Calculus. By J. Anthony Spencer, B. A., Assistant Matematical Master in University College School. 12mo. with Diagrams.

Tables de logarithmes par Jérôme de Lalande, étendues à sept décimales par F. C. M. Marie, précédées d'une instruction etc. par le baron Reynaud. Edition stéréotypée. In 16. de 7 feuilles $3/4$. Paris. 1846.

Bildt, G.: logarithmiska tabeller for numeral och trigonometriska functioner. 12. Stockholm. 1846. 36 sk.

Digitized by Google

Geometrie.

Milter, J. C.: Anfangsgründe der Elementar-Geometrie. Celle. 1846. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Baltzer, C. H.: Anfangsgründe der Geometrie. Leipzig. 1847. 8. $\frac{5}{12}$ Thlr.

Bender, F.: Lehrbuch der Elementar-Geometrie zum Gebrauch für Gymnasien. 2. Heft. Stereometrie. Darmstadt. 1846. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Anfangsgründe der Geometrie zum Leitfaden für Lehrer der Gymnasien, wie auch zum Selbstunterricht, verfasst von Professor S. F. **Lubbe**. Mit 12 Figurentafeln. Berlin. 1846. 8. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Gouré, M. E.: élémens de géométrie et de trigonométrie à l'usage des canditats aux écoles royales Polytechnique, militaire, navale et forestière. In 8. de 36 feuilles $\frac{3}{4}$. Paris. 1846.

Géométrie descriptive par G. **Monge** suivie d'une Théorie des ombres et de la perspective, extraite des papiers de l'auteur par M. **Brisson**. Septième edition. Paris. 1846. 4.

Whewell, conic sections: their principal properties proved geometrically. Cambridge. 1846. 1 s. 6 d.

Cauchy: Vorlesungen üb. die Anwendung der Infinitesimal-Rechnung auf die Geometrie. Deutsch bearb. von Schnuse. Zusätze. Braunschweig. 1846. 8. $\frac{5}{12}$ Thlr.

Praktische Geometrie.

Tonneau, F.: Leçons élémentaires de géométrie pratique appliquées au dessin linéaire. In 12. de 4 feuilles, plus 8 pl. A Paris. 1846.

Hennon, V.: Géodésie des forêts. Ouvrage tout spécial. In 8. de 11 feuilles, plus 8 pl. Nevers. 1846.

Pease, W.: course of practical geometry, designed for the higher class of mechanics and for math. schools. 8. Edinburg. 1846. 1 s.

Mechanik.

Coriolis, G.: Lehrbuch der Mechanik fester Körper und der Berechnung des Effectes der Maschinen. Deutsch herausgeg. von Schnuse. gr. 8. Braunschweig. 1846. $1\frac{1}{6}$ Thlr.

An Elementary treatise on Hydrostatics and Hydrodynamics. By **Andrew Searle Hart**, L. L. D., Fellow of Trinity College. Dublin. 1846. 8. 6 s. 6d.

Digitized by Google

By the same Author:
An Elementary treatise on Mechanics. 8. 6 s. 6 d.

Optik.

Wiegmann, R.: Grundzüge der Lehre von der Perspective. Mit 19 Steindrucktafeln. Düsseldorf. 1846. 8. 1⅓ Thlr.

Astronomie.

Mädler, Dr. J. H.: die Centralsonne. 2te umgearb. und erweit. Aufl. gr. 8. Mitau. 1847. ¾ Thlr.

Bartholomäi's astronomische Geographie in Fragen und Aufgaben. Jena. 1846. 8. ¼ Thlr.

Frost: two systems of astronomy, first. the Newtonian system; second, the system in accordance with the holy scriptures. 4. 1846. 16 s.

Nordmark, J.: Globbåra och Tidräkning somt Första Grunderna i Atronomien. Gefle. 1845. 32 sk.

Argelander, Fr. W. A.: astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte zu Bonn. 1. gr. 4. Bonn. 1846. geh. 5 Thlr.

The Nautical Almanac and Astronomical Ephemeris for the Year 1850. Published by Order of the Lords Commissioners of the Admiralty. Royal 8. pp. 634. sewed. 5 s.

Colman, G.: lunar and nautical tables. 8. 12 s.

Examen critique de Cosmos de Humboldt, avec l'exposé d'un nouveau système de l'univers basé sur une loi unique, et donnant l'explication physique et rationelle des principes newtoniens par A. J. Rey de Morande. Paris. 1846. 8.

Physik.

Hessler, J. F.: Handbuch der Physik. 1s Hft. Wien. 1846. 8. 1 Thlr.

Petit traité élémentaire des sciences physiques. Première partie. Introduction et astronomie. In 18. de 4 feuilles. Lille. 1846.

Meissas, Alexandre: notions élémentaires de Physique. 3ème édition. In 18. de 9 feuilles ⅓. Paris. 1846.

Digitized by Google

Pinaud, Aug.: Programme d'un cours élémentaire de physique. Quatrième édition. In 8. de 32 feuilles plus 8 pl. Toulouse 1846.

Lezioni elementari di fisica matematica, date nell' università di Corfù nell' anno scolastico $18^{40}/_{41}$ da **Ottaviano Fabrizio Mosotti**, professore di meccanica celeste e fisica matematica nell' i. r. università di Pisa. Firenze. 1845. Tomo II. (ultimo).

Hellicher, R.: Altes und Neues aus dem Gebiete der Naturkunde, besonders aber über Licht, Electricität u. Magnetismus. gr. 8. Freiberg. 1846. $1\frac{1}{2}$ Ngr.

Neumann, F. E.: die mathematischen Gesetze der inducirten elektrischen Ströme. Berlin. 1846. 4. 1 Thlr.

Pazienti, Antonio: dell' Azione chimica della luce, del calorico, dell' elettrico e del magnetico sopra i corpi inorganici; dissertazione per ottenere la laurea in chimica. Padova. 1846.

Ward's Five Hundred Illustrations to Chemical, Philosophical, Pneumatic and Electrical Apparatus, with the Prices affixed. On a sheet. 2 d.

Vermischte Schriften.

C. G. J. Jacobi: Mathematische Werke. Band I. Berlin. 1846. 4. 4 Thlr.

Dieser erste Band enthält die folgenden, sämmtlich aus dem **Crelle**'schen Journal abgedruckten Abhandlungen.

1. Ueber die Entwicklung des Ausdrucks

$$[aa - 2aa(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos(\vartheta-\vartheta')) + a'a']^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Ueber die zur Berechnung der elliptischen Functionen zweckmässigsten Formeln.

3. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps.

4. Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.

5. Ueber ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen.

6. Sulla condizione di uguaglianza di due radici dell' equazione cubica, dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie del second' ordine.

7. Neues Theorem der analytischen Mechanik.

8. Ueber die Additionstheoreme der **Abel**'schen Integrale zweiter und dritter Gattung.

9. Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe durch eine gebrochene rationale Function.

Digitized by Google

10. Ueber die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie.

11. Note sur les fonctions Abéliennes, lue le 29. Mai 1843 à l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg.

12. Ueber einige die elliptischen Functionen betreffenden Formeln.

13. Ueber den Werth, welchen das bestimmte Integral $\int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{1 - A \cos\varphi - B \sin\varphi}$ für imaginäre Werthe von A und B annimmt.

14. Beweis des Satzes, dass jede nicht fünfeckige Zahl eben so oft in eine gerade als ungerade Anzahl verschiedener Zahlen zerlegt werden kann.

15. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite.

16. Ueber die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abel'schen und höhern Transcendenten.

17. Ueber einige der Binomialreihe analoge Reihen.

18. Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichung.

19. Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi.

Wir sehen dem sehr zu wünschenden recht baldigen Erscheinen der Fortsetzung dieser Sammlung, über deren grosse Wichtigkeit unter den Mathematikern nur eine Stimme sein kann, mit Verlangen entgegen.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Etited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College. Cambridge. (S. Nro. XXXI. S. 467.)

Nos. V. et VI. On Principal Axes of a Body, their Moments of Inertia, and Distribution in Space. By R. Townsend. — Miscellaneous Notes on Descriptive Geometry. No. I. By T. S. Davies. — Analytical Investigations of two of Dr. Stewart's General Theorems. By T. S. Davies. — On Arbogast's Formulae of Expansion. By A. De Morgan. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. — On the Rotation of a Solid Body round a Fixed Point. Continued. By A. Cayley. — On the Diametral Planes of a Surface of the Second Order. By A. Cayley. — Sur une propriété de la couche electrique en equilibre à la surface d'un corps conducteur. Par M. J. Liouville. — Note on the preceding Article. By W. Thomson. — On the Action of a Force whose Direction Rotates in a Plane. By A. Bell. — Mathematical Notes (Note III. On the Equation of Payments.). — (No. I. of Vol. II. will be published on the 1st of January 1847.)

Digitized by Google

XXXIV.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichts-Methode.

In dem in Mager's Pädagogischer Revue. October. 1846. S. 185. ff. abgedruckten Aufsatze des Herrn Professors Dr. Mensing in Erfurt: „Die Gymnasien, durch ihre Grundsätze im Kampfe mit den Forderungen der Gegenwart" finden sich auch mehrere sehr gute Bemerkungen über den mathematischen und physikalischen Unterricht, weshalb wir diesen in mehrfacher Beziehung interessanten Aufsatz den Lesern des Archivs zur Beachtung empfehlen. Besonders unterschreiben wir auch völlig das, was auf S. 194. und S. 195. über den geometrischen Elementarunterricht gesagt ist, und theilen ganz die Ansichten des Herrn Vfs. über den physikalischen Unterricht. Möge die genannte, einem Bedürfnisse der Zeit entgegenkommende Zeitschrift fortfahren, solche mit einer ansprechenden Darstellung wirkliche Gediegenheit verbindende Aufsätze über den mathematischen und physikalischen Unterricht zu veröffentlichen; dann wird sie ihren Zweck in Bezug auf diese Unterrichtszweige gewiss sicher erreichen.

Geschichte der Mathematik und Physik.

In dem Journal des savants. Juin. 1846. finden sich einige Auszüge aus den Eloges von Fontenelle auf verstorbene Akademiker, denen wir die folgenden kurzen Charakterschilderungen einiger Mathematiker entlehnen, die einen Jeden, der sie liest, mit Freude erfüllen müssen.

Von dem grossen Astronomen Cassini sagt Fontenelle: „Dont l'esprit était égal, tranquille, exempt de ces vaines inquiétudes et de ces agitations insensées qui sont les plus douloureuses et les plus incurables de toutes les maladies. Un grand fonds

de religion, et, ce qui est encore plus, la pratique de la religion, aidaient beaucoup à ce calme perpétuel. Les cieux, qui racontent la gloire du Créateur, n'en avaient jamais plus parlé à personne qu'à lui, et n'avaient jamais mieux persuadé."

Von **La Hire** sagt Fontenelle: „Toutes ses journées étaient, d'un bout à l'autre, occupées par l'étude, et ses nuits très-souvent interrompues par les observations astronomiques. Nul divertissement que celui de changer le travail; encore est-ce un fait que je hasarde sans en être bien assuré. Nul autre exercice corporel que d'aller à l'Observatoire, à l'Académie des sciences, à celle d'architecture, au Collége royal dont il était aussi professeur. Peu de gens peuvent comprendre la félicité d'un solitaire, qui l'est par un choix tous les jours renouvelé."

Ueber **Varignon** finden sich folgende Bemerkungen: „Son caractère était aussi simple que sa supériorite d'esprit pouvait le demander. J'ai déja donné cette même louange à tant de personnes de cette Académie, qu'on peut croire que le mérite en appartient plutôt à nos sciences qu'à nos savants *). Je n'ai jamais vu personne qui eut plus de conscience, je veux dire qui fut plus appliqué à satisfaire exactement au sentiment intérieur de ses devoirs, et qui se contentât moins d'avoir satisfait aux apparences."

Von **Reineau**: „Il se tenait à l'écart de toute affaire, encore plus de toute intrigue, et il comptait pour beaucoup cet avantage, si peu recherché, de n'être de rien."

Von **Tschirnhausen**: „La vraie philosophie avait pénétré jusqu'à son coeur, et y avait établi cette délicieuse tranquillité, qui est le plus grand et le moins recherché de tous les biens."

Von **Rolle**: „Vers 1682 un jeune géomètre, très inconnu, résout d'une manière heureuse un problème qui venait d'être proposé. Aussitot M. Colbert, qui avait des espions pour découvrir le mérite caché ou naissant, déterra M. Rolle dans l'extrême obscurité où il vivait, et lui donna une gratification qui devint ensuite une pension fixe."

Der berühmte Hydrauliker Ritter **Giuseppe Venturoli** ist im October 1846 zu Bologna gestorben. Er war der Verfasser der **Ricerche sulle resistenze che ritardano le acque correnti ed in particolare sulla resistenza d'attrito. Modena. 1807.** und der **Ricerche geometriche ed idrometriche fatte nella scuola degli ingegneri pontificii di acque e strade l'anno 1821. Milano. 1822.**, so wie vieler Abhandlungen in den Commentarien der Akademie der Wissenschaften des Instituts zu Bologna, deren Mitglied er war.

Arithmetik.

Handbuch der Differenzial- und Integralrechnung von Dr. Oskar Schlömilch, ausserordentlichem Profes-

*) Gewiss sehr richtig, aber auch sehr erfreulich und erhebend.

Digitized by Google

sor an der Universität zu Jena. Erster Theil. Differenzialrechnung. Mit zwei Kupfertafeln. Greifswald. 1847. 8. 2 Thlr.

Das Handbuch der algebraischen Analysis desselben Herrn Vfs., welches dem bis jetzt in seinem ersten Theile vorliegenden Handbuche der sogenannten höhern Analysis gewissermassen als Vorläufer gedient hat, ist im Literar. Ber. Nr. XXV. S. 366. mit gebührendem Lobe angezeigt worden. Nicht weniger Lob gebührt in allen Beziehungen dem vorliegenden Handbuche der Differenzialrechnung. Dasselbe ist ganz in dem neueren strengen, die ältere Behandlungsweise ganz in den Hintergrund drängenden Geiste bearbeitet, und gewährt auf eine sehr erfreuliche Weise die Ueberzeugung, dass der Herr Vf., was bekanntlich nicht ganz leicht ist und — wie man sich leider aus manchen der neuesten Erscheinungen auf dem Gebiete der mathematischen Literatur immer mehr überzeugen muss — noch nicht gar zu häufig angetroffen wird, vollständig in diesen neueren Geist eingedrungen ist, und zugleich die Fähigkeit besitzt, diese in mehrfacher Beziehung schwierigen Dinge auf eine ansprechende, namentlich auch Anfängern deutliche und dieselben in diesen neueren Geist mit möglichster Leichtigkeit einführende Weise darzustellen. Ausserdem ist die Vollständigkeit hervorzuheben, welche dem Herrn Vf. auf dem verhältnissmässig nur kleinen Raume von zwei und zwanzig Bogen zu erreichen gelungen ist, da man gewiss wenig wirklich Bedeutendes in diesem Werke vergeblich suchen dürfte. Zugleich hat derselbe sich dadurch jedenfalls ein besonderes Verdienst erworben, dass er die noch in keinem vorhandenen deutschen oder französischen *) wenigstens in dieser Vollständigkeit vorkommenden neuesten Untersuchungen Cauchy's über die Entwickelung der Functionen in Reihen und die Lehre von den sogenannten Mittelgränzen der Functionen, welche wir unbedenklich zu den wichtigsten und schönsten neuern Eroberungen auf dem Gebiete der Analysis rechnen (m. vergl. auch die Abhandlung im Archiv. Thl. I. Nr. XLVIII. S. 364.), nicht bloss in sein Werk vollständig aufgenommen, sondern auch, was bisher noch nicht geschehen ist und was wir für ganz besonders verdienstlich halten, durch eine nicht geringe Anzahl von zweckmässigen Beispielen erläutert, in ihr gehöriges Licht gesetzt, und dadurch namentlich Anfängern erst recht zugänglich gemacht hat. Eben so muss auch die strenge Behandlung des Lagrange'schen Umkehrungs- oder Reversionsproblems im neunten Kapitel, die sich ebenfalls in dieser neuen strengen Behandlungsweise wohl noch in keinem deutschen Lehrbuche findet, der Beachtung der Leser ganz besonders empfohlen und als ein besonderes Verdienst des Herrn Vfs. hervorgehoben werden. Die wichtigsten Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Geometrie fehlen in diesem Werke gleichfalls nicht, und ausserdem versteht es sich bei einem Verfasser, der sich schon durch eine nicht geringe Anzahl selbstständiger Arbeiten auf die vortheilhafteste Weise bekannt gemacht hat, wohl von selbst, dass eigenthümliche Darstellungen nirgends fehlen, in welcher Beziehung wir vorzüglich die auch aus diesem Archive schon grösstentheils

*) Selbst nicht bei Moigno.

Digitized by Google

bekannten Arbeiten des Herrn Vfs. über höhere Differenzialquotienten, die sich den Beifall der Kenner in Deutschland und im Auslande so sehr erworben haben, hervorheben müssen, da diese auch in diesem Werke sehr vollständig und theilweise noch in vervollkommneter Gestalt wiedergegeben worden sind. Leider müssen wir uns hier mit den obigen allgemeinen Andeutungen begnügen, hoffen aber, dass dieselben hinreichend sein werden, die Leser des Archivs auf ein Werk aufmerksam zu machen, aus welchem sie sich auf die leichteste und bequemste Weise ein Bild von der die ältere Analysis in Rücksicht auf wahre mathematische Strenge und Evidenz so sehr überragenden neueren Behandlungsweise dieser Wissenschaft verschaffen können, und wünschen sehr, dass auch dieses Werk zur immer grössern Verbreitung der neueren strengeren Methoden beitragen und es dem Herrn Verfasser, wie bei dem aus allen seinen schriftstellerischen Arbeiten hervorleuchtenden Talent desselben für das Lehrwesen nicht bezweifelt werden kann, gelingen möge, auch in seinem Lehrkreise der neueren Analysis immer mehr Jünger zu gewinnen, ein Wunsch, den wir hier um so weniger auszusprechen unterlassen können, weil wir vor Kurzem bei einer andern Gelegenheit (Literar. Ber. Nr. XXXIII. S. 488.) darauf hinweisen zu müssen glaubten, dass es namentlich jeder Universität anständig sei, wenigstens einen Lehrer zur gehörigen, bei dem jetzigen Zustande unserer Wissenschaft eine Abweisung nicht mehr zulassenden, Vertretung der neueren strengeren Richtung in der Analysis zu gewinnen, so wie einen solchen in dem Herrn Vf. des vorliegenden Lehrbuchs die Universität, welcher derselbe seine Kräfte widmet, besitzt. — Dem Erscheinen des zweiten, die Integralrechnung enthaltenden Theils, in welchem der Herr Vf. gewiss auch der Theorie der bestimmten Integrale seine besondere Aufmerksamkeit zu widmen nicht unterlassen wird, sehen wir mit Verlangen entgegen, und empfehlen das vorliegende Werk nochmals der besonderen Beachtung der Leser.

Geometrie.

Lehrbuch der niedern Geometrie von Dr. ph. Friedrich Eduard Thieme, Lehrer der Mathematik an dem Gymnasium und der Gewerbeschule zu Plauen. Erster Theil. Planimetrie nebst zahlreichen Uebungsaufgaben und 10 Figurentafeln. Plauen. 1847. 8. ⅔ Thlr.

Das vorliegende Schulbuch gehört zu den verdienstlichen Lehrbüchern, welche mit einer strengen Behandlungsweise der Geometrie in einem ältern (aber nicht veralteten und nie veraltenden) Geiste den neuern Entdeckungen auf dem Gebiete dieser Wissenschaft gebührende Beachtung widmen und dieselben auf eine verständige Weise in den Schulunterricht aufzunehmen und mit richtigem pädagogischen Takte auf eine für denselben angemessene Weise zu verarbeiten suchen. Da es nun auch eine grosse Anzahl zweckmässiger Uebungsaufgaben enthält, und sein äusserer

Umfang und sein Preis gering sind, so verdient es gewiss, von Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten nicht ganz unbeachtet gelassen zu werden.

Programm, womit zu der öffentlichen Prüfung der Schüler der Petrischule, welche Mittwoch den 7. October 1846 von 8¼ Uhr Vormittags und 2¼ Uhr Nachmittags an u. s. w. stattfinden wird, ehrerbietigst einladet Doctor F. Strehlke, Direktor. Inhalt: 1. Mathematische Abhandlung des Oberlehrers Tröger. 2. Schulnachrichten. Danzig. 4.

Der Herr Vf. der den Schulnachrichten vorausgeschickten mathematischen Abhandlung spricht sich über dieselbe auf folgende Art aus: „Die Lehrbücher der Stereometrie enthalten für die Berechnung des abgekürzten Kegels in der Regel nur die Formeln, nach denen aus den Radien der beiden parallelen Flächen, der Höhe oder Seitenlinie — der kubische Inhalt und die Seitenfläche gefunden werden. Den Gegenstand vollständig beim Unterricht zu behandeln und zu zeigen, wie aus drei dieser Stücke die übrigen berechnet werden: erlaubt dem Lehrer die beschränkte Stundenzahl für einen Cursus der Stereometrie nicht, indem ähnlichen Gegenständen dieselbe Erweiterung zu Theil werden müsste. Der genannte aber ist für Schüler von besonderem Interesse, weil er die trigonometrischen Functionen in mannigfache Anwendung bringt, und auch zur Auflösung höherer Gleichungen führt, wozu die Geometrie gewöhnlich keine Veranlassung giebt. Daher dürfte diese Berechnung sich wohl für ein Schulprogramm eignen, dessen Zweck es hauptsächlich ist, die Schüler anzuregen, einzelne Lehrgegenstände weiter zu verfolgen, und selbstständig Arbeiten zu unternehmen.“

Indem wir hierin dem Herrn Vf. völlig beistimmen, empfehlen wir diese fleissig gearbeitete Abhandlung den Lehrern an höhern Unterrichtsanstalten als eine Sammlung stereometrischer Uebungsaufgaben, die zugleich zweckmässige Uebungen in der Auflösung der Gleichungen bis zum vierten und zu höheren Graden darbieten, recht sehr, und bemerken zugleich, dass der Herr Vf. seine vollständige Bekanntschaft mit dem letztern wichtigen Gegenstande dadurch deutlich an den Tag gelegt hat, dass er die sich ihm ergebenden Gleichungen immer nach mehreren, namentlich in neuerer Zeit an verschiedenen Orten mitgetheilten Methoden behandelt, und dazu zugleich zu der wünschenswerthen Bekanntwerdung dieser neueren Methoden in einem grössern Kreise beiträgt. Auch künftige Verfasser von Sammlungen mathematischer Uebungsaufgaben werden in diesem Schriftchen manches ihrem Zwecke Förderliche finden, und sind daher ebenfalls auf dasselbe aufmerksam zu machen.

Die auf diese Abhandlung folgenden Schulnachrichten des Herrn Directors Strehlke nehmen das Interesse des Lesers mehrfach, vorzüglich aber durch eine darin gemachte Mittheilung in Anspruch, die auch hier hervorgehoben und in einem weiteren Kreise verbreitet zu werden verdient. Ein westpreussischer Edelmann, Herr Baron von Paleske auf Spengawsken bei Danzig, der schon seit sechs Jahren ein ausgezeichnetes englisches Mikroskop und Fernrohr und mehrere kräftige Magnetstäbe der Petrischule zur freien Benutzung überliess, hat dem Director die-

Digitized by Google

ser Lehranstalt die beträchtliche Summe von 300 Thalern zur Verfügung gestellt, um dafür ganz nach eigener Auswahl und eigenem Ermessen physikalische Instrumente für die Petrischule anzukaufen und deren Apparat dadurch zu vervollständigen. Mehr über eine solche Handlung hier zu sagen, ist unnütz; denn sie spricht für sich selbst! Zur weitern Bekanntwerdung derselben beizutragen, schien aber auch hier um so mehr Pflicht zu sein, je seltener dergleichen Fälle in unseren Tagen vorkommen. Wer an dem Gedeihen des Schulwesens lebhaftes Interesse nimmt, muss sich durch solche edle Handlungen in einer freien unabhängigen Stellung sich befindender Männer desto mehr erhoben und angesprochen fühlen, je mehr man sieht, wie stiefmütterlich zuweilen die Schulen gerade von denen behandelt werden, die am meisten für ihr Emporkommen sorgen sollten, wenn auch allerdings, namentlich in neuerer Zeit, ein besserer Sinn in dieser Beziehung schon erwacht ist und gewiss immer mehr erwachen wird; und möge dieser Sinn sich neben den Gymnasien auch namentlich den, mehr eine realistische Richtung verfolgenden Lehranstalten, die der Aufhülfe noch sehr bedürfen, zuwenden!

Vorschule der darstellenden Geometrie. Von Dr. A. L. Busch, Observator an der Königl. Universitäts-Sternwarte und Lehrer an der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Königsberg. Mit einem Vorwort von C. G. J. Jacobi, ordentl. Professor und Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften. Berlin. G. Reimer. 1846. $\frac{5}{6}$ Thlr.

Unter den Hindernissen, welche sich einem erfolgreichen Unterrichte in der Geometrie entgegenstellen, tritt ganz besonders die häufige Unfähigkeit der Schüler, den Zirkel und das Lineal zu brauchen, hervor. Wenn die Figuren ganz einfach sind, so zeigt sich dieser Mangel nicht auffallend, allein bei einigermassen zusammengesetzten Gebilden ist er oft die Ursache des Zurückbleibens selbst fähiger Köpfe. Daher kann denn auch nichts wichtiger sein, als dass der Schüler schon frühzeitig gewöhnt werde, mit Zirkel und Lineal umzugehen. Im Danziger Gymnasium ist seit zehn Jahren diesem Unterrichte in Ober-Tertia von den vier mathematischen Stunden eine gewidmet worden, und der Erfolg hat gezeigt, dass diese Anleitung zum Construiren über eine Menge von Schwierigkeiten beim wissenschaftlichen Unterrichte in der Geometrie und Stereometrie hinweghilft. Den Anfang macht die Construction einfacher Aufgaben, deren Lösung den Schülern bereits durch frühern Unterricht bekannt ist, und die Zeichnung solcher Figuren, an welchen sie die Wahrheit früher bewiesener Sätze durch Erfahrung bestätigt sehen. So werden z. B. die Auflösungen der Pothenotschen Aufgabe und die merkwürdigen Punkte im Dreiecke, nach der in der Stunde gegebenen Anleitung zu Hause gezeichnet, wie denn überhaupt die während der Stunde gezeichneten Figuren stets zu Hause nochmals sauber in grossem Maassstabe ausgeführt werden. Dann folgen die Aufgaben von den Berührungen. Die Construction derselben wird für die verschiedenen Fälle vollständig ausgeführt, und diese Zeichnungen machen dann später ein leichtes Verständniss der Beweise möglich, wenn dieser Gegenstand in der Geometrie behandelt wird. Die Kegel-

Digitized by Google

schnitte werden ebenfalls construirt u. s. w. Dann folgt das Zeichnen der Netze der einfachen geometrischen Körper, welche von den Schülern zu Hause aus Pappe modellirt werden, den Beschluss des einjährigen Cursus machen die Anfangsgründe der Projectionslehre. Auf diese Weise wird der Unterricht in der neuern Geometrie in den beiden obern Klassen sehr erleichtert, auch der in der Stereometrie verliert einen grossen Theil seiner Schwierigkeit, indem die Schüler bereits gewohnt sind, sich unter einer Zeichnung ein körperliches Gebilde vorzustellen. Der Unterricht in der Stereometrie kann allerdings durch Modelle erläutert werden, indessen scheint es, dass man damit nicht zu freigebig sein dürfe, denn einmal können sie selten in wünschenswerther Allgemeinheit ausgeführt werden, dann aber verwöhnen sie auch zu sehr die Phantasie des Schülers, der sich später von den verwickelten räumlichen Gebilden, für welche sich Modelle nicht leicht ausführen lassen, keine Vorstellung machen kann. Die Stereometrie setzt das Verständniss von Zeichnungen körperlicher Gebilde voraus, während umgekehrt die Projectionslehre sich wieder auf die Stereometrie gründet. Man befindet sich also hier, strenge genommen, in der Verlegenheit, dass man von dem vorzutragenden Gegenstande wenigstens einen Theil als bereits bekannt voraussetzen muss, weshalb ein approximatives Verfahren, wie das oben angedeutete, nicht unpassend erscheint. Der Unterricht in der Geometrie kann bekanntlich nur durch Aufgaben, welche dem eigenen Nachdenken des Schülers dargeboten werden, Leben erhalten. Die Erfahrung zeigt, dass auch hier die Fertigkeit im Gebrauche des Zirkels und Lineals sehr wichtig ist. Oft glaubt der Schüler eine Auflösung gefunden zu haben, — wenn er sie nun gehörig construirt, so sieht er bald, ob sie stimmt oder nicht. Im letzten Falle wird er veranlasst, auf eine andere Auflösung zu sinnen, im ersten die Richtigkeit nachzuweisen; in beiden Fällen drängen sich ihm nützliche Erfahrungen auf, eine ungenaue Zeichnung kann eine richtige Construction als falsch, der Zufall eine falsche als richtig erscheinen lassen, — der schlummernde Verstand wird geweckt. Wenn hiernach der Unterricht im Zeichnen als nothwendige Propädeutik für den wissenschaftlichen Theil der Geometrie und Stereometrie erscheint, so können wir doch nicht unterlassen, auf die Uebelstände aufmerksam zu machen, welche auch d i e s e nützliche Sache mit sich führen kann. Wer den jugendlichen Geist der Schüler eines Gymnasiums kennt, weiss auch, wie leicht das weniger Bedeutende mit dem Wesentlichen, der Zweck mit dem Mittel verwechselt wird. So kommt es denn wohl vor, dass gerade die Schüler, welche im Zeichnen eine besondere Handgeschicklichkeit besitzen, sich bald auf diese so viel zu Gute thun, dass sie die saubere Ausführung für die Hauptsache ansehen, und der wissenschaftlichen Auffassung des Gegenstandes abhold werden, so dass sie Beweise für überflüssig ansehen, wenn sie mit Zirkel und Lineal die Richtigkeit der Construction erkannt haben. Das Verderbliche einer solchen Ansicht liegt am Tage und der Lehrer wird sich beeilen müssen, dieselbe zu bekämpfen. Wenn ferner der Gebrauch des Zirkels und Lineals nur auf eine der mittleren Klassen beschränkt und in den obern nicht fortgesetzt wird, so ist er nur wenig nützlich. Nur zu oft glauben die Schüler einer obern Klasse, dass es für sie nicht mehr ehrenvoll sei. das zu

Digitized by Google

treiben, was in der niedern von ihnen gefordert wurde, wie z. B. das praktische Rechnen wohl bisweilen gänzlich von ihnen vernachlässigt wird, weil sie bereits in Quinta damit beschäftigt wurden. Solche verkehrte Ansichten haben ihren tiefen Grund, und müssen beim mathematischen Unterrichte, wenn derselbe erfolgreich wirken soll, mit der Wurzel vertilgt werden.

Wir haben hier den Nutzen des Unterrichts im Zeichnen für Gymnasien und ähnliche Anstalten anzudeuten versucht; dass er für technische Anstalten von der höchsten Wichtigkeit ist, versteht sich von selbst. Allein wir glauben, dass auch hier ein systematischer Unterricht, der sich, von den ersten Anfangsgründen des linearischen Zeichnens allmählig fortschreitend zur Projectionslehre Bahn bricht, viel leichter zum Ziele führt, als ein solcher, der mit dem Zeichnen praktischer Gegenstände sogleich seinen Anfang nimmt. In der Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Danzig wird seit 12 Jahren der Unterricht im Zeichnen auf jene systematische Weise ertheilt, und der günstigste Erfolg hat sich später jedesmal gezeigt, wenn Architecturgegenstände, Maschinen u. dgl. an die Reihe kamen. Schüler, welche diese Anstalt längst verlassen und sich zu tüchtigen Bauhandwerkern oder Maschinen-Baumeistern ausgebildet haben, erkennen sehr häufig mit vielem Danke diese Methode als nützlich an, während andere Praktiker, welche einen entgegengesetzten Weg einschlugen, auf halbem Wege stehen blieben, ohne das gewünschte Ziel zu erreichen.

Auch in technischen Anstalten ist für den mathematischen Unterricht das linearische Zeichnen von grossem Nutzen, besonders wird die beschreibende Geometrie nur dann mit Erfolg studirt werden können, wenn die Schüler alle Aufgaben mit Zirkel und Lineal nach der Anleitung des Vortrags, zum Theil schon während desselben, in grossem Maassstabe construiren.

Der grosse Nutzen des linearischen Zeichnens für die Zöglinge wissenschaftlicher und technischer Anstalten kann nicht verkannt werden, und so begrüssen wir freudig das vorliegende Werkchen als ein solches, welches diesem Unterrichtszweige frische Nahrung darzubieten geeignet ist. So wie das Zeichnen praktischer Gegenstände ohne Kenntniss der Projectionslehre unvollkommen bleibt, so ist auch die darstellende Geometrie ohne einsichtsvolle Fertigkeit im planimetrischen Zeichnen nicht zu erwerben. Der Herr Verfasser benennt daher sein Buch, in welchem er mit den einfachsten planimetrischen Aufgaben den Anfang macht, und allmählig zu schwierigern fortschreitet, mit Recht Vorschule der darstellenden Geometrie. Bei den Berührungs-Aufgaben bedient er sich sowohl einiger der neueren Methoden, als er auch durch geometrische Oerter die gesuchten Punkte bestimmt, welches besonders dem Praktiker angenehm sein muss. Die ebenfalls für den Praktiker wichtige näherungsweise Construction regelmässiger Vielecke giebt er nach Renaldi; bei einer neuen Auflage würde er die schöne Construction Sr. Hoheit des Herzogs Carl Bernhard zu Sachsen Weimar-Eisenach gewiss nicht unbenutzt lassen. Für die näherungsweise Construction des Umfangs eines Kreises, dessen Durchmesser bekannt ist, giebt er drei Auflösungen, von

Digitized by Google

denen die dritte für die Praxis gewiss ausreichend ist. Da indessen die neuern Constructionen noch genauer sind und keinen grössern Apparat erfordern, so würde wenigstens eine derselben hier am Orte sein. Sehr ausführlich ist die Construction der Kegelschnitte behandelt, auch hier sehen wir immer den gewandten Praktiker. Den Beschluss machen Spirallinie, Cycloide, Epicycloide etc. Die äussere Ausstattung macht dem Herrn Verleger Ehre, auch ist sehr zu loben, dass die Figuren dem Texte unmittelbar beigedruckt sind. Wir wünschen diesem Werke die möglichst grösste Verbreitung, und hoffen, dass der Herr Verfasser sich entschliessen werde, auch für die beschreibende Geometrie ein ähnliches Hülfsbuch zu liefern.

Danzig, September 18. 1846.

C. T. Anger.

Nach der obigen ausführlichen Anzeige durch einen völlig sachkundigen Gelehrten bedarf zwar die Schrift des Herrn Observator Dr. Busch einer Empfehlung von meiner Seite nicht mehr; jedoch will ich den Wunsch auszusprechen nicht unterlassen, dass diese ihrem Zwecke gewiss auf eine ausgezeichnete Weise entsprechende Schrift eine recht weite Vorbereitung finden und zu der sehr zu wünschenden immer grösseren Förderung des betreffenden Unterrichts, dessen vielfache Wichtigkeit in der obigen Anzeige sehr deutlich vor Augen gelegt worden ist, auf recht vielen Lehranstalten benutzt werden möge. G.

Preisschriften, gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. I. H. Grassmann's Geometrische Analyse. Leipzig. 1847. 20 Sgr.

Die von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig für das Jahr 1845 aufgegebene Preisaufgabe ist im Literarischen Berichte. Nr. XVIII. S. 288. mitgetheilt worden und kann dort nachgesehen werden. In dem vorliegenden Hefte ist die von der Gesellschaft mit dem Preise belohnte Abhandlung des Herrn H. Grassmann in Stettin veröffentlicht worden. Indem wir diese Abhandlung den Lesern des Archivs zur besondern Beachtung empfehlen, bemerken wir, dass Herr Grassmann sich in derselben mehrfach an seine Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre. Erster Theil. Leipzig. 1844. (M. s. auch Archiv. Thl. VI. S. 337.) anschliesst, und dass die erstere Schrift ohne die letztere nicht wohl ganz verstanden werden kann. Daher hat sich Herr Professor Möbius in Leipzig um die Leser und um die Sache gewiss ein wesentliches Verdienst erworben, dass er in einem besondern der Grassmann'schen Abhandlung in dem obigen Hefte angehängten Aufsatze: Die Grassmannsche Lehre von den Punktgrössen und den davon abhängenden Grössenformen, dargestellt von A. F. Möbius, diese Lehre, wie er sich ausdrückt, „auf eine dem Geiste der Geometrie entsprechendere und damit leichter fassliche Weise zu begründen und zu zeigen, wie jene Scheingrössen als abgekürzte Ausdrücke wirklicher Grössen angesehen werden können“ versucht hat. Je mehr uns die Sache der

Digitized by Google

Aufmerksamkeit werth zu sein scheint, wie schon Archiv. Theil VI. S. 337. bemerkt worden ist, desto mehr verdient Herr Professor Möbius gewiss Dank, dass er sich dieser Arbeit unterzogen hat.

Mechanik.

Einladungsschrift der k. polytechnischen Schule in Stuttgart zu der Feier des Geburtsfestes Sr. Majestät des Königs Wilhelm von Würtemberg auf den 27. September 1846. Mit einer Abhandlung über die gezwungene Bewegung des Atoms von Professor Dr. Reusch. Stuttgart. 1846. 4.

Der Herr Verfasser dieser Gelegenheitsschrift scheint uns seinen Zweck: die Principien, welche der Untersuchung des Gegenstandes derselben, über dessen eigentliches Wesen und eigentliche Bedeutung er sich in der Einleitung mit Hinweisung auf „Coriolis: Traité de la mécanique des corps solides et du calcul de l'effet des machines“ mit hinreichender Deutlichkeit und Beibringung einiger erläuternden Beispiele ausspricht, zu Grunde gelegt werden müssen, ohne Beihülfe analytischer Transformationen, also überhaupt ohne einen grossen Aufwand von Calcul, mit alleiniger Appellation an eine gesunde Anschauung auseinanderzusetzen, und dadurch eine Erweiterung des so wichtigen und in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Mechanik, wie er sagt, äusserst kümmerlich behandelten Kapitels von der gezwungenen Bewegung des Atoms zu erzielen, gut erreicht zu haben, weshalb wir diese Schrift zur Benutzung bei dem Unterrichte in der Mechanik auf technischen Lehranstalten, auf denen natürlich eine möglichst vereinfachte Darstellung dieser in mehreren Theilen schwierigen Wissenschaft vorzugsweise Bedürfniss ist, wohl empfehlen zu dürfen glauben.

Optik.

Optische Untersuchungen. Von Johann August Grunert. Zweiter Theil. Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre. Mit zwei Figurentafeln. Leipzig. 1847. 8. 1⅔ Thlr.

Der erste Theil dieses Werkes ist im Literar. Ber. Nr. XXXII. S. 479. angezeigt worden. Der vorliegende zweite Theil enthält, wie sein Titel angiebt, die Theorie der achromatischen Objective für Fernröhre, was in dem Sinne zu nehmen ist, dass bei dieser Theorie immer von der Voraussetzung ausgegangen wird, dass die einfallenden Strahlen sämmtlich der Axe des Objectivs parallel

Digitized by Google

sind, oder wenigstens von einem sehr weit von dem Objective entfernten Punkte kommen. Die Grundformeln, auf welche die Theorie gegründet wird, sind in diesem Theile auf eine neue Weise entwickelt worden, um denselben, eben so wie den ersten Theil, möglichst zu einem für sich selbst bestehenden, von den im ersten Theile gegebenen Entwickelungen unabhängigen Ganzen zu machen. Es sind zweifache und dreifache achromatische (oder vielmehr aplanatische) Objective betrachtet worden. Alle Formeln habe ich mit gehöriger Berücksichtigung der Dicken und der Entfernungen der einzelnen Bestandlinsen von einander entwickelt, so dass sich also jedes Objectiv eben so gut dialytisch als unter der Voraussetzung verschwindender Entfernungen seiner einzelnen Bestandlinsen von einander berechnen lässt, wodurch sich diese Formeln von den früher bekannten wesentlich unterscheiden, da selbst noch J. Herschel bei seiner Entwickelung der Theorie zweifacher achromatischer Objective, nach welcher, wie Stampfer gezeigt hat, auch die Fraunhofer'schen Objective gebaut sind, die Dicken und Entfernungen ganz unberücksichtigt gelassen hat. Ueberhaupt sind alle Formeln in so einfacher Gestalt dargestellt worden, als es die Natur des Gegenstandes und meine Kräfte irgend gestatteten; auch habe ich dieselben überall so weit entwickelt, dass sich die numerischen Data unmittelbar in sie einführen lassen, und nur noch die Schwierigkeit der Auflösung der Endgleichungen übrig bleibt, welche natürlich bei diesen meistens mehr als eine Auflösung zulassenden Problemen nicht zu umgehen ist. Näherungsmethoden sind überall, wo es nöthig war oder vortheilhaft zu sein schien, angegeben worden. Alle bekannten Principe, auf welche man bisher den Bau achromatischer Objective zu gründen gesucht hat, und einige neue von mir selbst angegebene, habe ich ausführlich betrachtet und analytisch entwickelt, unter den ersteren besonders die Principe von Euler, Klügel und Littrow, Barlow, J. Herschel (oder Fraunhofer) und Gauss. Die beiden letzten, namentlich das Princip von Gauss, welchem in theoretischer Rücksicht nach meiner Ansicht vor allen anderen Principen der Vorzug gebührt, und nur zu bedauern ist, dass, so viel ich weiss, noch kein Künstler ein Objectiv nach demselben gebaut hat, habe ich auch auf dreifache Objective ausgedehnt und auch in dieser Beziehung vollständig analytisch entwickelt, was bis jetzt noch nicht unternommen worden ist, so wie denn überhaupt seit den, neuern Ansprüchen nicht im Entferntesten mehr genügenden Theorien Euler's und Klügel's für diese Objective gar nichts von einiger Bedeutung geliefert worden ist, und man die Theorie dieser Objective seit jener Zeit gewiss sehr mit Unrecht ganz hat bei Seite liegen lassen, da eine Abhandlung des sonst sehr verdienten Oriani wohl nicht besonders in Anschlag gebracht werden kann. Ueberhaupt habe ich in dem vorliegenden zweiten Theile mein Augenmerk vorzugsweise auf eine Vervollkommnung und Erweiterung der älteren Theorien gerichtet, weil ich glaube, dass dadurch bei dem jetzigen Stande der Sache der Praxis vorläufig am meisten genützt und Vorschub geleistet werden kann, und behalte eine Behandlung der optischen Instrumente nach weit umfassendern und allgemeinern Methoden, wobei auch noch verschiedene andere Dinge zur Sprache gebracht werden sollen, den folgenden Theilen dieses Werks, dem ich, seiner mehr-

Digitized by Google

fachen Schwierigkeiten wegen, und weil es wenigstens für den zweiten Theil an genügenden und meinem Zwecke einigermassen entsprechenden Vorarbeiten fast gänzlich mangelte, eine nachsichtige Aufnahme und Beurtheilung wünsche, noch vor.

G.

Répertoire d'Optique moderne ou Analyse complète des travaux modernes relatifs aux phenomènes de la lumière; par M. l'Abbé Moigno. Première Partie. Paris et Leipsig. 1847. 8.

Herr Abbé Moigno hat sich bekanntlich durch die Herausgabe seiner Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy ein so allgemein anerkanntes Verdienst erworben, dass wir das vorliegende Werk mit nicht geringer Erwartung zur Hand nahmen, und zwar um so mehr, weil wir von der Nothwendigkeit und dem grossen Nutzen eines solchen Werks vollkommen und auf das Lebhafteste überzeugt sind, indem wohl Jeder, wer sich mit einigem Eifer dem Studium der neueren, namentlich der physikalischen Optik gewidmet hat, die mannigfachen Schwierigkeiten gefühlt haben wird, mit denen dieses Studium verbunden ist, wenn man sich nicht gerade ganz und ausschliesslich diesem Gegenstande hingeben will oder kann. Wir müssen aber offen gestehen, dass wir in unsern Erwartungen mehrfach getäuscht worden sind.

In der in sehr überschwenglichen Ausdrücken geschriebenen Vorrede erklärt der Herr Vf. auf pag. III., dass er in diesem Werke durchaus nur eine exposition physique, soutenue seulement et élairée par des formules élémentaires et faciles zu geben beabsichtige, und auf alle Anwendung des höhern Calculs verzichte. Eine elementare Darstellung, wenigstens in dem Sinne, wie man dieselbe namentlich in Deutschland wohl zu erwarten gewohnt sein möchte, und wie in einigen physikalischen Lehrbüchern, z. B. von v. Ettingshausen, August u. A. auf gewiss sehr verdienstliche Weise zu geben versucht worden ist, liefert die Schrift des Herrn Moigno aber gar nicht, sondern dieselbe ist im eigentlichsten Sinne durchaus nichts weiter als das, was die Franzosen „une Analyse“ nennen, wie auch auf ihrem Titel ganz richtig angegeben worden ist; ja man kann selbst noch hinzusetzen: sie ist wenigstens in ihrem mathematischen Theile vorzugsweise oder nur „une Analyse des travaux de Mr. Cauchy“, welcher letztere zugleich von Herrn Moigno fast auf allen Seiten mit Lobsprüchen auf eine Weise wahrhaft überschüttet wird, die einem so hochstehenden Gelehrten wie Herrn Cauchy — dessen grosse Verdienste von Niemandem mehr als von uns anerkannt werden können, wie wir auch wohl bei jeder Gelegenheit bereits zu völliger Genüge bewiesen haben — wohl schwerlich selbst angenehm sein kann. Gleich von vorn herein bedient Herr Moigno den Leser mit einigen aus Herrn Cauchy's Schriften entlehnten, natürlich aber gar nicht weiter begründeten analytischen Formeln und bringt auch nur sehr wenig bei, was geeignet wäre, eine einigermassen deutliche, jedoch nur ganz allgemeine Einsicht in das Wesen derselben, in die Art und Weise, wie Herr

Cauchy zu denselben gelangt ist, in die denselben gegebene eigenthümliche Form, über die Gründe der Einführung des Imaginären in dieselben und was dergleichen mehr ist und hier nur andeutungsweise und ganz im Allgemeinen hervorgehoben werden kann, zu vermitteln. Dadurch wird aber weder dem Physiker, noch dem Analytiker wahrhaft genützt, indem ersterer eine möglichst elementare und, so weit es die Natur des Gegenstandes irgend gestattet, strenge Darstellung, letzterer dagegen eine recht klare und übersichtliche, die eigentlichen Hauptmomente recht scharf hervorhebende Darlegung des Weges, welchen die Analyse genommen hat, wünschen wird. Nach unserer Ansicht wird daher auch nach dem Erscheinen dieses Werkes des Herrn Moigno für jeden, wer die neuere mathematische Optik kennen lernen will, wie bisher nichts weiter übrig bleiben, als zu den Schriften des Herrn Cauchy selbst seine Zuflucht zu nehmen, und Herr Moigno hat nach unserer Ansicht durch das vorliegende optische Werk jedenfalls den Zweck, welchen er durch seine oben angeführten Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral in mehrfacher Beziehung auf ausgezeichnete Weise erreicht hat: nämlich die Arbeiten seines grossen Lehrers einem grössern Kreise von Lesern zugänglich zu machen und denselben allgemeinern Eingang zu verschaffen, nicht erreicht. — Die Section deuxième: Explication raisonnée et comparée des phénomènes de l'optique dans les deux systèmes de l'émission et des ondulations, ist zwar ganz deutlich verfasst, indem sie überhaupt mehr historisch als scientifisch verfährt, möchte aber im Ganzen wohl nicht viel mehr liefern als in den vollständigern physikalischen Hand- und Lehrbüchern enthalten ist, wobei auch immer die Arbeiten der Franzosen vorzugsweise hervorgehoben und über die Leistungen anderer gestellt werden. Recht gute Zusammenstellungen liefern die dritte und vierte Section, — die beiden letzten in dem ersten Theile, — von denen die erste ein Résumé d'Optique météorologique, die zweite ein Résumé d'Optique minéralogique enthält.

Der zweite Theil soll enthalten: 1. la littérature complète de l'optique *); 2. le catologue raisonné et figuré des propositions à démontrer, des expériences qui constituent la démonstration et des appareils à l'aide desquels se font les expériences. Nun, daraus wird gewiss sehr viel zu lernen sein! und der Herr Verfasser wird doch wohl am Ende unser oben ausgesprochenes, vielleicht etwas vorschnelles Urtheil über den ersten Theil zu Schanden machen, und Recht behalten, wenn er die Vorrede zum ersten Theile mit den Worten schliesst: „*Nous aurions ainsi comblé un grand vide, et satisfait à un immense besoin.*" — Vorläufig bitten wir aber nur einen Jeden, bis zum Erscheinen des zweiten Theils zu warten, bevor er sich das Werk anschafft, da beide Theile Fünf Thaler netto kosten.

---

*) Welche man bis zu einem gewissen Zeitpunkte schon in grosser Vollständigkeit in dem Dove'schen Repertorium findet.

Anmerkung des Setzers.

Digitized by Google

Physik.

Geschichte des Leidenfrost'schen Phänomens, erste Abtheilung, vom Oberlehrer Dr. Emsmann. (Programm der Friedrich-Wilhelm's-Schule zu Stettin, mit Schulnachrichten vom Director Scheibert.) Stettin. 4.

Solche Monographien wie die vorliegende scheinen uns für die Schulprogramme sehr geeignet zu sein; sie nützen den Schülern und sind auch an sich interessant und nicht ohne wissenschaftliche Bedeutung. Der Herr Vf. hat die Geschichte und Literatur des genannten bekannten Phänomens sehr ausführlich mitgetheilt, und die verschiedenen Erklärungsversuche mit seinen eigenen Ansichten über dasselbe deutlich und vollständig dargelegt, so dass wir wünschen, er möge bald die zweite Abtheilung nachfolgen lassen.

Vermischte Schriften.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Etited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peters College, Cambridge. (Vergl. Lit. Ber. Nr. XXXIII. S. 492.)

No. VII. On the Attraction of a Solid of Revolution on an External Point. By George Boole. — On a certain Symbolical Equation. By George Boole. — Investigation of certain Properties of the Ellipsoid. By Thomas Weddle. — On Principal Axes of a Body, their Moments of Inertia, and Distribution in Space. By R. Townsend. — On the Integration of certain Equations in Finite Differences. By Rev. Brice Bronwin. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. — On the Theory of Involution in Geometry. By A. Cayley. — On a Mechanical Representation of Electric, Magnetic and Galvanic Forces. By William Thomson. — (No. VIII. will be published on the 1st of March 1847.)

In den Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XIII. Ire Partie. 1846. Bruxelles. 1846. 8. finden sich die folgenden ausführlichern Abhandlungen, welche der Beachtung der Leser des Archivs empfohlen zu werden verdienen.

Note sur la convergence de la série de Maclaurin, par M. Timmermanns. p. 53.

Note sur la convergence des séries, par M. Timmermanns, membre de l'Académie. p. 140.

Nouvelle démonstration d'un lemme et d'un théorème de M. Jacobi, par A. Pioch, professeur d'analyse à l'école militaire de Belgique. p. 151.

Digitized by Google

(Dieser Aufsatz bezieht sich auf eine aus dem Italienischen übersetzte Abhandlung in Liouville's Journal. Septembre. 1846., welche den Titel führt: Sur le principe du dernier multiplicateur et sur son usage comme nouveau principe de mécanique; par M. Jacobi.)

Du facteur d'intégration des équations homogènes, par M. Lefrançois, agrégé près de l'université de Gand. p. 159.

Note sur les expressions des racines d'un nombre en produits infinis, par M. Schaar, docteur en sciences. p. 228.

Sur le parallélogramme des forces de Simon Stévin, par A. Timmermanns, membre de l'Académie et professeur à l'Université de Gand. p. 313.

Sur les vibrations qu'un courant électrique discontinu fait naitre dans le fer doux; et sur la non-existence d'un courant électrique dans les nerfs des animaux vivants. (Extrait d'une lettre de M. E. Wartmann, professeur à l'Académie de Lausanne, à M. Quetelet.) p. 320.

Sur un théorème de Cauchy relatif au développement des fonctions en séries, par M. Lamarle, professeur à l'Université de Gand. p. 520.

(Betrifft Cauchy's neueste berühmte Arbeiten über die Entwickelung der Functionen in Reihen, s. Archiv. Thl. I. S. 364.)

Recherches sur les déterminants, par M. Catalan, répétiteur à l'École polytechnique, secrétaire de la Société philomatique de Paris. p. 534.

(Ein interessanter Aufsatz, den wir den Lesern des Archivs bald in einer deutschen Bearbeitung mitzutheilen hoffen.)

Magnétisme terrestre (Extrait d'une lettre de M. Lamont, directeur de l'Observatoire Royal de Munich, à M. Quetelet). p. 555.

Notes sur quelques questions examinées par M. Ardant, dans un mémoire intitulé: Etudes théoriques et expérimentales sur l'établissement des charpentes a grande portée; par M. Demanet, major du génie. p. 564.

Rapport de M. Crahay, sur un appareil propre à mesurer de très-petites différences de pression manométriques, proposé par M. Gustave Dumont. p. 687.

Régle pour la division des nombres approximatifs, par M. Verhulst, membre de l'Académie. p. 696.

(Auch diesen nur kurzen Aufsatz hoffen wir den Lesern des Archivs bald in einer deutschen Bearbeitung mittheilen zu können.)

Note sur l'emploi des dérivées en Algèbre, par M. Lamarle, professeur à l'Université de Gand. p. 698.

Note sur la convergence de la série de Taylor, par M. Lamarle etc. p. 724.

Sur l'éclipse de soleil du 9 Octobre 1847, par M. Mailly, aide à l'Observatoire Royal de Bruxelles. p. 728.

Digitized by Google

Sur les aurores boréales, la lumière zodiacale et les étoiles filantes. (Extrait d'une lettre adressée à M. Quetelet, par M. Ed. Herrick, de New-Haven, Etats Unis.) p. 744.

Sur la déclinaison magnétique et ses variations à Cracovie. (Extrait d'une lettre de M. Weisse, directeur de l'Observatoire, à M. Quetelet.) p. 751.

Wir können der Beschränktheit des Raumes wegen nur diese grösseren Aufsätze hier namhaft machen; ausser denselben enthält aber dieser 812 Seiten starke Band noch eine Menge vorzüglich von Herrn Quetelet herrührender sehr interressanter kürzerer Aufsätze und Mittheilungen, hauptsächlich über die Phénomènes périodiques, die auch in naturhistorischer Rücksicht von grossem Interesse sind, und das Blühen u. s. w. der Pflanzen, den Zug der Vögel und ähnliche Erscheinungen in der Natur betreffen. Auch der Aufsatz: Sur les indiens O-Jib-Be-Wa's et les proportions de leur corps, par M. A. Quetelet bietet vielfaches Interesse dar, da Herr Quetelet die Anwesenheit von zwölf Indianern vom Stamme der O-Jib-Be-Wa's benutzte, um an denselben Messungen anzustellen, und dieselben dann mit andern an Belgiern von vorzüglicher Grösse und Schönheit des Körpers angestellten Messungen zu vergleichen.

Herr Quetelet sagt am Schluss seines Aufsatzes: „Ces rapprochements sont bien propres à détruire les préjugés qui existent au sujet des Indiens. On voit que leur conformation est à peu prés exactement la nôtre, et que si elle lui est supérieure sous plusieurs rapports, cet avantage provient de la facilité qu'ont les différentes parties du corps à se développer avec plus de liberté et par des exercices plus avantageux.“ — Messungen der Stärke mit dem Dynamometer von Regnier fielen aber doch zum Vortheil der Indier aus.

Man erkennt aus dem Obigen die Reichhaltigkeit dieser Bulletins, und wir werden von jetzt an deren Inhalt in unsern Literarischen Berichten um so mehr fortwährend vollständig angeben, weil mit dem vorher angezeigten Bande eine neue Aera der Brüsseler Akademie beginnt, indem dieselbe seit dem Anfange des Jahres 1846 durch die Munificenz des Königs Leopold mit einer dritten Klasse (Classe des beaux-arts) vermehrt und überhaupt in mehreren Beziehungen vervollständigt und erweitert worden ist, weshalb die Akademie seit dem Jahre 1846 auch „Académie Royale dès sciences, des lettres et des beaux-arts“ heisst. Einige der obigen in mehrfacher Beziehung interessanten Aufsätze sollen, wie vorher schon bemerkt worden ist, im Archive in deutschen Bearbeitungen mitgetheilt werden.

Druckfehler.

Theil VII. S. 387. Z. 2. v. u. und S. 388. Z. 4. s. m. $(-1)^n n!$ für $n!$.
Theil IX. Heft I. S. 48. Z. 8. s. m. X für x.
Theil IX. Heft I. S. 88. Z. 24. s. m. Körper statt Kürper.

XXXV.

Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Mémoire sur la vie et les travaux de Simon Stevin. Par Steichen, docteur en sciences mathématiques et physiques, et professeur de mécanique rationnelle et de mécanique appliquée à l'école militaire. Bruxelles. 1846. 8.

Die kleine Schrift von Herrn Quetelet über Simon Stevin ist im Literarischen Berichte Nr. XXVII. S. 393. angezeigt worden. In dem vorliegenden grösseren Werke giebt Herr Professor Steichen vorzugsweise eine sehr dankenswerthe Analyse aller von Stevin herausgegebenen Werke, und wir halten diese Schrift daher für einen nicht unwichtigen Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Nach der S. 6. und S. 7. von dem Herrn Vf. gegebenen Aufzählung sind die von Stevin herausgegebenen Werke folgende:

Un Traité d'arithmétique et d'algèbre (publié en 1585).
Une Table d'intérêt et de l'argent (1583).
La Statique comprenant l'Hydrostatique (1586).
L'Invention de la dime, faisant suite à l'Arithmétique (1585).
Un Traité de fortification, en 1594. (Bibliothèque de Leyde.)
La Cosmographie, qu'il composa dans l'intervalle de 1600 à 1608, et qui est imprimée parmi ses oeuvres flamandes, en deux tomes, dont le premier parut en 1505 et le second 1508. (Edition qui se trouve à notre bibliotheque royale et qui est loin d'être compléte.)
La Castramentation, publiée en 1617.
La Fortification par écluses (1618).
La Dialectique, que l'auteur fit aussi publier en 1585, un peu avant l'Arithmétique.
Sa Vita politica, qui date de 1590.
Dans son Arithmétique et Algèbre se trouvent:

Digitized by Google

La Traduction des quatre premiers livres de Diophante;
Un Traité des grandeurs incommensurables;
L'Explication laconique du 10e livre d'Euclide;
Une Géométrie pratique;
Un Traité de la tenue des livres, publié en 1608.

Die Analyse der militairischen Werke rührt von dem Herrn Alexis Brialmont, ancien élève de l'école militaire, sous-lieutenant du génie, her.

Die zweite Abtheilung des Werks liefert auf pag. 171. bis pag. 242. sehr dankenswerthe Notes et éclaircissements.

Ueber Stevin's äusseres Leben war im Ganzen wenig zu sagen, jedoch hat der Herr Verfasser auch in dieser Beziehung alle ihm zugänglichen Quellen treulich benutzt, wenn auch immer die Analyse der Werke Stevin's, namentlich für den Mathematiker, die Hauptsache bleibt.

Nun, wir empfehlen diese Schrift nochmals den Liebhabern der Geschichte der Mathematik zur Beachtung.

Arithmetik.

Lehrbuch der Arithmetik für höhere Bildungsanstalten. Aus historischen und psychologischen Grundlagen für die Zwecke des Unterrichts neu entwickelt von Dr. Theodor Wittstein. Die Operationen an zusammengesetzten Zahlen. Hannover 1846. 8. ½ Rthlr.

Der erste Theil dieses empfehlenswerthen Lehrbuchs ist im Literar. Ber. Nr. XXVIII. S. 413. angezeigt worden, und das dort ausgesprochene Urtheil gilt ganz auch von dem vorliegenden zweiten Theile, weshalb wir uns hier mit der Angabe des Inhalts begnügen können. *Erster Abschnitt.* Rechnung mit zusammengesetzten Zahlen im Allgemeinen. Rechnung mit Summen und Producten. Rechnung mit Potenzen. Rechnung mit Logarithmen. *Zweiter Abschnitt.* Theorie der Gleichungen. Rechnung mit Gleichungen. Auflösung der Gleichungen. *Dritter Abschnitt.* Theorie der Zahlensysteme. Addition und Subtraction. Multiplication und Division. Potenzirung und Wurzelausziehung. *Vierter Abschnitt.* Theilbarkeit dekadischer Zahlen. Kennzeichen der Theilbarkeit ganzer Zahlen. Entstehung geschlossener und periodischer Decimalbrüche. *Fünfter Abschnitt.* Theorie der logarithmischen Systeme. Berechnung der Logarithmen. Construction und Gebrauch der logarithmischen Tafeln.

Man sieht hieraus, dass das Buch auf sehr geringem Raume (nur 137 Seiten) Vieles in sehr einfacher Darstellung und Entwickelung giebt. Auch aus der Theorie der Zahlen, z. B. der Fermat'sche Satz, kommt Einiges vor, und das Buch verdient jedenfalls zu allgemeinerer Beachtung empfohlen zu werden.

Die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen. Mit einer Sammlung von Aufgaben. Von F. Rummer, Lehrer der Mathematik an der höheren

Digitized by Google

Bürgerschule und Hauptlehrer der Gewerbschule zu Heidelberg. Heidelberg. 1847. 8. 1 Rthlr.

Ein zwar ganz elementares, aber, wie es scheint, recht praktisches und seinem Zwecke gut entsprechendes Buch, welches zugleich eine sehr reichhaltige Sammlung von Uebungsaufgaben darbietet, und in der That die Stelle eines kurzen Lehrbuchs und einer Aufgabensammlung für erste Anfänger in der Buchstabenrechnung und Algebra zugleich vertreten kann. Dasselbe enthält die gewöhnliche Buchstabenrechnung mit Einschluss der Lehre von den Logarithmen, die niedern Reihen, die Gleichungen des ersten und des zweiten Grades, die Anfangsgründe der unbestimmten Analytik, die Zins- und Rentenrechnung. Wir glauben, dass das Buch seiner vorherrschenden praktischen Tendenz wegen namentlich den Lehrern an mehr einer praktischen Richtung folgenden Lehranstalten zur Beachtung empfohlen zu werden verdient.

Algebraische Aufgaben des ersten und zweiten Grades, von Miles Bland. Nach der 8ten Ausgabe des englischen Originals für deutsche Schulzwecke bearbeitet von Dr. Christ. Heinr. Nagel, Rector der Realanstalt in Ulm. Stuttgart. 1847. 1 Rthlr. 6 Sgr.

Miles Bland ist der englische **Meier Hirsch** und der Herr Uebersetzer hat gewiss auf den Dank aller Schulmänner für seine Arbeit zu rechnen, schon der nicht uninteressanten Vergleichung wegen. Aber auch die Sammlung an sich ist sehr reichhaltig und unterscheidet sich namentlich dadurch von den ähnlichen Büchern in Deutschland, dass den Aufgaben theils die vollständigen Auflösungen, theils nur die Resultate derselben beigefügt sind, was gewiss Manches für sich hat. Der Umfang, den diese Sammlung in der Uebersetzung — da der Herr Uebersetzer Einiges aus dem Originale wegzulassen für zweckmässig befunden hat — in wissenschaftlicher Rücksicht einnimmt, ist zwar durch den Titel hinreichend bezeichnet; indess wollen wir den Inhalt im Folgenden noch etwas bestimmter angeben.

I. Haupttheil. Algebraische Gleichungen vom ersten und zweiten Grade. I. **Abtheilung.** Gleichungen vom ersten Grade mit Einer unbekannten Grösse. II. **Abtheilung.** Gleichungen vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Grössen. III. **Abtheilung.** Reine quadratische Gleichungen, nebst Gleichungen von höheren Graden, welche ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können. IV. **Abtheilung.** Unreine quadratische Gleichungen mit Einer unbekannten Grösse. V. **Abtheilung.** Unreine quadratische Gleichungen mit zwei unbekannten Grössen. — *II. Haupttheil. Aufgaben, welche auf algebraische Gleichungen führen.* I. **Abtheilung.** Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grade mit Einer unbekannten Grösse führen. II. **Abtheilung.** Aufgaben, welche auf Gleichungen vom ersten Grade mit zwei unbekannten Grössen führen. III. **Abtheilung.** Aufgaben, welche auf reine quadratische Gleichungen oder auf Gleichungen von höheren Graden führen, die ohne Ergänzung des Quadrats gelöst werden können. IV. **Abtheilung.** Aufgaben, welche auf unreine quadratische Gleichungen führen. V. **Abtheilung.** Aufgaben über arithmetische und geometrische Progressionen.

Digitized by Google

Jede Abtheilung enthält Aufgaben mit und ohne Auflösungen: für die letzteren sind die Resultate der Auflösungen am Ende zusammengestellt.

De spectatissimis quibus aequationes altioris gradus numericae solvuntur methodis dissertationem mathematicam scripsit Dr. C. Weissenborn. Berolini. 1847. 8. 12 Sgr.

Diese Dissertation enthält, ohne auf eine gewisse Selbsständigkeit Anspruch machen zu dürfen, eine kurze und einfache, ziemlich deutliche Darstellung der bekanntesten älteren und neueren Methoden zur Auflösung der numerischen Gleichungen, lässt aber rücksichtlich der Vollständigkeit, namentlich in theoretischer Beziehung, Vieles zu wünschen übrig. Denn dass z. B. die so wichtige Lehre vom Excess der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen und deren Anwendung zur Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden reellen Wurzeln, sowie deren Anwendung zur Bestimmung der Anzahl der zwischen gegebenen Gränzen liegenden imaginären Wurzeln einer gegebenen Gleichung (m. s. Archiv der Mathem. und Phys. Thl. I. S. 19.) ganz fehlt, ist doch kaum zu billigen. Auch hätte über Cauchy's schöne Methoden zur Auflösung der numerischen Gleichungen (m. s. Supplemente zu dem mathematischen Wörterbuche. Thl. II. Art. Gleichung) wohl Einiges gesagt werden sollen. Ueberhaupt liefert also diese Schrift — ohne dass wir uns hier auf weitere Einzelnheiten einzugehen einlassen können — kein deutliches und einigermassen vollständiges Bild von dem gegenwärtigen Zustande der Lehre von den numerischen Gleichungen, und enthält grösstentheils nur allgemein bekannte Dinge. Daher hätte der Herr Vf. erst noch tiefere Studien machen sollen, bevor er mit dieser Schrift — da dieselbe einige eigenthümliche Untersuchungen, die man wohl namentlich in einer Dissertation wenigstens in dem Kreise derjenigen Ansprüche, die man an solche von Anfängern zu verfassende Schriften zu machen sich berechtigt halten darf, zu finden hoffen dürfte — gar nicht enthält, öffentlich hervortrat. Enthält eine solche Schrift wie diese keine eigenthümlichen Untersuchungen, so muss sie wenigstens in der Darstellung des Bekannten mit möglichster Kürze hinreichende Vollständigkeit verbinden. Wer aber das Bekannteste über die Theorie der numerischen Gleichungen in kurzer Zeit einigermassen kennen lernen will, und selbst erst Anfänger in diesen Dingen ist, mag immerhin für's Erste zu der vorliegenden Schrift greifen.

Der Geist der mathematischen Analysis und ihr Verhältniss zur Schule vom Professor Dr. Martin Ohm. Zweite Abhandlung. Auch als Anhang und Kommentar zu seinen verschiedenen Lehrbüchern. Mit einer Figuren-Tafel. Auch unter dem Titel: Der Geist der Differential- und Integral-Rechnung. Nebst einer neuen und gründlichern Theorie der bestimmten Integrale von Dr. Martin Ohm. Erlangen. 1846. 8. 1 Rthlr.

„In dem 1842 erschienenen „Geist der mathematischen Analysis" — sagt der Herr Vf. in der Vorrede — „habe ich es versucht, den innern wissenschaftlichen Zusammenhang der Lehren

Digitized by Google

der Elementar-Analysis kurz hervorzuheben. Denselben Zweck hat die gegenwärtige „Abhandlung" in Bezug auf die Differential- und Integral-Rechnung, welche daher in Bezug auf jene die „zweite" genannt werden kann. Im Verlaufe dieser gegenwärtigen ist daher jene allemal als „Erste Abhandlung" citirt. Da der Vf. auch für Leser schreibt, die sich nicht gerade ausschliesslich mit Mathematik beschäftigen, die aber mit der Wissenschaft Schritt zu halten wünschen, so ist hie und da Sorgfalt angewandt worden, durch nähere Erörterungen, durch kurze Ausfüllung von Lücken ein leichteres Verständniss zu vermitteln, was andere Leser für überflüssig halten müssen. Ein Schriftsteller muss suchen, in dieser Hinsicht die rechte Mitte zu treffen."

Der Inhalt ist folgender. Auf eine 42 Seiten lange Einleitung folgt *der Geist der Differential- und Integral-Rechnung*, welcher aus fünf Kapiteln besteht. Erstes Kapitel. Die gesammte Ableitungs-Rechnung. Zweites Kapitel. Integrale entwickelt gegebener Functionen. Drittes Kapitel. Uebergang der Form-Gleichungen in Zahlen-Gleichungen. Ueber den Gang der reellen Werthe einer Function. Der Lagrange-Taylor'sche und der Lagrange-Maclaurin'sche Lehrsatz. Die Leibnitzische Differential-Rechnung. — Viertes Kapitel. Von den numerisch-bestimmten Integralen. Fünftes Kapitel. Von den numerischen unendlichen Reihen und von den numerisch-bestimmten Integralen mit unendlich-grossen Grenzen.

Wir können über diese Schrift nur so viel sagen, dass dieselbe ganz in dem bekannten Geiste des Herrn Vfs., welcher nach unserer Ueberzeugung nicht der eigentliche und wahre Geist der strengeren neueren Analysis ist, verfasst ist, wobei wir übrigens dem bekannten Streben des Herrn Vfs. nach Systematik und Allgemeinheit gern alle Gerechtigkeit widerfahren lassen. Auf Neuheit Anspruch machende Resultate, die aber in dieser Schrift, da der Herr Vf. in der Vorrede sagt, dass er auch für solche Leser schreibe, die sich nicht ausschliesslich mit Mathematik beschäftigen, wohl auch nicht zu geben bezweckt worden sind, haben wir in dieser Schrift am allerwenigsten gefunden.

Auf eine ausführlichere Kritik uns einzulassen, gestattet der Zweck des Literarischen Berichts im vorliegenden Falle nicht, und wir verzichten auch um so lieber auf eine solche von unserm Standpunkte aus, weil wir uns dann wahrscheinlich auf eine ähnliche lange Diatribe, wie sie dem Herrn Professor Kummer in Breslau in der Vorrede zu der vorliegenden Schrift zu Theil geworden ist, gefasst machen müssten, die wir aber dem Herrn Vf., um seine gewiss höchst kostbare Zeit zu schonen, gern ersparen möchten, und zwar um so mehr, weil dieselbe für uns selbst doch ganz ohne Nutzen sein würde.

Raabe, J. L., Die Differenzial- und Integralrechnung von Gleichungen zweier und mehrerer Variablen. Der Differenzial- und Integralrechnung zweiten Theils zweite und letzte Abtheil. gr. 8. Zürich. 1847. $3\frac{1}{3}$ Rthlr.

Doctrinae serierum infinitarum exercitationes. Auctore Mag. Em. Gabr. Björling, ad Reg. Acad. Upsal.

Digitized by Google

Math. Doc., ad Reg. Gymn. Aros. Math. lect. design., Reg. societ. scient. Upsal. membro. Pars IIda. (Ex Actis Reg. Societ. Scient. Upsal.) Upsaliae. MDCCCXLVI. 4.

Die erste Abtheilung dieser Abhandlung ist im Literar. Ber. Nr. XXXI. S. 458. angezeigt worden; wir können also den dort angegebenen Hauptzweck, welchen der Herr Vf. bei der Abfassung derselben hatte, als bekannt voraussetzen. In der vorliegenden zweiten Abtheilung unterwirft er das Binomialtheorem, dessen Ausdehnung auf imaginäre Exponenten er bekanntlich hauptsächlich beabsichtigt, indem dieses wichtige Theorem bis jetzt immer nur auf reelle Exponenten eingeschränkt worden ist, eigentlich einer neuen Behandlung, und bringt dasselbe auch auf pag. 20. auf einen allgemeinen und bestimmten Ausdruck. Leider ist es uns an diesem Orte nicht gestattet, auf viele Einzelnheiten einzugehen. Und wenn wir uns daher auch begnügen müssen, die Abhandlung als eine für die Theorie der Reihen überhaupt, namentlich mit Rücksicht auf deren Convergenz und Divergenz, in mehreren Beziehungen nach unserer Ueberzeugung wichtige zu bezeichnen, welche den Liebhabern der neueren Analysis sehr zur Beachtung empfohlen zu werden verdient; so können wir uns doch der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen nicht versagen, den Ausdruck, auf welchen der Herr Vf. das allgemeine Binomialtheorem gebracht hat, den Lesern des Archivs im Folgenden mitzutheilen:

Theor. IV. Binomiale.

Aequatio

$$(1+x)^y = 1 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + \ldots\ldots$$

vera est non modo realibus x (numerice <1) et y, sed x et y quibuscumque formae

$$x = u(\operatorname{Cos} w + \sqrt{-1}\operatorname{Sin} w),$$
$$y = a(\operatorname{Cos} b + \sqrt{-1}\operatorname{Sin} b) = \mu + \nu\sqrt{-1}:$$

1:o) quoties Mod. $x<1$ sit;

quin immo

2:o) quoties Mod. x haud >1 sit,

a) dum μ positiva est quantitas,

immo etiam

b) μ reali qualibet supra -1, certe dum x finita quantitate ab -1 discrepat.

Ipsa autem series membri posterioris divergens est

1:o) dum Mod. $x=1$ est,

a) quoties μ negativa numerice $\overline{\overline{>}}\,1$ fuerit.

Digitized by Google

b) dum $x = -1$, etiamsi $\mu = 0$ (ν positiva aut neg.) aut negativa numerice < 1 (ν positiva, negativa aut 0) fuerit;

2:o) quoties Mod. $x > 1$ sit (nisi forte fuerit Exponens y numerus integer aut 0).

Dum y num. est integer ideoque series finita; vera est aequatio, etiamsi tunc Mod. $x > 1$ fuerit.

Wir wünschen sehr, dass diese Abhandlung in ihren beiden Abtheilungen die Beachtung finden möge, welche sie gewiss in mehr als einer Beziehung verdient! und weisen die Liebhaber der neueren Analysis nochmals besonders auf dieselbe hin.

Geometrie.

Die Bildlehre. Vom Professor Dr. M. G. von Paucker. Mit 100 Seiten Fügungen (Figurentafeln). Mitau. 1846. 8. $1\frac{1}{2}$ Rthlr.

In der Vorrede spricht sich der Herr Vf. über dieses Buch im Allgemeinen auf folgende Art aus.

„Der Zweck dieses Buches ist eine gänzliche Umgestaltung der niedern Bildlehre, sowohl in ihrer Begründung als in ihrer Anschauungsweise.“

„Von Euklid bis auf unsere Zeit wurden die Beweise der bildmässigen Wahrheiten durch Maassgleichungen geführt. Hierzu rechne ich sowohl den pythagorischen Lehrsatz und seine Folgerungen, als auch die Lehre von der Aehnlichkeit und den Verhältnissen. Die Maassgleichungen beruhen auf dem Begriff der Zahl. Ihre Einführung in die Bildlehre giebt dieser eine fremdartige Kennzeichnung und thut ihrer selbsständigen Auffassung Eintrag.“

„Unter den neuern Raumforschern hatte Steiner zuerst das grosse Verdienst, die Abhängigkeit der Fügungen durch die Bildgleichung aufzudecken (Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten. 1832.). Er begründete diesen Satz durch Bindung von Verhältnissen.“

„In der Bildlehre ist aber die zahlhafte Behandlung nach dem Ausdrucke meines verewigten Lehrers J. W. Pfaff nur „eine Krücke“, welche nach gemachtem Gebrauche weggeworfen wird.“

„Ich habe daher versucht, die niedere Bildlehre von allem, was an Maassgleichungen und Verhältnisse erinnert, zu befreien.“

Hieraus sehen wir, dass der Herr Vf., um seinen Zweck, wie es an diesem Orte erforderlich ist, nur ganz in der Kürze und ganz im Allgemeinen zu bezeichnen, bei der Abfassung dieses Werks die Absicht hatte, die sogenannte neuere Geometrie in ihren wichtigsten und schönsten Resultaten ganz von der Verhältnisslehre zu entkleiden, und Alles bloss zuletzt auf die Betrach-

Digitized by Google

tung gleicher Dreiecke zu gründen. In der That enthält also dieses durch die im Literar. Ber. Nr. XXX. S. 451. angezeigten „Fünf berühmten Fragen aus der Bildlehre. Mitau. 1845." desselben Herrn Vfs. vorläufig angekündigte und eingeleitete Werk eine ganz neue Darstellung und Begründung der sogenannten neueren Geometrie in ihren Hauptresultaten, und verdient nach unserer vollkommensten Ueberzeugung gar sehr, den Liebhabern der Geometrie zur Beachtung angelegentlichst empfohlen zu werden. Diese Empfehlung dürfte aber an diesem Orte um so nothwendiger sein, weil Mancher durch eine besondere Eigenthümlichkeit dieses Werks leicht abgehalten werden könnte, sich mit seinem Inhalte genauer bekannt zu machen. Der Herr Vf. hat es sich nämlich zugleich zum Gesetz gemacht, die ganze Geometrie von allen fremden Ausdrücken zu entkleiden, und alle derselben eigenthümlichen Begriffe mit echt deutschen Worten zu bezeichnen. Allerdings erschwert dies das Studium des Werks einigermassen. Indess können wir versichern, dass Jeder, wer nur der deutschen Sprache gehörig mächtig ist, den Herrn Vf. leicht verstehen wird. Auch empfehlen wir die oben erwähnten „Fünf berühmten Fragen aus der Bildlehre" bei dem Studium des vorliegenden Werks zugleich mit zur Hand zu nehmen, weil sich der Herr Vf. in dieser kleinen Schrift, — was in dem vorliegenden Buche nun nicht mehr geschehen ist —, über die von ihm gewählten deutschen Ausdrücke etwas näher erklärt hat, wie auch aus unserer vorher angeführten Anzeige derselben, auf die wir daher auch hier in der in Rede stehenden Beziehung des Folgenden wegen verweisen, ersichtlich sein wird.

Das ganze Werk zerfällt in drei Hauptabschnitte, welche die folgenden Ueberschriften führen: *Erster Abschnitt.* Stab und Ecke. *Zweiter Abschnitt.* Doppelbildung. *Dritter Abschnitt.* Kreis und Abkreis. Ueber den besondern Inhalt dieser Abschnitte, über ihren und der in ihnen enthaltenen Sätze innern Zusammenhang unter einander, über die besondere Art und Weise der Begründung der einzelnen Sätze, über Alles, was dem Herrn Vf. vorzugsweise eigenthümlich ist, hat sich derselbe aber in der Vorrede so ausführlich und mit so vieler Deutlichkeit ausgesprochen, dass wir die Leser des Archivs, weil der Zweck und die Einrichtung unserer Literarischen Berichte ein weiteres Eingehen auf Einzelnheiten nicht gestatten, lediglich auf diese Vorrede verweisen können, wenn sie sich vor dem eigentlichen sorgfältigen Studium des Werks näher mit seiner ganzen Tendenz bekannt machen wollen.

Ausser den genannten drei Abschnitten enthält das Werk noch einen Anhang, in welchem der Herr Vf. für diejenigen, welche gewohnt sind, das Bildmässige nur in den Maassgleichungen anzuschauen, die wichtigsten Maassgleichungen, welche sich aus den Bildgleichungen ergeben, angeführt hat. Am Schlusse nimmt er die Kreisberührung noch einmal vor und theilt aus der bekannten Auflösung Gergonne's, durch einige eigenthümliche bemerkenswerthe Sätze, verschiedene ebenmässige Ausdrücke mit, welche zu einer sehr geschmeidigen Berechnung aller Bestimmungsstücke führen.

Wir stimmen dem Herrn Vf. vollkommen bei, wenn er in der Vorrede sagt, „dass er glaube, dass es ihm gelungen sei, ohne

Digitized by Google

irgend eine zahlhafte Betrachtung oder Maassgleichung die ganze Bildlehre als ein in sich abgeschlossenes Ganzes darzustellen" und halten dieses Werk, dem wir eine allgemeinere Beachtung sehr wünschen, jedenfalls für eine Bereicherung unserer geometrischen Literatur. Wollten wir nach einem gewöhnlichen Ausdrucke sagen, dass dasselbe manches oder nicht weniges Eigenthümliche enthalte, so würden wir dem Herrn Vf. sehr Unrecht thun, denn Alles in demselben bis auf die Kunstsprache ist wirkliches Eigenthum desselben Wir haben dieses Werk hier um so wärmer empfohlen, weil wir die Bemerkung gemacht zu haben glauben, dass gerade solche nothwendig ein genaueres und sorgfältigeres Studium erfordernde mathematische Werke in den gewöhnlichen kritischen Zeitschriften nicht auf verdiente und eine der auf ihre Abfassung sichtlich verwandten Mühe und Kraft entsprechende Weise Anerkennung finden.

Die äussere Ausstattung ist in jeder Beziehung vorzüglich und namentlich ist auch auf die ungefähr 200 Figuren enthaltenden, nicht leicht zu entwerfenden Figurentafeln besonderer Fleiss und grosse Sorgfalt verwandt worden, was jedenfalls auch ein nicht zu übersehender Vorzug eines solchen Werks ist.

Ricerche di analisi applicata alla geometria, di Fortunato Padula. Neapoli, 1845.

In Nr. 589. der Astronomischen Nachrichten. S. 209. findet sich ein kleiner Aufsatz des verehrten Herausgebers derselben, Herrn Conferenzrath Schumacher, welcher die Ueberschrift führt: Ueber die Zahl π, die das Verhältniss des Durchmessers zum Umfange des Kreises ausdrückt. Herr Conferenzrath Schumacher theilt in diesem Aufsatze einen von dem bekannten Rechner Herrn Dase bis auf 200 Decimalstellen berechneten Werth von π mit, und zeigt, dass derselbe mit dem von Herrn Doctor Clausen in Dorpat bis auf 250 Decimalstellen berechneten Werthe in den ersten 200 Decimalstellen genau übereinstimmt, von einem andern von Herrn Rutherford in den Philos. Transactions. 1841. Part II. pag. 283. bis auf 208 Decimalen berechneten Werthe aber von der 153sten Decimalstelle an stark abweicht, wodurch also die Falschheit des von Herrn Rutherford a. a. O. angegebenen Werths deutlich dargethan ist.

In derselben Nummer der Astronomischen Nachrichten theilt Herr Doctor Clausen in Dorpat ein Paar sehr elegante Theoreme über die kürzesten Linien auf Flächen des zweiten Grades mit, von denen das erste als eine Verallgemeinerung des bekannten Jacobi'schen Theorems zu betrachten ist, weshalb wir nicht umhin können, Liebhaber der höhern Geometrie und Geodäsie, zu welcher letztern diese Theoreme natürlich in naher Beziehung stehen, auf diesen Aufsatz des Herrn Doctor Clausen hier besonders aufmerksam zu machen, weil er vielleicht leicht ihrer Beachtung, die er gar sehr verdient, entgehen könnte.

Grundlehren der ebenen Trigonometrie, analytischen Geometrie und Infinitesimal-Rechnung. Von J. B. Belanger. Deutsche Bearbeitung von Dr. Bernhard

Digitized by Google

Gugler, Professor an der K. polytechnischen Schule zu Stuttgart. Stuttgart. 1847. 8. 22 Sgr.

Ein nach unserer Meinung recht gutes Büchlein, welches wegen seiner einfachen, anschaulichen und auf das Praktische gerichteten Darstellung, in welcher letzteren Beziehung es eben auch nur vorzugsweise das liefert, was für die Praxis am wichtigsten ist, ohne dabei doch in Ungründlichkeit und Seichtigkeit zu verfallen, sich zur Grundlage für den Unterricht auf mehr eine praktische oder technische Richtung verfolgenden Lehranstalten sich recht gut eignen mag. Es auf deutschem Boden zu verpflanzen war daher ein guter Gedanke. Gegen die Uebersetzung ist nichts zu erinnern, die äussere Ausstattung ist ausgezeichnet und der Preis im Verhältniss zu derselben sehr niedrig.

Praktische Geometrie.

Lehrbuch der höheren Geodäsie von Dr. Philipp Fischer, Lehrer der praktischen Geometrie und Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. Zweiter Abschnitt. Enthaltend: Die Beobachtungsarbeiten und Instrumente. Mit vier Figurentafeln. Darmstadt. 1846. 8. 1 Rthlr. 5 Sgr. — Dritter Abschnitt. Enthaltend: Die Berechnungen. Mit einer Figurentafel. Darmstadt 1846. 8. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Der erste Theil dieses Werkes ist im Literarischen Berichte Nr. XXVIII. S. 418. angezeigt worden. Der Inhalt der zweiten und dritten Abtheilung ist aus dem Titel selbst ersichtlich. Wir müssen dem Herrn Vf. das Zeugniss geben, dass er in diesen beiden Abtheilungen allerdings etwas selbstständiger als in der ersten, die Methode der kleinsten Quadrate enthaltenden Abtheilung gearbeitet hat, wenn auch freilich diese beiden letzteren Abtheilungen doch nur grösstentheils in Auszügen aus andern Werken bestehen, und vorzugsweise, ja fast einzig und allein, Bessel's Arbeiten über höhere Geodäsie von dem Herrn Vf. benutzt worden sind, die er jedoch möglichst zu einem systematischen Ganzen zu verbinden gesucht hat. Für Leser also, die nicht auf die eigentlichen Quellen zurückgehen wollen oder können, wird dieses Werk immer seinen Nutzen haben, und wir empfehlen daher diese beiden letzteren Abtheilungen als ein ganz gutes Repertorium, hauptsächlich jedoch nur rücksichtlich der erwähnten Besselschen Arbeiten. Dass aber in demselben noch Vieles fehlt, was ein auf gehörige Vollständigkeit Anspruch machendes Werk über höhere Geodäsie nothwendig enthalten müsste, lässt sich leicht nachweisen. So fehlt z. B. eine Theorie der terrestrischen Refraction gänzlich, was gewiss kaum zu entschuldigen ist. Bekanntlich ist diese Theorie aus zwei Gesichtspunkten dargestellt worden, von denen man den einen den geometrischen, den andern den physikalischen nennen könnte. Als der wichtigste Vertreter der ersteren Richtung ist Lambert anzusehen, welcher in der eleganten Schrift: Les propriétés remarquables de la route

Digitized by Google

de la lumière par les airs et en general par plusieurs milieux refringens spheriques et concentriques etc. Par J. H. Lambert. A. la Haye. 1758. (Deutsch unter dem Titel: Eigenschaften der Bahn des Lichts von J. H. Lambert. Berlin. 1772.) eine sehr schöne geometrische Theorie der terrestrischen und astronomischen Refraction — hauptsächlich aber der ersteren — geliefert hat, die nach unserer Meinung auch jetzt immer noch mehr Berücksichtigung verdient, als ihr gewöhnlich geschenkt wird. Die physikalische Theorie der astronomischen und terrestrischen Refraction — hauptsächlich aber der ersteren — ist bekanntlich von Laplace im 10ten Buche der Mécanique céleste (T. IV. pag. 231.) auf eine höchst scharfsinnige Weise entwickelt worden, und verdankt diesem grossen Geometer ganz ihre gegenwärtige Gestalt. Beide Theorien führen übrigens rücksichtlich der terrestrischen Refraction ganz zu demselben Resultat, dass nämlich dieselbe der horizontalen Entfernung des Beobachtungsorts von dem beobachteten Objecte oder dem entsprechenden Winkel am Mittelpunkte der Erde proportional, also von der Zenithdistanz unabhängig sei (Lambert a. a. O. pag. 75. Théorême XXVIII. — Laplace a. a. O. pag. 278.). Was Herr Dr. Fischer über die terrestrische Refraction beibringt, betrifft eigentlich bloss die sogenannten gegenseitigen Zenithdistanzen — also bloss die Beobachtungen, gar nicht die Theorie —, schliesst sich ganz an Bessel und Bayer (Nivellement zwischen Berlin und Swinemünde, vergleiche Archiv der Mathematik und Physik. Theil I. S. 75.) an, und findet sich im Wesentlichen eben so in den meisten Werken über Geodäsie. — Nothwendig hätte nach unserer Meinung auch eine systematische Darstellung der sphäroidischen Trigonometrie, oder wenigstens der für die Geodäsie wichtigsten Aufgaben derselben in dieses Werk gehört, wie dieselbe z. B. auch Puissant ganz nach Legendre in den zweiten Theil seines bekannten grossen geodätischen Werks aufgenommen hat. Merkwürdig ist es aber auch in der That, dass die herrlichen Arbeiten von Gauss über die allgemeine Theorie der krummen Flächen, welche mit der Geodäsie in der engsten Verbindung stehen und den praktischen geodätischen Arbeiten dieses grossen Mathematikers ihre Entstehung verdanken, in diesem Werke so gut wie gar keine Berücksichtigung gefunden haben; denn die gelegentliche Erwähnung der ältesten hierher gehörenden Abhandlung von Gauss (Disquisitiones generales circa superficies curvas etc.) wird uns der Herr Vf. doch wohl nicht entgegenstellen wollen? und die neueren, diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten des grossen deutschen Geometers scheint derselbe gar nicht zu kennen. — Da jedes trigonometrische Netz gehörig astronomisch orientirt werden muss, so hätte in einem vollständigen Werke über höhere Geodäsie doch auch darüber die nöthige Belehrung gegeben werden sollen, wie sie sich wieder bei Puissant, selbst in dem Lehrbuche der höheren Geodäsie, von August Decker. Mannheim. 1836. findet; ja selbst der alte Tobias Mayer lässt sich darauf einigermassen ein. Aber darüber, also über Längen- und Breitenbestimmungen, die damit unmittelbar zusammenhängenden Zeitbestimmungen, Bestimmungen der Azimuthe u. dgl. sagt uns unser Herr Vf. so gut wie gar nichts, und sein Werk ist in dieser Beziehung ganz un-

Digitized by Google

vollständig und kann also auch nicht die vollständige Ausbildung eines Geodäten, der in Wahrheit auf diesen Namen Anspruch machen darf, bezwecken. Auch hängt es mit diesem Mangel des Werks wahrscheinlich zusammen, dass in der zweiten, die Instrumente betreffenden Abtheilung gar nichts über Reflexionsinstrumente und deren Theorie vorkommt, was wir gleichfalls nicht billigen können; denn so wenig wir die Theorie des Sextanten, Spiegelkreises, der Prismenkreise u. s. w. in einem Werke über niedere Geodäsie an ihrer Stelle halten können, so sehr sind wir doch auf der andern Seite überzeugt, dass die Beschreibung und Theorie dieser Instrumente in einem Werke über höhere Geodäsie, schon ihres wichtigen astronomischen Gebrauchs wegen, nicht fehlen darf. Auch über Kartenprojectionen enthält das Werk nicht ein Wort, wo wieder die treffliche Abhandlung von Gauss: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird, in Schumacher's Astronomischen Abhandlungen. Drittes Heft. Altona. 1825. 4. S. 1. reiches Material hätte liefern können. — Nun wir glauben schon durch diese wenigen Bemerkungen unser oben ausgesprochenes Urtheil hinreichend bestätigt zu haben. Auch nach dem Erscheinen dieses Werks werden daher immer noch Puissant's bekannte Werke (Traité de Géodésie. T. I. II. und Traité de Topographie) mit dem meisten Rechte auf systematische und eine gewisse Vollständigkeit erstrebende Darstellung Anspruch machen dürfen und vorzugsweise zum ersten Studium empfohlen werden müssen, worauf man dann zu dem Studium der betreffenden einzelnen Abhandlungen, und zwar vorzugsweise deutscher Mathematiker, übergehen kann. Die Mittheilung einiger noch ungedruckten Arbeiten des verewigten Schleiermacher in dem vorliegenden Werke muss schliesslich noch als recht dankenswerth bezeichnet werden, ein Dank, welcher nach der eigenen Angabe des Herrn Vfs. vorzüglich dem jetzigen Grossherzoglich Hessischen Kataster-Dirigenten, Herrn Oberfinanzrath Dr. Hügel, gebührt, worin wir also dem Herrn Vf. völlig beistimmen.

Optik.

L'Ottica esposta in terza rima dal padre rettore Giuseppe Giavoletti. Roma 1846.

Astronomie.

Recherches sur les mouvemens de la planéte Herschel par M. Leverrier. Paris. 1846.

Digitized by Google

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte prima. 1792—1802. Tomo secondo. 1796. Vienna. 1846. 4. — Tomo terzo. 1797—1798. Vienna. 1846. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w., und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 25ster Theil. Neuer Folge 5r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in dem Jahre 1796. Wien. 1846. 4. — 26ster Theil. Neuer Folge 6r Band. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1797 und 1798. Wien. 1846. 4.

Der erste Theil dieses Werks, für dessen Herausgabe die Astronomen Herrn Director von Littrow und Herrn Adjuncten Schaub sich zu dem lebhaftesten Danke verpflichtet fühlen müssen, ist im Literarischen Berichte Nr. XXXI. S. 464. seinem Zwecke und seiner Tendenz nach ausführlich angezeigt und seine grosse Wichtigkeit gebührend hervorgehoben worden. Indem wir uns also hier auf jene Anzeige, der wir nichts Wesentliches hinzuzusetzen wüssten, beziehen, können wir aber nicht umhin, unsere Freude über das Erscheinen der beiden neuen vorliegenden Bände und unsere Bewunderung des Fleisses und der Beharrlichkeit der Herren Herausgeber ausdrücken, mit welcher dieselben den schleunigen Fortgang des Werks, dessen Bearbeitung nothwendig mit nicht geringen Schwierigkeiten verknüpft sein muss und grosse Sorgfalt und Genauigkeit in Anspruch nimmt, zu fördern verstehen. Möge es denselben gelingen, recht bald den grossen Schatz der Piazzi'schen Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Reinheit den Astronomen vollständig in die Hände zu liefern, wofür ihnen der Dank der Mit- und Nachwelt nicht entgehen kann! dass aber auch der hohen österreichischen Regierung, durch deren Freigebigkeit allein die nothwendig mit sehr beträchtlichen Kosten verbundene Herausgabe dieses wichtigen Werks möglich gemacht wird, nicht minder der Dank jedes Freundes der Astronomie und mathematischen Wissenschaften überhaupt gebührt, versteht sich von selbst, verdient aber hier wiederholt hervorgehoben und zu allgemeinerer Kenntniss gebracht zu werden, weil solche Beispiele der Munificenz hoher und höchster Landesbehörden jeden wahren Freund der Wissenschaften mit wahrer Freude erfüllen und den Wunsch lebhaft anregen müssen, öfter auf dergleichen Beispiele hinweisen zu können. Je seltener dieselben im Allgemeinen noch sind, desto mehr verdienen sie hervorgehoben zu werden!

Kleines astronomisches Jahrbuch für 1847. Mit Benutzung der Berliner Ephemeriden herausgegeben von Fr. Eichstrom, Oberlieutenant der K. Würtembergischen Artillerie. Stuttgart. 1846. 8. 22½ Sgr.

Der Inhalt dieses kleinen astronomischen Jahrbuchs ist folgender. Zeit- und Festrechnung. Zeichen-Erklärung. Sonnen- und Mond-Ephemeride. Planeten-Ephemeride. Saturns-Ring. Jupiterstrabanten. Stern-Oerter. Erscheinungen und Beobachtungen (Sonnen- und Mond-Finsternisse. Planeten-Constellationen. Stern-

bedeckungen). Hilfstafeln (Geographische Lage der Haupt-Sternwarten. Refractions-Tafel. Zur Verwandlung der mittlern Zeit in Sternzeit. Zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit.). Ueber die Einrichtung des Jahrbuchs und dessen Gebrauch.

Diese kleinen Ephemeriden scheinen uns Liebhabern der Astronomie recht sehr empfohlen zu werden zu verdienen, und in einer zweckmässigen Auswahl alles dasjenige zu enthalten, was ein solcher wünschen kann. Die Angaben in Zeit und Winkeln sind bis auf Secunden, theilweise selbst bis auf Zehntheile der Secunde genau, was wir völlig billigen müssen, da das Büchlein nun auch selbst für genauere Beobachtungen brauchbar wird, und blosse Dilettanten leicht das weglassen können, was sie für ihre Zwecke als überflüssig zu betrachten geneigt sein dürften. Eben so sehr müssen wir es billigen, dass der Herr Vf. überall Berliner Zeit zum Grunde gelegt hat, was gewiss seiner Arbeit zu grösserer und allgemeinerer Verbreitung, die sie uns, wie schon erinnert, recht sehr zu verdienen scheint, behülflich sein wird. Die Sonnenparallelaxe ist in Minuten und Secunden angegeben, was wir für den blossen Liebhaber der Astronomie und überhaupt für die gewöhnlichen Zwecke bequemer halten, als wenn wie in den grössern Ephemeriden der Logarithmus der Entfernung der Sonne von der Erde angegeben wird, wenn auch freilich für streng wissenschaftliche Zwecke der letztern Methode jedenfalls der Vorzug gebührt. Druck und Papier, überhaupt die äussere Ausstattung des Werkchens, sind sehr schön und werden gewiss auch dazu beitragen, dasselbe in einem weitern Kreise zu verbreiten, wie dasselbe nach unserer Meinung verdient. Schliesslich wünschen wir, dass der Herr Vf. die künftigen Jahrgänge möglichst zeitig herausgeben möge, dass dieselben immer wenigstens jedenfalls vor Anfang des Jahrs, dessen Zahl der Jahrgang auf seinem Titel trägt, in die Hände der Himmelsbeobachter kommen. Mögen der Herr Herausgeber und die Verlagshandlung alle Aufmunterung zur Fortsetzung ihres Unternehmens finden! Einen solchen Auszug aus den trefflichen Berliner Ephemeriden haben wir längst gewünscht, und sind überzeugt, dass derselbe recht vielen Nutzen stiften wird.

Gruithuisen, Fr. v. P., naturwissenschaftlich-astronomisches Jahrbuch für 1848. München. 1847. 2⅔ Rthlr.

Fünfzehnjährige Hygrometer-Beobachtungen (1829 bis 1333, 1836 bis 1845) an der k. k. Sternwarte zu Wien, reducirt von Dr. C. Jelinek. 4.

Ob diese lithographirten Hygrometer-Beobachtungen auf dem Wege des Buchhandels zu erhalten sind, wissen wir nicht; jedenfalls sind aber die Meteorologen wegen der ziemlich grossen Reihe von Jahren, welche dieselben umfassen, auf sie aufmerksam zu machen, und Herr Dr. Jelinek verdient gewiss Dank für seine auf die Reduction verwandte nicht geringe Mühe, wie Jeder weiss, wer sich mit dergleichen Reductionen beschäftigt hat.

Digitized by Google

Physik.

Leitfaden für die physikalischen Vorträge, zunächst in den oberen Klassen des Königl. Preussischen Cadetten-Corps. Von Dr. W. Beetz. Berlin. 1846. 8. $^4/_5$ Rthl.

Ein ganz kurzer Leitfaden über die Hauptlehren der Physik, der auch auf möglichst einfache und leichte mathematische Begründung, oder wenigstens Darstellung der Gesetze in mathematischer Form, wo dies nothwendig und thunlich ist, die nöthige Rücksicht nimmt. Wir glauben, dass das Büchlein in der Hand eines geschickten Lehrers, dessen Erläuterung es natürlich sehr bedarf, bei dem physikalischen Unterrichte zweckmässig als Leitfaden gebraucht werden kann.

Muncke, G. W., populäre Wärmelehre oder Darstellung des Wesens und Verhaltens der Wärme. gr. 8. Leipzig. 1847. $1^1/_5$ Rthlr.

Wöckel, L., die Lehre von der Wärme. gr. 8. Nürnberg. 1847. $^5/_6$ Rthlr.

Vermischte Schriften.

Annuaire de l'Observatoire Royal de Bruxelles, par A. Quetelet, Directeur de cet établissement. 1847. 14e année. Bruxelles. 1846. 12. 20 Sgr.

Der reiche Inhalt dieses Annuaire ist im Literarischen Berichte Nr. XXIX. S. 443. bei Gelegenheit eines frühern Jahrgangs, mit welchem der vorliegende im Wesentlichen gleiche Einrichtung hat, angegeben worden, worauf daher hier, mit einer wiederholten Empfehlung des gewiss sehr empfehlenswerthen Buchs, zu verweisen genügend sein wird.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A. Fellow of St. Peter's College, Cambridge. (Vergl. Liter. Ber. Nr. XXXIV. S. 506.)

Nos. VIII. & IX. On the Degree of a Surface Reciprocal to a given one. By Rev. George Salmon. — Note on the Parabolic Points of Surfaces. By Rev. George Salmon. — Evaluation of a Definite Integral. By Francis W. Newman. — On Logarithmic Integrals of the Second Order. Part. I. By Francis W. Newman. — On the Laws of Equilibrium and Motion of Solid and Fluid Bodies. By Samuel Haughton. — On certain Definite Integrals suggested by Problems in the Theory of Electricity. By William Thomson. — On certain Formulae for Differentiation, with Applications to he Evaluation of Definite Integrals. By A. Cayley. — On the Caustic by Reflection at a Circle. By A. Cayley. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. On certain Symbolical Representations

Digitized by Google

of Functions. By the Rev. Brice Bronwin. — On Principal Axes of a Body their Moments of Inertia, and Distribution in Space. Continued. By R. Townsend. — (No. X. will be published on the 15th of May. 1847.)

Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Nr. III.

Diese Nummer enthält die beiden folgenden lesenswerthen mathematischen Aufsätze: Ueber die phoronomische Deutung des Taylorschen Theorems von Herrn Möbius und Ueber die Begründung eines Gesetzes zur Bestimmung des scheinbaren Alters des Menschen aus äussern Merkmalen und den gesetzlichen Zusammenhang des scheinbaren Alters mit dem wirklichen von Herrn Drobisch. — Die übrigen Aufsätze sind chemischen und physiologischen Inhalts.

Preise der Petzval'schen Beleuchtungs-Apparate bei Franz Waibl, Optiker und Mechaniker in Wien, Mariahilf Hauptstrasse Nr. 40., zur goldenen Weintraube.

(Vergl. Literar. Ber. Nr. XXVIII. S. 420.)

Einfacher	Apparat	mittlerer	Gattung	140	Fr.	C.M.
„	„	kleinerer	„	90	„	„
Doppelter	„	mittlerer	„	700	„	„
„	„	kleinerer	„	500	„	„

1 Preuss. Reichsthlr. = 1.43 Fr. C.M.

(Von Herrn Director von Littrow zu Wien gefälligst mitgetheilt.)

Berichtigungen.

In den Nouvelles Annales de Mathématiques. Décembre. 1846. (T. V.) p. 687. hat Herr Lebesgue, professeur à la faculté de Bordeaux, angezeigt, dass in den auch im Archive. Thl. VI. S. 54. mitgetheilten numerischen Ausdrücken des Herrn Amiot, professeur au collége Saint-Louis, für das reguläre Siebzehneck statt $68+14\sqrt{17}$ gesetzt werden müsse: $68+12\sqrt{17}$, was ich hier zur Kenntniss der Leser des Archivs bringe, um auch im Archive die angezeigte Berichtigung vornehmen zu können.

In dem Literarischen Berichte Nr. XXXIII. S. 492. Z. 26. und Nr. XXXIV. S. 506. Z. 16. ist „Edited“ statt „Etited“ zu setzen.

In dem Literarischen Berichte Nr. XXXIV. S. 501. Z. 20. (Thl. IX. Heft 2.) setze man „Verbreitung“ statt „Vorbereitung.“ G.

Digitized by Google

XXXVI.
Literarischer Bericht.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Den astronomischen Nachrichten ist als Beilage beigegeben: A brief Notice of the Life, Researches and Discoveries of Friedrich Wilhelm Bessel. By Sir J. F. W. Herschel. (Extracted from the Annual Report of the Royal Astronomical Society.) London. 1847. 8.

Arithmetik.

Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Welttheile. Nebst ausführlichern Bemerkungen über die Zahlwörter Indogermanischen Stammes und einem Anhange über Fingernamen. Von Dr. August Friedrich Pott, Professor zu Halle. Halle. 1847. 8. 1 Rtlr. 24 Sgr.

Für Mathematiker wird es genügen, von der Existenz dieses Buchs in Kenntniss gesetzt zu werden.

Niedere Grössenrechnung. Vom Professor Doctor M. G. Paucker. In acht Abtheilungen. Mitau. 1846. 8. Preis 75 Kop. S.

Erste Abtheilung. Die Höhe. *Zweite Abtheilung.* Die niedere Gleichung. *Dritte Abtheilung.* Die Reihe. *Vierte Abtheilung.* Die Messgleichung. *Fünfte Abtheilung.* Anwendung der Höhennamen auf Handelsrechnungen. *Sechste Abtheilung.* Die mehrstellige Einstufung. *Siebente Abtheilung.* Die Stufungen. *Achte Abtheilung.* Berechnung der Höhennamen.

Digitized by Google

Diese Schrift enthält eine nicht geringe Anzahl eigenthümlicher Darstellungen und Methoden, hauptsächlich in der Lehre von den Gleichungen, besonders von den Gleichungen des dritten und vierten Grades, und von der Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, in welcher letzteren Beziehung der Herr Vf. auch in einem Anhange zur siebenten Abtheilung das, was in dieser wichtigen Lehre von älteren und neueren Mathematikern geleistet worden ist (Harriot. Descartes. 1637. — Olivier. 1826. — Newton. — Lagrange. 1767. — Waring. 1762. Lagrange. 1767. — Taylor. 1715. — Newton. 1676. — Fourier. 1789—1831. — Fourier. — Fourier. — Sturm. 1829. — Hudde. — Rolle.), zwar nur kurz, aber doch in ziemlicher Vollständigkeit, zusammenstellt.

Aber nicht bloss aus diesen Gründen, sondern auch noch in einer anderen Rücksicht müssen wir die vorliegende Schrift den Lesern des Archivs zu ganz besonderer Berücksichtigung empfehlen. Dieselbe enthält nämlich einen so reichen Schatz von Beispielen, besonders für die gesammte Lehre von den Gleichungen, namentlich auch für die Lehre von der Auflösung der höheren numerischen Gleichungen, wie wir in einer Schrift von ähnlichem Umfange uns nicht gefunden zu haben erinnern, und der Herr Vf. muss grosse Zeit und Mühe auf deren Bearbeitung verwandt haben, hat sich aber dadurch auch jedenfalls um den Unterricht in diesem wichtigen Theile der Mathematik ein sehr wesentliches Verdienst erworben, da dergleichen Beispiele durchaus nicht im Ueberfluss schon vorhanden sind, und wir, wie gesagt, nicht wüssten, wo anderwärts so vieles Zweckmässige und mit grosser Sorgfalt und Umsicht Durchgeführte auf so kleinem Raume sich vereinigt fände. Wir empfehlen daher wiederholt auch diese Seite der vorliegenden Schrift, namentlich Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichtsanstalten, angelegentlichst.

Rücksichtlich der von dem Herrn Verfasser gebrauchten neuen Kunstausdrücke ist im Wesentlichen dasselbe zu sagen, was wir bei seiner Bildlehre im Literar. Ber. Nr. XXXV. S. 515. uns zu bemerken erlaubt haben.

Élémens d'Algèbre par J. Pelletier. Lons-le-Saulnier. 1847. 8.

Problèmes d'Algèbre et exercices de calcul algébrique avec les solutions; par M. Ritt. Trois. éd. Paris. 1847. 8. 5—0.

Ueber die Verwandlung der Wurzeln quadratischer Gleichungen in Kettenbrüche, eine zu dem Programm des Kurfürstlichen Gymnasiums zu Cassel von 1847 gehörige Abhandlung von Dr. E. W. Grebe, Gymnasiallehrer in Cassel. Cassel. 1847. 4.

Dieses sehr beachtenswerthe Programm enthält die folgenden Abtheilungen. I. *Allgemeine theoretische Betrachtungen*, bei denen der Herr Vf. nach seiner eignen Angabe nur den Zweck hat, die Lehren, welche sich auf das Verwandeln der Wurzeln quadratischer Gleichungen in gemeine Kettenbrüche beziehen, dem Anfänger zugänglicher zu machen, weshalb er bei denselben auf sehr zweckmässige Weise aus der Lehre von den Kettenbrüchen

Digitized by Google

nichts als den Begriff der letzteren voraussetzt. II. *Praktisches.* 1. Verwandlung der Wurzeln einzelner quadratischer Gleichungen in Kettenbrüche. 2. Aufsuchung einer geordneten Zusammenstellung von quadratischen Gleichungen mit den dieselben auflösenden periodischen Kettenbrüchen. In diesem letztern Theile, den wir für besonders verdienstlich halten und wegen dessen wir die Schrift vorzüglich zu allgemeinerer Beachtung sehr empfehlen, sucht der Herr Vf. zuerst das einer solchen Zusammenstellung am Besten zum Grunde zu legende Princip auf, worüber die Leser des Archivs die Schrift selbst nachzusehen haben, und theilt dann auf S. 16. bis S. 32. eine sehr fleissig und umsichtig berechnete Tafel Quadratischer Gleichungen, wie sie zu den periodischen Kettenbrüchen gehören, nach den betreffenden Irrationalzahlen geordnet mit, welche natürlich zugleich ein reiches Material von Beispielen für die betreffende wichtige Lehre der allgemeinen Arithmetik liefert, und nach der von dem Herrn Vf. gewählten Anordnung alle Irrationalzahlen von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, u. s. w. an bis $\sqrt{117}$, $\sqrt{118}$, $\sqrt{119}$, $\sqrt{120}$ durchläuft. Die in Aussicht gestellte Bekanntmachung der schon berechneten weiteren Fortsetzung dieser Tafel halten wir für sehr wünschenswerth, und würden selbst der ganzen Tafel, wenn der Herr Vf. dieselbe nur mit einer nöthigen kurzen Einleitung über das ihr zum Grunde liegende Princip, ihre daraus sich von selbst ergebende Einrichtung und ihren etwa auch durch ein Paar Beispiele zu erläuternden Gebrauch versehen wollte, sehr gern einen Platz im Archiv einräumen, wenn der Herr Vf. uns dieselbe für diese Zeitschrift mittheilen wollte, was wir der zu wünschenden möglichst weiten Verbreitung dieser verdienstlichen Arbeit für förderlich zu halten berechtigt zu sein glauben. Diese allen Lesern des Archivs gewiss sehr erwünschte Mittheilung in demselben zu machen, erlauben wir uns daher den Herrn Vf. hierdurch aufzufordern. Für nicht minder verdienstlich halten wir endlich die von dem Herrn Vf. gleichfalls in Aussicht gestellte Bekanntmachung seiner Untersuchungen über die Auflösung höherer Gleichungen, namentlich der des dritten Grades, durch Kettenbrüche, und fordern ihn auf, nicht zu lange auf dieselbe warten zu lassen.

Mathematische Exkursionen. Von J. E. Fleischer (Programm der höheren Bürgerschule zu Treptow an der Rega von Ostern 1847). Treptow a. d. Rega. 4.

Da der Herr Verfasser dieser Schrift zu den liebsten Schülern des Herausgebers des Archivs der Mathematik und Physik gehört, und in derselben sein eigener Name mehrfach auf eine von der treuesten Anhänglichkeit zeugende Weise genannt wird, wofür der Herausgeber dem Herrn Vf. nur auf das Freundschaftlichste danken kann, so muss sich derselbe, um nicht den Schein einer ihm zwar sonst ganz fremden Partheilichkeit auf sich zu laden, hier mit einer kurzen Angabe des wesentlichen Inhalts der vorliegenden Schrift begnügen. Der Herausgeber des Archivs glaubt nämlich allerdings, wie der Herr Vf. auf S. 1. zu bemerken die Güte hat, zuerst die höheren Differentialquotienten der Function

$$y = \text{Arctang}\, x,$$

Digitized by Google

und demnächst auch von Arccot x, auf die sehr einfache und bequeme Form

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 1.2.3....(n-1)(-1)^{n-1} \cos y^n \sin n(\tfrac{1}{2}\pi - y)$$

gebracht, d. h. diese Differentialquotienten im Allgemeinen durch den Cosinus von $y =$ Arctang x ausgedrückt zu haben. Ganz dasselbe leistet nun der Herr Vf. in der vorliegenden Schrift für die Function $y =$ Arcsin x, für deren Differentiale bekanntlich zuerst Euler einen nicht leicht zu entwickelnden Ausdruck unmittelbar durch die Variable x gegeben hat, und demnächst auch für die Function $y =$ Arccos x, und gelangt dadurch zu nach leicht übersehbaren Gesetzen fortschreitenden wenig complicirten Formeln, die er unter verschiedenen Formen — auch nach einer von Schweins in seiner Theorie der Differenzen und Differentiale öfters in Anwendung gebrachten Methode, durch welche aber freilich nur sonst in ihrer Bildung ganz klar vor Augen liegende und zur unmittelbaren Anwendung vorbereitete Formeln mehr in einander geschoben werden, wenn wir so sagen dürfen *) — ausdrückt. Die Formeln für die höheren Differentiale von Arcsinvers x und Arccosvers x ergaben sich dann auch unmittelbar.

In der zweiten kürzern Abtheilung der Schrift entwickelt der Herr Vf. noch einige sonst schon bekannte Integrale auf eine von andern allgemeinern Integrationsmethoden unabhängige Weise und schliesst mit einigen Betrachtungen über die Cycloide.

Traité général et complet, théorique et pratique du calcul des intérêts composés etc., du calcul des intérêts simples etc. Par L. Moulin-Collin. Paris. 1847. 4.

Geometrie.

Théorie des parallèles, démontrée d'une manière simple et rigoureuse, sans aucune considération de l'infinie, par Achille Lefrançois. Paris. 1847. 8.

Traité des réciproques de la géométrie élémentaire de Legendre, suivi des notes et d'un appendice par J. Joanet. Paris. 1847. 8.

Problèmes de géométrie et de trigonométrie, avec la méthode à suivre pour la résolution des problèmes de géométrie et les solutions; par M. Ritt. Trois. éd. Paris 1847. 8. 5—0.

*) Einer wenigstens in ihrem Princip ganz ähnlichen Methode hat sich auch Libri bei verschiedener Gelegenheit, z. B. bei den bekannten, eigentlich nur recurrirenden Gleichungen für die Bernoulli'schen Zahlen (Supplemente zum mathematischen Wörterbuche. Thl. I. Art. Bernoulli'sche Zahlen) bedient.

Digitized by Google

Traité de Géométrie déscriptive par J. Adhémar. Trois. éd. Paris. 1847. 8. 20—0.

Programm der Gewerbschule zu Winterthur, zur Eröffnung des neuen, mit dem 11. April 1847 beginnenden Schuljahres. Inhalt: Einige geometrische Aufgaben, algebraisch und geometrisch gelöst von C. Adams. Winterthur. 1847. 4.

Der Herr Vf. dieses Programms, welcher sich schon durch mehrere in den Literarischen Berichten des Archivs sämmtlich angezeigte Schriften um die Geometrie vielfach verdient gemacht hat, beabsichtigt in diesem Programm namentlich, die algebraische und rein geometrische Auflösung geometrischer Aufgaben durch Beispiele zu erläutern und beide Auflösungsmethoden an derselben Aufgabe gewissermassen zu parallelisiren. Die aufgelösten Aufgaben sind folgende: 1. In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat zu beschreiben. 2. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck zu beschreiben, dessen Seiten ein gegebenes Verhältniss zu einander haben. 3. In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck von gegebenem Inhalte zu beschreiben. 4. In ein Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so zu beschreiben, dass die eine Ecke dieses Dreiecks mit einer Ecke des Quadrates zusammenfalle. 5. Es ist ein Winkel und in der Halbirungslinie desselben ein Punkt gegeben: man soll durch diesen Punkt eine Gerade so ziehen, dass das zwischen den Schenkeln des Winkels enthaltene Stück derselben eine gegebene Grösse habe. — Wir halten die gegebenen Auflösungen für lehrreich und meistens auch für einfach und elegant, und empfehlen daher die vorliegende Schrift zu allgemeinerer Beachtung, wünschen auch, dass der Herr Vf. sein Vorhaben, eine grössere Sammlung solcher auf diese Weise behandelter Aufgaben herauszugeben, in Ausführung bringen möge.

Trigonometrie.

Élémens de Trigonométrie par Lefebure de Fourcy. Sixième éd. Paris. 1847. 8.

Geodäsie.

Erste Anleitung im Operiren mit den gebräuchlichsten Messinstrumenten. Vorschule für diejenigen, die sich der praktischen Geometrie widmen wollen. Von Thadd. J. Kotzura, öffentlichem Professor der Mathematik. Mit 6 lithogr. Tafeln. Leipzig. 1847. 8. 15 Sgr.

Digitized by Google

Diese Schrift scheint zu verdienen, denen, welche die einfachsten Messoperationen mit den gebräuchlichsten Instrumenten etwa zu ökonomischen Zwecken in der Kürze kennen zu lernen wünschen, als recht deutlich und zweckmässig empfohlen zu werden. Auch bei dem ersten Unterrichte in der praktischen Geometrie auf Real- und Bürgerschulen scheint das Büchlein zweckmässig zum Grunde gelegt werden zu können.

Mechanik.

Die Principien der Hydrostatik und Hydraulik. Von H. Scheffler. Erster Band. Erste Lieferung. 20 Sgr. Erster Band. Zweite und dritte Lieferung. $1^{2}/_{3}$ Rthlr. Mit über 200 in den Text gedruckten Holzschnitten. Braunschweig. 1847. 8.

Eine neue Bearbeitung der Hydrostatik und Hydraulik mit fortwährender Anwendung der höheren Analysis, wie sie der Herr Vf. in diesem Buche, von welchem uns bis jetzt drei Lieferungen vorliegen, zu liefern unternimmt, scheint uns allerdings Bedürfniss zu sein, und wir empfehlen dasselbe daher sowohl den theoretischen Mathematikern, als auch den Technikern zur Beachtung. Nur erst wenn dasselbe vollständig erschienen ist, wird eine weitere Besprechung zulässig und zweckmässig sein.

Astronomie.

Die Astronomie in populärer Darstellung von Dr. G. L. Schulze, Königl. Sächsischem Geheimen Kirchen- und Schulrathe. Mit vielen Holzschnitten und einer lithographirten Sternkarte. Leipzig. 1847. 8. $22^{1}/_{2}$ Sgr.

Eine, wie es bei flüchtiger Durchsicht scheint, ganz populäre, sehr deutliche, auch die neuesten Entdeckungen berücksichtigende Darstellung der Hauptlehren der Astronomie von dem schon durch frühere Leistungen auf diesem Gebiete vortheilhaft bekannten Herrn Verfasser. Bald werden wir nun aber genug solche Darstellungen der Astronomie in populärem Gewande haben!

Elementare Darstellung der Analyse der Fixstern-Beobachtungen des Herrn Geheimen Rath Bessel, von C. Rümker. Zweite Abtheilung. (Enthaltend, die Anwendung der Correctionsformeln zur Ausmittelung der Fehler der Monds-Tafeln mit Anwendung auf die Bedeckung der Plejaden am 10. August 1846). Hamburg. 1847. 4.

Digitized by Google

Die erste Abtheilung dieser Schrift ist im Literar. Ber. Nr. XXX. S. 453. angezeigt worden. Ueber die vorliegende zweite Abtheilung spricht sich der Herr Vf. auf folgende Art aus: „Am Schlusse des letzten Jahresberichtes der mathematischen Gesellschaft wurde mit Hinweisung auf das daselbst gegebene Beispiel bemerkt, dass, wenn nur Eintritte oder nur Austritte beobachtet sind, die Verbesserungen der Monds-Tafeln, in Ermangelung von Meridian-Beobachtungen, sich nur durch die als richtig zu Grunde gelegte Länge eines der Beobachtungsorte bestimmen lassen. Die Absicht der gegenwärtigen Zeilen ist, zu zeigen, wie sich diese Verbesserungen aus den Beobachtungen selbst ableiten lassen, wenn beide Phasen an verschiedenen Oertern beobachtet sind." Für alle, welche sich mit ähnlichen Rechnungen beschäftigen wollen, wird das in dieser Schrift ausführlich mitgetheilte, auf dem Titel schon näher bezeichnete Beispiel eine sehr gute Anleitung sein, um auf dem besten Wege zum Ziele zu gelangen.

Grundzüge der neueren astronomischen Beobachtungs-Kunst. Entworfen von Dr. C. T. Anger, Professor. Danzig. 1847. 4. 15 Sgr.

Einen Auszug aus dieser in jeder Beziehung sehr lesenswerthen Schrift hier zu geben, ist leider in der Kürze nicht wohl möglich. Wir empfehlen dieselbe daher nur im Allgemeinen aus vollkommenster Ueberzeugung allen denen, welche sich ein recht deutliches Bild von den Principien zu verschaffen wünschen, welche der neueren astronomischen Beobachtungskunst zum Grunde liegen, und bemerken, dass die Schrift, in welcher der Herr Vf. vielfach die Ansichten, welche man in älterer Zeit befolgte, mit den neueren zusammenstellt, auch häufig wirklich angestellte Beobachtungen als Beispiele gebraucht und dadurch seiner Darstellung einen hohen Grad von Deutlichkeit zu verleihen gewusst hat, einem Jeden verständlich ist, wer sich nur im Besitze der allgemeinsten astronomischen Begriffe und Kenntnisse befindet. Zugleich hat der Herr Vf. durch diese Schrift dem der Wissenschaft leider zu früh entrissenen Bessel, welcher ohne Widerrede als der eigentliche Begründer der neueren astronomischen Beobachtungskunst angesehen werden muss, ein neues schönes Denkmal gesetzt.

„Fassen wir das Bisherige zusammen" — sagt der Herr Vf. am Schlusse seiner Schrift — „so ergiebt sich aus den angestellten Betrachtungen, dass weder durch die Genauigkeit der Operation während des Observirens, noch durch die optische Kraft oder mechanische Vollendung der Instrumente, die sicheren Resultate, welche wir gegenwärtig besitzen, herbeigeführt wurden. Der Auffassung der Astronomie als einer grossen Wissenschaft hat die neuere Beobachtungskunst ihre Entstehung zu danken. Denn der Zusammenhang zwischen dem Beobachten, dem Rechnen und den mathematischen Untersuchungen, ist kein zufälliger, er ist durch die Natur der Aufgabe bedingt: den ganzen Sternenhimmel mit allen seinen Erscheinungen dem menschlichen Geiste so anschaulich zu machen, dass innerhalb der Wissenschaft kein Zweifel über die Realität des Erkannten möglich sei."

Digitized by Google

Möchte sich doch Gleiches, ja nur Aehnliches, auch von den übrigen Naturwissenschaften sagen lassen!

Physik.

Ueber das Verhalten zwischen der Naturauffassung des Denkens und der Einbildungskraft. Von H. C. Oersted. Deutsch von H. Zeise. Altona. 1847. 8. 6 Sgr.

Resultate des magnetischen Observatoriums in München während der dreijährigen Periode 1843, 1844, 1845 von Dr. J. Lamont. Beigefügt sind: Magnetische Messungen auf einer Reise nach Deutschland und Frankreich im Jahre 1844 von Dr. J. A. Angström, Observator der Sternwarte in Upsala. München. 1846. 4°.

Ausser ihrem Hauptinhalte ist diese Schrift auch sehr lehrreich und interessant wegen der von Herrn Doctor Lamont vorausgeschickten Beschreibung der kleinern von ihm construirten magnetischen Instrumente, namentlich der Variationsinstrumente, des magnetischen Theodoliten und des magnetischen Reisetheodoliten, die auch durch Zeichnungen versinnlicht und zu gebrauchen gelehrt worden sind. Wir empfehlen daher diese Schrift aus dem angegebenen Grunde allen denen, welche diese für den beabsichtigten Zweck gewiss sehr geeigneten Instrumente, die uns überhaupt eine weitere Verbreitung, als sie bis jetzt noch gefunden haben dürften, zu verdienen scheinen, genauer kennen zu lernen wünschen und sich selbst mit magnetischen Beobachtungen zu beschäftigen beabsichtigen.

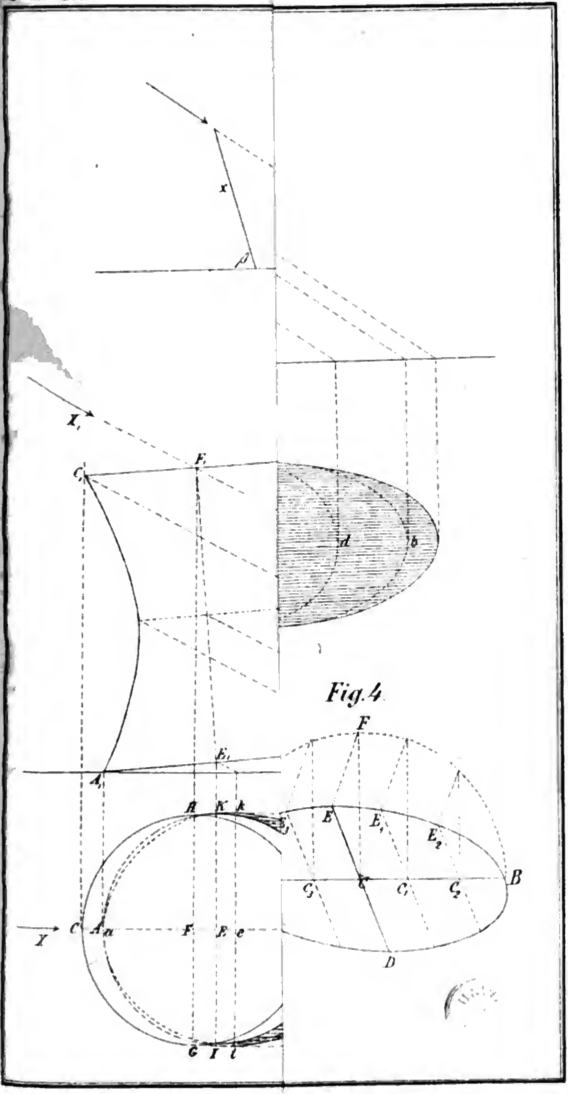
Zeitschrift der k. k. Gesellschaft der Aerzte zu Wien. Redakteur: Primararzt Dr. Karl Haller. Dritter Jahrgang. Heft 8. und 9. (Beiträge zur Lehre vom Magnetismus.) Wien. 1846. 8. 1 Rthlr.

Auch für Physiker wird die in diesen beiden Heften enthaltene höchst ausführliche und genaue, völlig aktenmässige Erzählung der Betrügereien der Somnambule Leopoldine R. in Wien, und der Verirrungen und Täuschungen, denen sich selbst manche Aerzte in solchen Fällen leider hingeben, lehrreich und interessant sein, eben so wie dieselbe beides für uns gewesen ist.

Druckfehler im neunten Theile.

Heft I. S. 47. Z. 8. für „nur“ s. m. „nun“.
„ „ S. 47. Z. 26 für x s. m. X.
„ III. S. 233. und Heft IV. S. 383. streiche man in „Auctore“ (in den Ueberschriften der Aufsätze Nr. XXII. u. Nr. XLIV.) das „e“.
„ „ S. 245. Z. 14. v. u. für „pag. 234“ s. m. „pag. 235“.
„ „ S. 247. Z. 14. für „T. VI.“ s. m. „T. VII.“
„ „ S. 248. Z. 4. v. u. für „e logarithmorum“ s. m. „e-logarithmorum.“

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Go

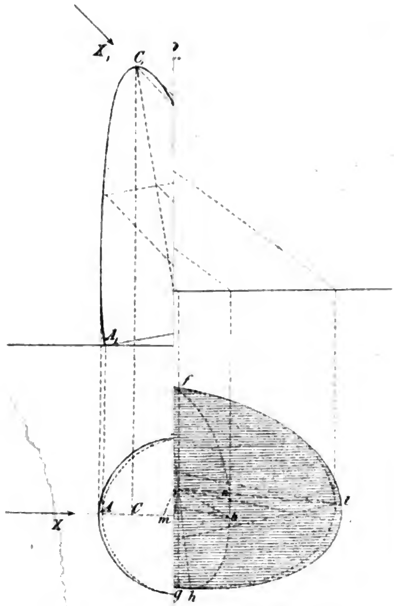
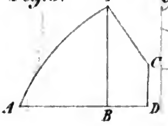


Fig. 3.



g. 5.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig 1.

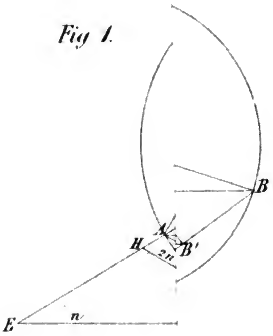


Fig. 5.

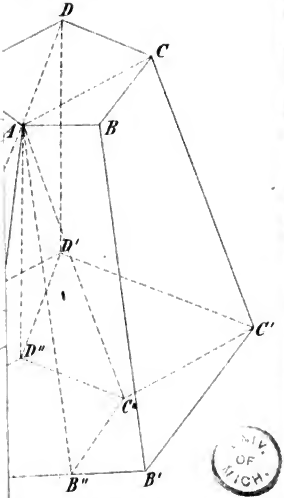
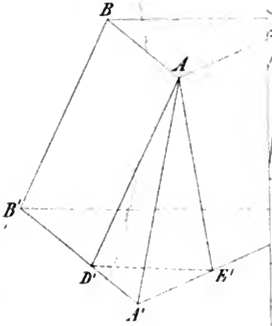


Fig. 3.



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1. Fig. 3.

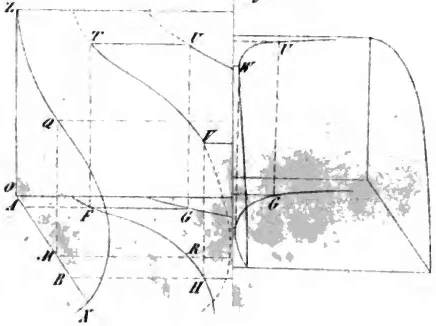
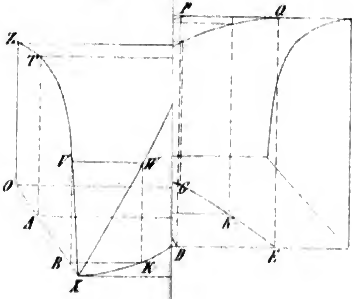


Fig. 6.

Fig. 4.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

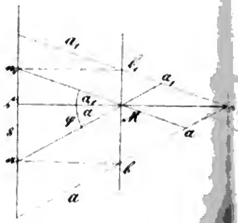


Fig. 4.

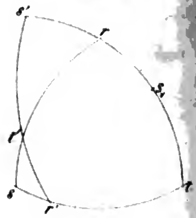


Fig. 5.

Digitized by Google

Fig. 1.

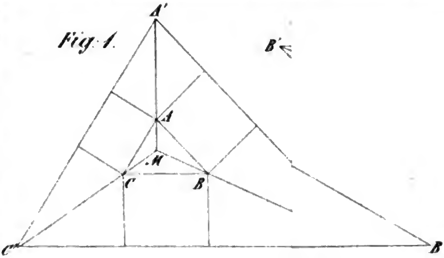


Fig. 2.

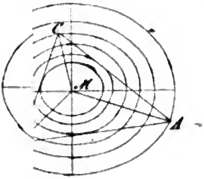


Fig. 5.

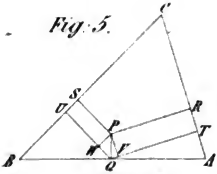


Fig. 10.

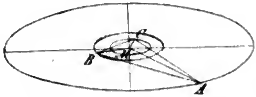
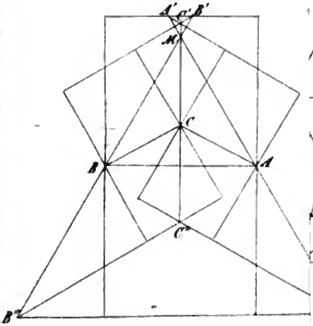


Fig. 14.

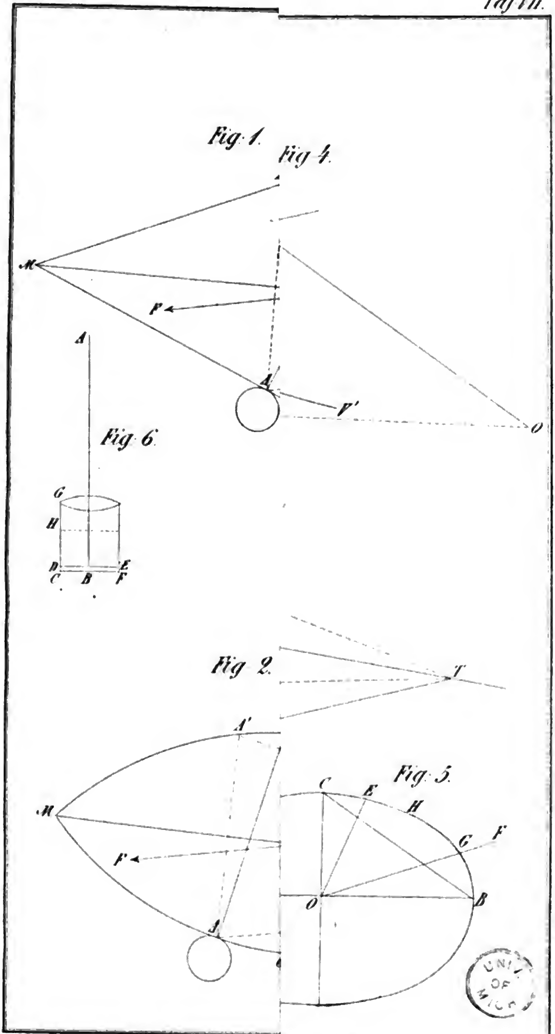
Fig. 11.



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

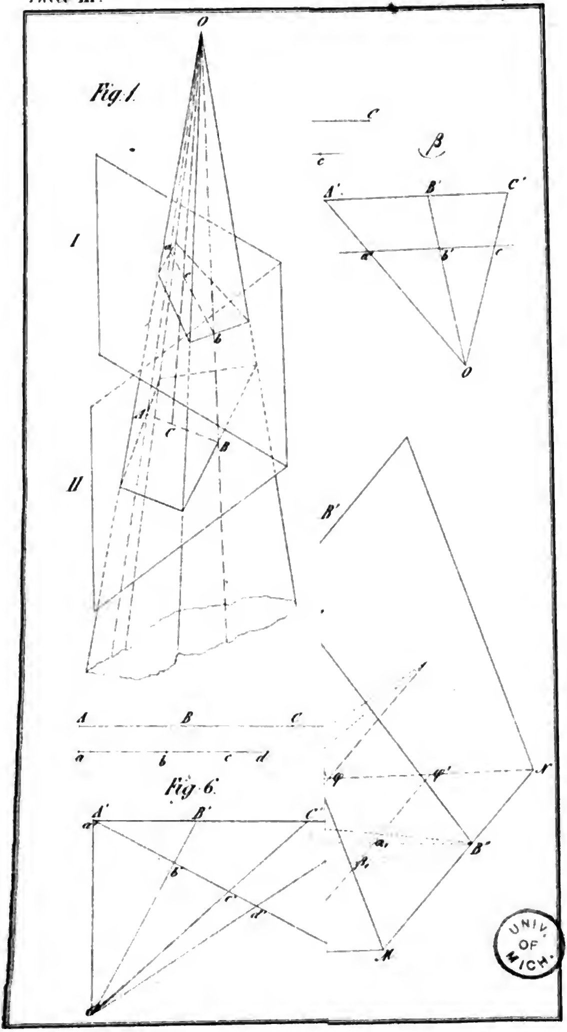
Digitized by Google



UNIV OF MICH

Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1. Fig. 3.

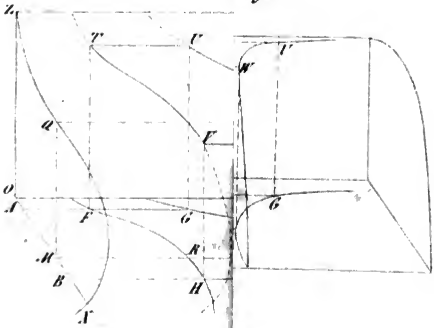
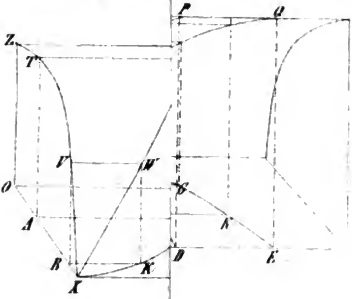


Fig. 6.

Fig. 4.



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1.

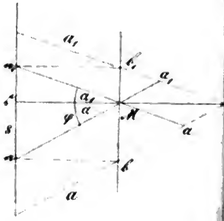


Fig. 3.

Fig. 4.

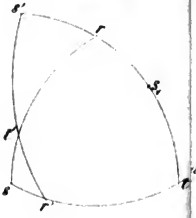
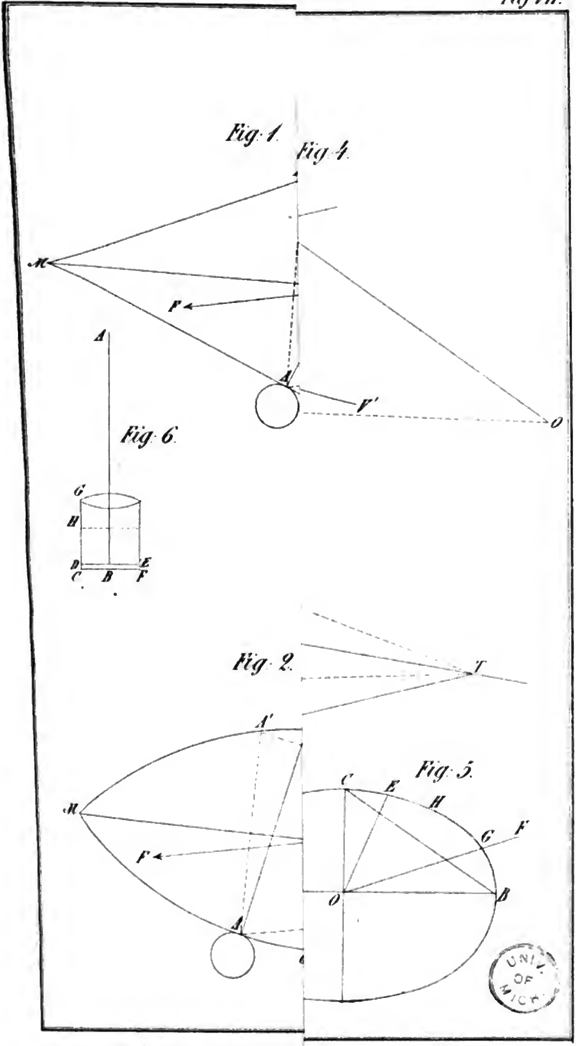


Fig. 5.

Fig. 6.

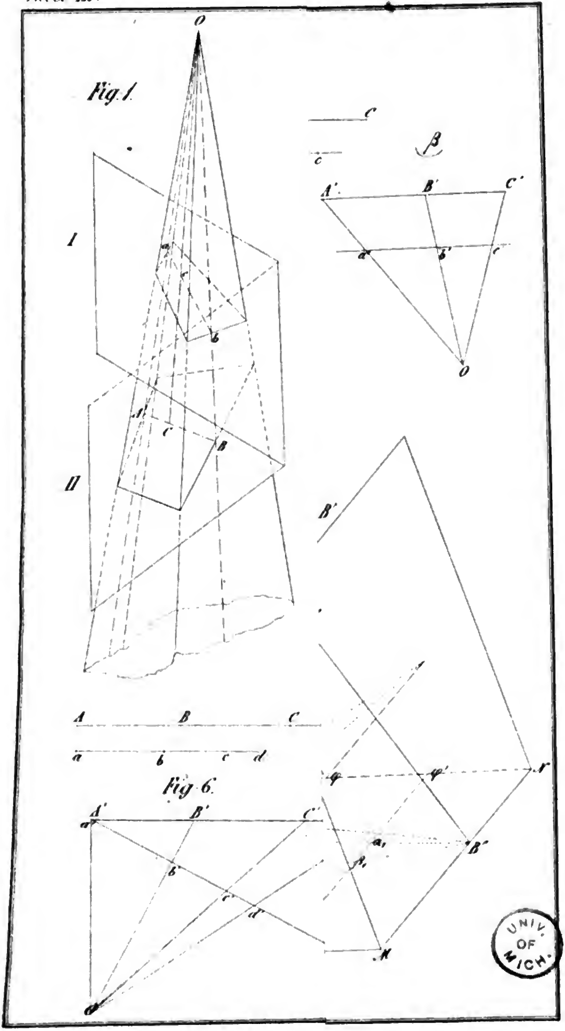
UNIV OF MICH.

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.
Digitized by Google

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Zehnter Theil.

Mit sieben lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1847.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des zehnten Theils.

Arithmetik.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
II.	Zur Differenziation der Potenz. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	I.	42
III.	Ueber eine eigenthümliche Erscheinung bei Reihensummirungen. Von Demselben.	I.	45
VI.	Ueber eine besondere Gattung algebraischer Funktionen. Von Demselben.	I.	67
VII.	Ueber die Differenziation unendlicher Reihen. Von Demselben.	I.	74
X.	Ueber einige Sätze der höheren Arithmetik. Von Herrn Wilhelm Mösta, Lehramts-Candidaten zu Cassel.	I.	98
XXII.	Ueber einige bestimmte Integrale. Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.	III.	225
XXIII.	Ueber einige bestimmte Integrale, welche sich auf die beiden Integrale $\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x}$, $\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x}\partial x$ zurückführen lassen. Von Demselben.	III.	233
XXIV.	Ueber eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen für einen Werth der Veränderlichen zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird. Von Demselben.	III.	240

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXV.	Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$. Von Demselben.	III.	247
XXVI.	Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gammafunction. Von Demselben.	III.	250
XXVII.	Zwei Entwickelungen des bestimmten Integrals $\int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$. Von Demselben.	III.	253
XXIX.	Vollständige independente Auflösung der n Gleichungen des ersten Grades $A_1+A_2\alpha_1+A_3\alpha_1^2+A_4\alpha_1^3+\ldots+A_n\alpha_1^{n-1}=a_1$, $A_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_2^2+A_4\alpha_2^3+\ldots+A_n\alpha_2^{n-1}=a_2$, $A_1+A_2\alpha_3+A_3\alpha_3^2+A_4\alpha_3^3+\ldots+A_n\alpha_3^{n-1}=a_3$, $A_1+A_2\alpha_4+A_3\alpha_4^2+A_4\alpha_4^3+\ldots+A_n\alpha_4^{n-1}=a_4$, u. s. w. $A_1+A_2\alpha_n+A_3\alpha_n^2+A_4\alpha_n^3+\ldots+A_n\alpha_n^{n-1}=a_n$ zwischen den n unbekannten Grössen $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_n$; nebst einigen merkwürdigen arithmetischen Sätzen. Von dem Herausgeber.	III.	284
XXX.	Ueber einige Sätze der Zahlenlehre. Von Demselben.	III.	302
XXXII.	Mein letztes Wort gegen Herrn Doctor Barfuss. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	III.	321
XXXIV.	Bemerkung über die Lambertische Reihe. Von Herrn L. Schläfli, Privatdocenten der Mathematik zu Bern.	III.	332
XXXVI.	Ueber die Summe der Reihe $1^n+2^n+3^n+4^n+\ldots+r^n$. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	III.	342
XXXVII.	Ueber die Auflösung reiner Gleichungen, insbesondere solcher des dritten Grades durch Kettenbrüche. Von dem Herrn Dr. E. W. Grebe, Gymnasiallehrer zu Cassel.	IV.	345

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXXVIII.	Betrachtung der Coefficienten in der Entwickelung des Products $\prod_{i=0}^{i=n-1}(1+ix)$ nach steigenden Potenzen von x. Von Herrn L. Schläfli, Privatdocenten der Mathematik zu Bern. . .	IV.	386
XL.	Ueber die Transformation der unabhängigen Veränderlichen in vielfachen Differentialen und Integralen. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	IV.	417
XLI.	Ueber die Bedingungen, welche $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ erfüllen müssen, damit $\varphi(x,y)+i\psi(x,y) = F(x+iy)$. Von Demselben.	IV.	422
XLII.	Ueber einige arithmetische Sätze. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	IV.	424
XLV.	Allgemeine Transformationsformeln für gewisse Integrale. Von Demselben.	IV.	440
XLVI.	Bemerkungen über einige bestimmte Integrale. Von Herrn Wilhelm Mösta, Lehramts-Candidaten zu Cassel.	IV.	449

Geometrie.

IV.	Ueber die cylindrischen Kanalflächen. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	I.	54
V.	Ueber eine Klasse geometrischer Sätze, deren Beweise auf keinen Grössenbestimmungen beruhen, nebst einer elementaren Konstruktion des Mittelpunktes des einfachen Hyperboloids. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.	I.	59
VIII.	Ueber den 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides. Von dem Herrn Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann, Königl. Bayer. Hofrathe, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, etc.	I.	77

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
IX.	Ueber zwei Kurven, die von der Ellipse abgeleitet sind. Berechnung der von denselben umschlossenen Fläche. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	I.	90
XIV.	Ueber einen Satz von dem dreiaxigen Ellipsoid, von welchem die Grundformel der sphärischen Trigonometrie ein besonderer Fall ist. Von dem Herausgeber.	II.	156
XV.	Ueber eine geometrische Aufgabe. Von dem Herrn Professor Dr. Anger in Danzig. . .	II.	178
XVI.	Ueber einige Relationen zwischen den Inhalten zweier Tetraëder, die für eine Fläche zweiter Ordnung reciprok von einander sind. Von dem Herrn Doctor A. R. Luchterhandt zu Berlin.	II.	198
XVII.	Ueber den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechsecks berührt. Von Herrn Fr. Seydewitz, Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.	II.	202
XVIII.	Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung. Von Demselben.	II.	203
XIX.	Einige Betrachtungen aus der höheren Geometrie. Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	II.	215
XXI.	Ueber den Brinkley'schen Satz vom Mantel des schiefen Cylinders. Von dem Herausgeber.	II.	222
XXVIII.	Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Stereometrie. Von Demselben.	III.	260
XXXIII.	Ueber einen Satz vom Tetraëder. Von Herrn C. G. Flemming, Lehrer am Conradinum zu Jenkau bei Danzig.	III.	326

Trigonometrie.

XLIV. Untersuchungen über die Seiten und Winkel sphärischer Dreiecke, insbesondere in Bezug auf ihre Differentiale. Dargestellt von dem Herrn

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Dr. J. Ph. Wolfers, astronomischem Rechner an der Königl. Sternwarte zu Berlin. . . .	IV.	431

Geodäsie.

XLIII.	Bemerkungen über die niedere Feldmesskunst, insbesondere über den allgemeineren Gebrauch des Rückwärtseinschneidens. Von dem Herrn Vermessungs-Revisor Nernst zu Bessin auf der Insel Rügen.	IV.	428
	(M. s. auch Optik die Abhandlung Heft I. Nr. I.)		

Mechanik.

XXXIX.	Allgemeine Lehrsätze über Systeme von Kräften und ihrer Momente. Nach Chasles in Liouville's Journal. Mai et Juin 1847. Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.	IV.	408

Optik.

I.	Ueber die atmosphärische, vorzüglich die terrestrische Refraction, und über Refractionscurven im Allgemeinen. Von dem Herausgeber.	I.	1

Astronomie.

XII.	Steinheil's Passagen-Prisma.	I.	112

Physik.

XIII.	Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit. Von dem Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger an der Universität zu Halle. Fortsetzung von Band IX. S. 121—148.	II.	113

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXXI.	Ueber strenge und gelinde Winter. Auszug aus einem Briefe des Herrn Dr. J. Ph. Wolfers, astronomischen Rechners an der Königl. Sternwarte zu Berlin, an den Herausgeber.	III.	317

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

XI.	Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg. . . .	I.	107
	Von dem Herrn Professor Dr. O. Schlömilch an der Universität zu Jena.	I.	111
XX.	Von Demselben.	II.	221
XXXV.	Von Demselben.	III.	340
	Von dem Herrn Doctor J. Dienger, Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg. . . .	III.	341
XLVII.	Von Herrn Wilhelm Mösta, Lehramts-Candidaten zu Cassel.	IV.	455
	Von dem Herrn Doctor F. Arndt, Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.	IV.	455

Literarische Berichte*).

XXXVII.	. . . .	I.	533
XXXVIII.	. . . .	II.	545
XXXIX.	. . . .	III.	561
XL.	. . . .	IV.	571

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Digitized by Google

I.

Ueber die atmosphärische, vorzüglich die terrestrische Refraction, und über Refractionscurven im Allgemeinen.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Theorie der atmosphärischen Refraction ist schon sehr häufig und mit einem grossen Aufwande von Scharfsinn und analytischem Calcul behandelt worden. Im Allgemeinen lassen sich aber zwei Hauptrichtungen, welche man bei der Entwickelung dieser in vielen Beziehungen so wichtigen Theorie verfolgt hat, von einander unterscheiden, von denen ich die eine mit dem Namen der geometrischen, die andere mit dem Namen der physikalischen belegen möchte. Der bedeutendste Repräsentant der ersten Richtung ist Lambert, dessen zu damaliger Zeit allerdings sehr elegante Schrift: Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs et en général par plusieurs milieux réfringens sphériques et concentriques, avec la solution des problèmes, qui y ont du rapport, comme sont les réfractions astronomiques et terrestres, et ce qui en depend. Par J. H. Lambert. A la Haye. 1758. 8., die auch in einer deutschen Uebersetzung: Eigenschaften der Bahn des Lichts. Von J. H. Lambert. Berlin. 1772. 8. erschienen ist, nach meiner Meinung auch jetzt immer noch Beachtung verdient. Der bedeutendste Repräsentant der zweiten Richtung ist Laplace, welcher bekanntlich im zehnten Buche der Mécanique céleste. T. IV. p. 231. die Theorie der sogenannten astronomischen und terrestrischen Refraction aus dem physikalischen Gesichtspunkte auf eine höchst scharfsinnige und ein wahres Muster für derartige physikalische Untersuchungen darbietende Weise behandelt hat *).

---

*) In dem Mémoire sur la mesure théorique et expérimentale de la réfraction terrestre, avec son application a

Der geometrischen Behandlung dieses Gegenstandes, wenn dieselbe auch allerdings keineswegs so tief in die eigentliche Natur desselben einzuführen geeignet ist wie die physikalische Behandlung, scheint mir immer der Vorzug zu gebühren, dass sie sich ohne alle hypothetischen Voraussetzungen durchführen lässt und nur einige durch die genauesten Versuche mehrerer Physiker ausser allem Zweifel gesetzte Erfahrungssätze als Grundlagen in Anspruch nimmt, überdies aber zugleich zu mehreren auch in geometrischer Rücksicht interessanten Resultaten führt, und Anfängern in der Astronomie und Geodäsie zugänglicher sein dürfte als die Behandlung aus dem physikalischen Gesichtspunkte. Da nun die Methode, nach welcher dieser wichtige Gegenstand in der oben angeführten Schrift von **Lambert** sich behandelt findet, gegenwärtig als veraltet zu betrachten ist, überhaupt auch diese Schrift rücksichtlich ihrer Verständlichkeit Anfängern manche Schwierigkeiten darbieten dürfte; so habe ich versucht, die Theorie der atmosphärichen Refraction aus dem geometrischen Gesichtspunkte in der vorliegenden Abhandlung einer ganz neuen Behandlung zu unterwerfen, und dabei namentlich auch einige allgemeine Eigenschaften der Refractionscurven deutlich hervorzuheben und streng zu beweisen. Bemerken muss ich jedoch, dass ich bei dieser Untersuchung mein Augenmerk hauptsächlich auf die sogenannte terrestrische Refraction gerichtet habe, weil die astronomische Refraction überhaupt schon öfter und tiefer eingehend als jene behandelt worden ist. Auch muss ich offen gestehen, dass es mir immer wenig naturgemäss geschienen hat, die terrestrische Refraction bloss dem Horizontalabstande der beiden Stationen oder dem von deren Vertikalen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel, ohne alle Rücksicht auf die Zenithdistanz, proportional zu setzen, wie gegenwärtig nach **Lambert** (a. a. O. p. 75. Théorème XXVIII.) und **Laplace** (a. a. O. p. 278.) allgemein geschieht. Ja ich bin selbst der Meinung, dass die geringe Uebereinstimmung in den von verschiedenen Gelehrten bestimmten Werthen des Coefficienten der terrestrischen Refraction *) nicht bloss, wie gewöhnlich behauptet wird, der grossen Veränderlichkeit der Luftbeschaffenheit in den der Erde näher liegenden Schichten der Atmosphäre, sondern zum Theil gewiss auch der

---

la détermination exacte des différences de niveau, d'après les observations des distances zénithales simples ou réciproques. Par M. Biot. Paris. 1842. 8., der neuesten mir bekannten Schrift über diesen Gegenstand, schliesst sich der Verfasser in den Grundlehren und im Princip an **Laplace** an. Jedenfalls aber verdient diese Schrift über die physikalische Theorie der Refraction Beachtung und allgemeiner bekannt zu werden, als sie bis jetzt geworden zu sein scheint.

*) Den Coefficienten der terrestrischen Strahlenberechnung setzen

die Engländer	0,2000,
die Franzosen	0,1600,
Corabeuf	0,1285,
die ostpreussische Gradmessung	0,1370,
Gauss	0,1306,
Struve	0,1237.

Digitized by Google

Mangelhaftigkeit der Theorie der terrestrischen Refraction und manchen Auslassungen, welche man sich bei der Entwickelung derselben gestattet hat, anheim fällt. In der That werden auch, wie ich wenigstens hoffe, die in dieser Abhandlung gegebenen Entwickelungen deutlich in's Licht setzen, dass nicht bloss die astronomische, sondern allerdings auch die terrestrische Refraction auf eine bestimmte Weise von der Zenithdistanz abhängt, und dass die vorher erwähnte gewöhnliche Annahme, nach welcher dieselbe bloss dem Horizontalabstande der beiden Stationen oder dem von deren Vertikalen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel proportional sein soll, nur als eine rohere Annäherung betrachtet werden muss. Daher bin ich auch der Meinung, dass eine neue, auf eine möglichst grosse Anzahl genauer Beobachtungen gegründete Bestimmung des Coefficienten der terrestrischen Refraction, mit Anwendung der in dieser Abhandlung entwickelten Formeln und gehöriger Berücksichtigung der Zenithdistanzen, so wie dieselben in diesen Formeln hervortreten, ferner auch mit strenger Rücksicht auf den zeitigen Stand der meteorologischen Instrumente, Bedürfniss ist und Noth thut, und stehe nicht an, hier den Wunsch auszusprechen, dass ein mit allen nöthigen Hülfsmitteln gehörig ausgerüsteter, in einer zu solchen Beobachtungen geeigneten Gegend wohnender Gelehrter sich dieser Untersuchung unterziehen, oder eine gelehrte Gesellschaft oder eine Regierung dieselbe zu veranlassen sich geneigt fühlen möchte, da mir selbst in dem hiesigen völligen Flachlande jede Gelegenheit zur erfolgreichen Durchführung derselben mangelt.

Was ich ausser der vollständigern Behandlung der terrestrischen Refraction am Schluss dieser Abhandlung noch über die astronomische Refraction gesagt habe, ist nur der Vollständigkeit wegen und Anfängern zu Liebe beigefügt worden, und hat keineswegs den Zweck, diesem schon so vielfach und in vielen Beziehungen mit so glücklichem Erfolge behandelten höchst wichtigen Gegenstande eine neue Ansicht abzugewinnen, oder denselben auf irgend eine Weise einen Schritt weiter zu führen. Hierüber findet man Alles, was zu wissen wünschenswerth sein kann, in Laplace's berühmtem Werke, und in Bessel's, Carlini's und anderer Astronomen allgemein bekannten Schriften.

Digitized by Google

Erfahrungssätze.

Wir werden im Folgenden bei der Entwickelung der Theorie der atmosphärischen Refraction von einigen Erfahrungssätzen ausgehen, deren Richtigkeit durch viele mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit von mehreren Physikern angestellte Versuche als ausser allem Zweifel gesetzt betrachtet werden kann. Diese Sätze wollen wir, um eine sichere Grundlage für das Folgende zu gewinnen, jetzt hier in der Kürze zusammenstellen, wenn dieselben auch allgemein bekannt sind, und sich in jedem etwas vollständigern physikalischen Lehrbuche sämmtlich finden.

I.

Der erste dieser Sätze ist das bekannte Fundamentaltheorem der gesammten Dioptrik, dass nämlich für jede zwei brechende Körper das Verhältniss des Sinus des Einfallswinkels und des Sinus des Brechungwinkels zu einander constant ist, und dass dieses Verhältniss jederzeit seinen reciproken Werth erhält, wenn die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt werden. Wird also für zwei brechende Körper überhaupt der Einfallswinkel durch ω, der Brechungswinkel durch ω' bezeichnet, und

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}=n$$

gesetzt, so ist die Grösse n, welche bekanntlich der Brechungsexponent für die beiden in Rede stehenden brechenden Körper genannt wird, constant oder verändert ihren Werth nicht, wie sich auch die beiden Winkel ω und ω' ändern mögen. Werden aber die beiden brechenden Körper mit einander verwechselt, so erhält der Brechungsexponent seinen reciproken Werth, und wird also in der vorhergehenden Bezeichnung durch den Bruch $\frac{1}{n}$ dargestellt. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass der Brechungsexponent immer grösser oder kleiner als die Einheit ist, jenachdem der Strahl aus einem dünnern in einen dichtern, oder aus einem dichtern in einen dünnern Körper übergeht. Im ersten Falle ist also jederzeit der Einfallswinkel grösser als der Brechungswinkel; im zweiten Falle ist dagegen der Einfallswinkel immer kleiner als der Brechungswinkel.

II.

Ferner haben die Versuche gelehrt, dass, wenn A und B zwei einander berührende, von parallelen Ebenen begränzte brechende Körper sind, und ein Strahl aus der Luft in den Körper A, hier-

Digitized by Google

auf aus dem Körper A in den Körper B, und dann aus dem Körper B wieder in die Luft übergeht, jederzeit der erste einfallende und der letzte ausfahrende Strahl, die beide in der Luft liegen, einander parallel sind. Bezeichnen wir also den Einfallswinkel und den Brechungswinkel für die Luft und den Körper A durch ω und ω', für den Körper A und den Körper B durch ω' und ω'', für den Körper B und die Luft durch ω'' und ω, wobei man nicht zu übersehen hat, dass die Körper A und B nach der Voraussetzung von parallelen Ebenen begränzt werden und der erste einfallende und letzte ausfahrende Strahl einander parallel sind, die entsprechenden Brechungsexponenten aber durch m, k, n; so ist nach I.

$$\frac{\sin\omega}{\sin\omega'}=m,\quad \frac{\sin\omega'}{\sin\omega''}=k,\quad \frac{\sin\omega''}{\sin\omega}=n;$$

also, wenn man diese Gleichungen in einander multiplicirt:

$$mkn=1,$$

oder

$$k=\frac{1}{mn}=\frac{1}{n}:m,$$

wo m der Brechungsexponent für Luft und den Körper A, ferner $\frac{1}{n}$ der Brechungsexponent für Luft und den Körper B, endlich k der Brechungsexponent für die Körper A und B ist. Dies hat überhaupt auf den folgenden, auch noch durch viele andere Versuche ausser allem Zweifel gesetzten Satz geführt:

Wenn für die beiden brechenden Körper A und B der Brechungsexponent λ, für die beiden brechenden Körper A und C der Brechungsexponent μ ist, so ist jederzeit $\frac{\mu}{\lambda}$ der Brechungsexponent für die beiden brechenden Körper B und C.

Namentlich ist die Richtigkeit dieses Satzes auch in allen den Fällen, wo A der leere Raum ist, und B und C verschiedene Luftarten oder Gasarten sind, durch Versuche ausser allem Zweifel gesetzt worden.

III.

Wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur 0 und dem barometrischen Drucke $0^m,76$ als Einheit der Dichtigkeiten der atmosphärischen Luft annehmen; so ist nach allgemein bekannten physikalischen Gesetzen die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t nach dem Centesimalthermometer und bei dem in Metern ausgedrückten barometrischen Drucke b:

$$\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}.$$

Bezeichnen wir nun den Brechungsexponenten für den leeren

Digitized by Google

Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und dem barometrischen Drucke b durch n, so zeigen bei verschiedenen Temperaturen und Barometerständen angestellte Versuche, dass der Quotient

$$(n^2-1):\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)},$$

oder der Bruch

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}$$

sehr nahe eine constante Grösse ist, d. h. dass die Grösse n^2-1, welche man gewöhnlich die brechende Kraft zu nennen pflegt, der Dichtigkeit der Luft proportional, oder dass der Quotient der brechenden Kraft durch die Dichtigkeit der Luft, welchen man gewöhnlich das Brechungsvermögen zu nennen pflegt, eine constante Grösse ist. Bezeichnen wir also, dies vorausgesetzt, den Brechungsexponenten für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ durch N, so ist $n=N$ für $t=0$ und $b=0^m,76$; folglich, weil der obige Bruch eine constante Grösse ist:

$$\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}=N^2-1,$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$N=\sqrt{1+\frac{0^m,76.(1+0,00375.t)(n^2-1)}{b}},$$

mittelst welcher Formel der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ aus den durch unmittelbare Versuche bestimmten Werthen des Brechungsexponenten n für den leeren Raum und atmosphärische Luft bei der Temperatur t und Barometerhöhe b berechnet werden kann.

Nach Biot ist bis auf sieben Decimalstellen genau

$$N=1,0002943$$

und

$$N^2-1=0,0005888.$$

Aus der obigen Gleichung zwischen n und N folgt auch

$$n=\sqrt{1+\frac{b(N^2-1)}{0^m,76.(1+0,00375.t)}},$$

d. i., wenn wir die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft bei der Temperatur t und der Barometerhöhe b durch D bezeichnen, weil nach dem Obigen

Digitized by Google

$$D = \frac{b}{0^m,76 . (1 + 0,00375 . t)}$$

ist,

$$n = \sqrt{1 + (N^2 - 1) D},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$K = N^2 - 1 = 0,0005888$$

setzen, wo also K eine constante Grösse ist:

$$n = \sqrt{1 + KD}.$$

Ist n_1 der Brechungsexponent für den leeren Raum und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1, so ist nach der vorhergehenden Gleichung

$$n_1 = \sqrt{1 + KD_1};$$

also ist nach II.

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sqrt{1 + KD_1}}{\sqrt{1 + KD}} = \sqrt{\frac{1 + KD_1}{1 + KD}}$$

der Brechungsexponent für atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D und atmosphärische Luft von der Dichtigkeit D_1.

Dies sind die Erfahrungssätze, welche wir unserer folgenden Entwickelung der Theorie der atmosphärischen Refraction zum Grunde legen werden.

Digitized by Google

Entwickelung des allgemeinen Begriffs der Refractionscurven.

In Taf. I. Fig. 1. sei C der Mittelpunkt der Erde, welche wir hier als eine Kugel betrachten. Die Atmosphäre der Erde denke man sich von dem Punkte s in derselben an bis zu der Oberfläche der Erde in n mit der Oberfläche der Erde concentrische Schichten von gleicher Höhe eingetheilt, und nehme in jeder dieser Schichten die Luft als gleichförmig dicht an. Die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft in der

1sten, 2ten, 3ten, 4ten,.... $n$ten

Schicht von oben nach unten seien respective

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \ldots \lambda_n.$$

Stellen wir uns nun vor, dass ein von dem Punkte s in der Atmosphäre ausgehender Lichtstrahl nach und nach bei den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

respective in die

2te, 3te, 4te, 5te,.... $n$te

Schicht übergeht, und bei dem Punkte s_n an der Oberfläche der Erde anlangt, so wird wegen der bekanntlich von oben nach unten hin wachsenden Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre der Erde der ganze Weg

$$s s_1 s_2 s_3 s_4 \ldots s_n$$

des Strahls nach dem Erfahrungssatze I. offenbar eine nach der Oberfläche der Erde hin concave gebrochene Linie sein, wobei man nur nicht zu übersehen hat, dass die in der Figur von dem Mittelpunkte C der Erde nach den Punkten $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$ gezogenen geraden Linien die diesen Punkten entsprechenden Einfallslothe sind. Bezeichnen wir nun bei den Punkten

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots s_{n-1}$$

die Einfallswinkel und Brechungswinkel respective durch

$$z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots z_{n-1}$$

und

$$\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \ldots \zeta_{n-1};$$

Digitized by Google

so haben wir, weil nach dem Erfahrungssatze II. die denselben Punkten entsprechenden Brechungsexponenten

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1},\ \frac{\lambda_3}{\lambda_2},\ \frac{\lambda_4}{\lambda_3},\ \frac{\lambda_5}{\lambda_4},\ldots\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}$$

sind, nach dem Erfahrungssatze I. die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin z_1}{\sin \zeta_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

$$\frac{\sin z_2}{\sin \zeta_2}=\frac{\lambda_3}{\lambda_2},$$

$$\frac{\sin z_3}{\sin \zeta_3}=\frac{\lambda_4}{\lambda_3},$$

$$\frac{\sin z_4}{\sin \zeta_4}=\frac{\lambda_5}{\lambda_4},$$

u. s. w.

$$\frac{\sin z_{n-1}}{\sin \zeta_{n-1}}=\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}.$$

Multiplicirt man aber alle diese Gleichungen in einander und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man die Gleichung:

$$1)\quad \frac{\sin z_1 \sin z_2 \sin z_3 \sin z_4 \ldots \sin z_{n-1}}{\sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3 \sin \zeta_4 \ldots \sin \zeta_{n-1}}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Bezeichnen wir nun noch analog mit dem Vorhergehenden die in den Punkten s und s_n von den Strahlen ss_1 und $s_{n-1}s_n$ mit den von dem Mittelpunkte C der Erde nach den Punkten s und s_n gezogenen Einfallslothen eingeschlossenen spitzen Winkel respective durch ζ und z_n; so haben wir in den Dreiecken

$$sCs_1,\ s_1Cs_2,\ s_2Cs_3,\ s_3Cs_4,\ldots s_{n-1}Cs_n$$

nach einem bekannten trigonometrischen Elementarsatze die folgenden Proportionen:

$$\sin\zeta : \sin z_1 = Cs_1 : Cs,$$

$$\sin\zeta_1 : \sin z_2 = Cs_2 : Cs_1,$$

$$\sin\zeta_2 : \sin z_3 = Cs_3 : Cs_2,$$

$$\sin\zeta_3 : \sin z_4 = Cs_4 : Cs_3,$$

u. s. w.

$$\sin\zeta_{n-2} : \sin z_{n-1} = Cs_{n-1} : Cs_{n-2},$$

$$\sin\zeta_{n-1} : \sin z_n = Cs_n : Cs_{n-1};$$

aus denen sich auf der Stelle durch Zusammensetzung die Proportion

Digitized by Google

$$\sin\zeta\sin\zeta_1\sin\zeta_2\sin\zeta_3\ldots\sin\zeta_{n-2}\sin\zeta_{n-1}$$
$$:\sin z_1\sin z_2\sin z_3\sin z_4\ldots\sin z_{n-1}\sin z_n = Cs_n : Cs,$$

oder die Gleichung

$$2)\quad \frac{\sin z_1\sin z_2\sin z_3\sin z_4\ldots\sin z_{n-1}}{\sin\zeta_1\sin\zeta_2\sin\zeta_3\sin\zeta_4\ldots\sin\zeta_{n-1}}\cdot\frac{\sin z_n}{\sin\zeta}=\frac{Cs}{Cs_n}$$

ergiebt. Aus der Vergleichung der Gleichungen 1) und 2) mit einander erhält man aber auf der Stelle die Gleichung

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot\frac{\sin z_n}{\sin\zeta}=\frac{Cs}{Cs_n},$$

oder die Gleichung

$$3)\quad \frac{\sin\zeta}{\sin z_n}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot\frac{Cs_n}{Cs}.$$

Denken wir uns nun noch von dem Mittelpunkte der Erde auf die gehörig verlängerte Linie ss_1 ein Perpendikel gefällt, und bezeichnen dasselbe durch P, so ist

$$\sin\zeta=\frac{P}{Cs};$$

also nach der Gleichung 3) offenbar

$$\frac{P}{\sin z_n}=\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\cdot Cs_n,$$

und folglich, wenn wir den Erdhalbmesser Cs_n durch a bezeichnen:

$$4)\quad P=a\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\sin z_n.$$

Denken wir uns jetzt, dass die Anzahl n der gleich hohen Schichten, in welche wir die Atmosphäre von dem Punkte s bis zum Punkte s_n, d. h. bis zur Oberfläche der Erde, getheilt haben, in's Unendliche wächst, so geht die gebrochene Linie

$$s\,s_1\,s_2\,s_3\,s_4\ldots s_n$$

in eine stetig gekrümmte Linie über; P geht in das von dem Mittelpunkte C der Erde auf die Berührende dieser Curve in dem Punkte s gefällte Perpendikel, und der Winkel z_n geht in den von der Berührenden dieser Curve in dem Punkte s_n, wo sie die Oberfläche der Erde trifft, mit dem von dem Mittelpunkte der Erde nach dem Punkte s_n gezogenen Einfallslothe eingeschlossenen spitzen Winkel, welchen wir im Folgenden durch Z bezeichnen wollen, über; ferner gehen λ_1 und λ_n respective in die Brechungsexponenten für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte s, und für den leeren Raum und die atmosphärische

Luft in dem Punkte s_n, d. h. an der Erdoberfläche, welche wir im Folgenden respective durch λ und L bezeichnen wollen, über, und es ist also nach der Gleichung 4), wenn jetzt P das von dem Mittelpunkte C der Erde auf die dem Punkte s entsprechende Berührende gefällte Perpendikel bezeichnet, für ein unendlich grosses n:

$$5)\quad P = a\frac{L}{\lambda}\sin Z,$$

welche Gleichung also eigentlich die Gränzgleichung ist, der sich die Gleichung 4) bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn die ganze Zahl n in's Unendliche wächst.

Auf der Stelle erhellet aber, dass bei der vorhergehenden Betrachtung für den Punkt s auch jeder andere Punkt der zwischen den Punkten s und s_n liegenden atmosphärischen Refractionscurve gesetzt werden kann, so dass also die Gleichung 5) überhaupt für jeden Punkt dieser Curve gilt, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird, da es sich aus der vorhergehenden Betrachtung ganz von selbst ergiebt.

Ueberlegen wir nun, welche Grössen in der Gleichung 5) constant und variabel sind, so fällt auf der Stelle in die Augen, dass — natürlich bloss für dieselbe atmosphärische Refractionscurve — die auf den an der Oberfläche der Erde liegenden constanten, vorher durch s_n bezeichneten Punkt sich beziehenden Grössen a, L, Z constant, dagegen die auf den vorher durch s bezeichneten veränderlichen Punkt der Curve sich beziehenden Grössen λ, P variabel sind. Setzen wir also der Kürze wegen

$$6)\quad \mu = aL\sin Z,$$

wo μ eine für dieselbe Refractionscurve constante Grösse ist, wegen seiner Abhängigkeit von dem Winkel Z aber natürlich für verschiedene Refractionscurven seinen Werth ändert, so erhält die Gleichung 5) die Form

$$7)\quad P = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Der Brechungsexponent λ für den leeren Raum und die Luft in dem als ein Repräsentant aller Punkte der Refractionscurve zu betrachtenden Punkte s derselben, und also auch der reciproke Brechungsexponent $\frac{1}{\lambda}$ für den leeren Raum und die Luft in diesem Punkte, hängt nach dem Erfahrungssatze III. bloss von der Dichtigkeit der Luft in dem Punkte s ab, und diese Dichtigkeit hängt nach Gesetzen, welche wir hier als aus der Physik bekannt voraussetzen müssen, und gewiss auch als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind, wieder bloss von der Höhe des Punktes s über der Oberfläche der Erde, oder, was natürlich im Wesentlichen ganz dasselbe ist, von der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte der Erde ab. Also hängt auch der reciproke Brechungs-

Digitized by Google

exponent $\frac{1}{\lambda}$ für den leeren Raum und die atmosphärische Luft in dem Punkte s bloss von der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte der Erde ab, so dass also, wenn wir die Entfernung des Punktes s vom Mittelpunkte der Erde durch u bezeichnen,

$$8)\quad \frac{1}{\lambda}=f(u),$$

wo $f(u)$ eine bloss von u als unabhängige veränderliche Grösse abhängende Function bezeichnet, gesetzt werden kann. Und unter dieser Voraussetzung erhält nun die für alles Folgende sehr wichtige Gleichung 7) die Form

$$9)\quad P=\mu f(u).$$

Diese Betrachtungen führen uns auf den folgenden allgemeinen Begriff einer besondern Klasse von Curven, welche wir überhaupt mit dem Namen Refractionscurven zu belegen für zweckmässig halten.

Eine *Refractionscurve* heisst jede Curve von solcher Beschaffenheit, dass man das von einem gegebenen bestimmten Punkte, welcher der *Pol* der Refractionscurve genannt werden soll, auf ihre Berührende in einem beliebigen ihrer Punkte gefällte Perpendikel jederzeit erhält, wenn man eine bloss von der Entfernung dieses Punktes der Refractionscurve von ihrem Pole als unabhängige veränderliche Grösse abhängende Function mit einer Grösse multiplicirt, welche für dieselbe Refractionscurve — d. h. für alle Punkte derselben — constant ist, für verschiedene Refractionscurven aber ihren Werth ändert.

Von diesem allgemeinen Begriffe ausgehend, wollen wir nun zuvörderst im folgenden Abschnitte einige merkwürdige geometrische Eigenschaften aller Refractionscurven entwickeln.

Digitized by Google

Allgemeine geometrische Eigenschaften der Refractionscurven.

Wir wollen den Pol der Refractionscurve im Folgenden als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems annehmen, und die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Refractionscurve in Bezug auf dieses System durch x, y bezeichnen.

Bezeichnen wir nun die veränderlichen Coordinaten durch X, Y; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$10)\quad Y-y=\frac{\partial y}{\partial x}(X-x)$$

die Gleichung der Berührenden der Refractionscurve in dem Punkte (xy). Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$11)\quad Y=\frac{\partial y}{\partial x}X+y-x\frac{\partial y}{\partial x},$$

so ergiebt sich, wenn P seine ihm im vorhergehenden Abschnitte beigelegte Bedeutung auch jetzt behält, und folglich das von dem Pol oder Anfange der Coordinaten auf die durch die Gleichung 10) oder 11) charakterisirte Berührende gefällte Perpendikel bezeichnet, aus einer andern bekannten Grundformel der analytischen Geometrie auf der Stelle die Gleichung

$$12)\quad P^2=\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

wobei man nicht aus den Augen lassen darf, dass der Pol als Anfang der Coordinaten angenommen worden ist. Also haben wir nach dem im vorhergehenden Abschnitte entwickelten allgemeinen Begriffe der Refractionscurven, wenn auch die Symbole μ und u ihre ihnen dort beigelegten Bedeutungen behalten, die folgende Gleichung:

$$13)\quad \frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\mu^2(f(u))^2,$$

oder, weil bekanntlich

$$14)\quad u=\sqrt{x^2+y^2}$$

Digitized by Google

ist, die Gleichung

$$15)\quad \frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\mu^2(f(\sqrt{x^2+y^2}))^2$$

Die Gleichung 13) bringt man leicht auf die Form

$$16)\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{2xy}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y^2-\mu^2(f(u))^2}{x^2-\mu^2(f(u))^2},$$

und erhält ferner, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ als unbekannte Grösse wie eine gewöhnliche quadratische Gleichung auflöst, nach einigen leichten Reductionen für $\frac{\partial y}{\partial x}$ den Ausdruck:

$$17)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{xy\pm\sqrt{x^2y^2-\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Weil aber

$$\begin{aligned}&\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}\\&=x^2y^2-\mu^2(x^2+y^2)(f(u))^2+\mu^4(f(u))^4,\end{aligned}$$

und folglich nach 14)

$$\begin{aligned}&\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}\{y^2-\mu^2(f(u))^2\}\\&=x^2y^2-\mu^2u^2(f(u))^2+u^4(f(u))^4\\&=x^2y^2-\mu^2(f(u))^2\{u^2-\mu^2(f(u))^2\}\end{aligned}$$

ist, so ist

$$18)\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{xy\pm\mu f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Hieraus ergiebt sich aber ferner mittelst leichter Rechnung mit gehöriger Beziehung der obern und untern Zeichen auf das obere und untere Zeichen in der vorhergehenden Gleichung 18):

$$19)\quad y-x\frac{\partial y}{\partial x}=-\mu f(u).\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}$$

und

$$20)\quad x+y\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$=\pm\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2},$$

Digitized by Google

wobei man immer die Gleichung 14) gehörig zu berücksichtigen hat. Ferner erhält man auch leicht

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$
$$=\frac{x^2u^2-\mu^2(x^2-y^2)(f(u))^2\pm 2\mu xyf(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}^2},$$

oder

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$
$$=\frac{\mu^2y^2(f(u))^2\pm 2\mu xyf(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}+x^2\{u^2-\mu^2(f(u))^2\}}{\{x^2-\mu^2(f(u))^2\}^2},$$

also offenbar

$$21)\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\left\{\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\right\}^2.$$

Weil aber nach 13)

$$22)\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\left\{\frac{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}{\mu f(u)}\right\}^2$$

ist, so ist auch

$$23)\quad \left\{\frac{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}{\mu f(u)}\right\}^2=\left\{\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{x^2-\mu^2(f(u))^2}\right\}^2.$$

Weil nach 14)

$$u=\sqrt{x^2+y^2}$$

ist, so ist, wie man leicht durch Differentiation nach x findet:

$$24)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u}.$$

Der Differentialquotient der Grösse

$$\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist, wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

Digitized by Google

$$-\frac{2(x+y\frac{\partial y}{\partial x})(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2};$$

und der Differentialquotient von $\mu^2(f(u))^2$ in Bezug auf x als unabhängige veränderliche Grösse ist nach den Principien der Differentialrechnung:

$$2\mu^2 f(u)\frac{\partial f(u)}{\partial x}=2\mu^2 f(u)\frac{\partial f(u)}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$

d. i. in der bekannten Bezeichnung der Differentialquotienten als derivirte Functionen und nach 24):

$$2\mu^2 f(u)f'(u).\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u}.$$

Also haben wir wegen 13) die Gleichung:

$$-\frac{2(x+y\frac{\partial y}{\partial x})(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2}=2\mu^2 f(u)f'(u).\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{u},$$

aus der sich

$$25)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\mu^2\frac{f(u)f'(u)}{u}\cdot\frac{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}^2}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}},$$

oder, weil nach 13)

$$26)\quad \mu^2=\frac{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}{\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}(f(u))^2}$$

ist,

$$27)\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-(y-x\frac{\partial y}{\partial x})\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\}.\frac{f'(u)}{uf(u)}.$$

und folglich auch

$$28)\quad \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=-\frac{uf(u)}{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})f'(u)}$$

ergiebt.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten des Mittelpunkts des Krümmungskreises der Refractionscurve in dem Punkte (xy) der-

Digitized by Google

selben durch p, q, und den Halbmesser des Krümmungskreises oder den demselben Punkte entsprechenden Krümmungshalbmesser durch r; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$29)\quad \begin{cases} p = x - \dfrac{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}, \\[2ex] q = y + \dfrac{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}}; \end{cases}$$

und

$$30)\quad r^2 = \frac{\left\{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^3}{\left(\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2}.$$

Also ist nach 28):

$$31)\quad \begin{cases} p = x + \dfrac{uf(u)}{(y - x\dfrac{\partial y}{\partial x})f'(u)} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x}, \\[2ex] q = y - \dfrac{uf(u)}{(y - x\dfrac{\partial y}{\partial x})f'(u)}; \end{cases}$$

und folglich, wenn man für

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ und } y - x\frac{\partial y}{\partial x}$$

ihre Ausdrücke aus 18) und 19) in diese Formeln einführt:

$$32)\quad \begin{cases} p = x - \dfrac{u}{\mu f'(u)} \cdot \dfrac{xy \pm \mu f(u)\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}, \\[2ex] q = y + \dfrac{u}{\mu f'(u)} \cdot \dfrac{x^2 - \mu^2(f(u))^2}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}. \end{cases}$$

Ferner ist nach 30) und 27):

$$r^2 = \frac{\left\{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^3}{(y - x\dfrac{\partial y}{\partial x})^2\left\{1+\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^2 \cdot \left\{\dfrac{f'(u)}{uf(u)}\right\}^2},$$

d. i.

Digitized by Google

$$r^2=\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{(y-x\frac{\partial y}{\partial x})^2}\cdot\left\{\frac{uf(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

und folglich nach 13)

$$r^2=\frac{1}{\mu^2(f(u))^2}\cdot\left\{\frac{uf(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

d. i.

$$33)\quad r^2=\left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2.$$

Weil in der Atmosphäre der Erde die Dichtigkeit der Luft abnimmt, wenn die Entfernung vom Mittelpunkte der Erde, d. i. die Grösse u, zunimmt, so nimmt nach dem Erfahrungssatze III. die Grösse λ ab, wenn u zunimmt. Also nimmt

$$f(u)=\frac{1}{\lambda}$$

zu, wenn u zunimmt. Folglich ist der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta u},$$

und also offenbar auch die Gränze, welcher derselbe sich nähert, wenn Δu sich der Null nähert, d. h. der Differentialquotient

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u}=f'(u),$$

stets eine positive Grösse; und weil nun offenbar auch u und

$$\mu=aL\sin Z$$

positive Grössen sind, so ist nach 33) für die Erdatmosphäre

$$34)\quad r=\frac{u}{\mu f'(u)}.$$

Die Gleichung der durch den Pol oder den Anfang der Coordinaten und den Punkt (xy) der Refractionscurve gehenden geraden Linie ist

$$35)\quad Y=\frac{y}{x}X.$$

Die Gleichung der auf dieser Linie senkrecht stehenden und durch den Mittelpunkt (pq) des dem Punkte (xy) entsprechenden Krümmungskreises der Refractionscurve gehenden geraden Linie ist nach den Principien der analytischen Geometrie, wie leicht erhellen wird:

Digitized by Google

$$36)\quad Y-q=-\frac{x}{y}(X-p).$$

Lassen wir nun X, Y die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 35) und 36) charakterisirten geraden Linien bezeichnen, so erhalten wir durch Auflösung dieser beiden Gleichungen in Bezug auf X und Y als unbekannte Grössen mittelst leichter Rechnung:

$$X=\frac{x(px+qy)}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{y(px+qy)}{x^2+y^2};$$

d. i. nach 14):

$$37)\quad X=\frac{x(px+qy)}{u^2},\quad Y=\frac{y(px+qy)}{u^2}.$$

Nun ist aber nach 32)

$$px+qy$$
$$=x^2+y^2-\frac{u}{\mu f'(u)}\cdot\mu f(u)\cdot\frac{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu yf(u)\pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}},$$

d. i.

$$px+qy=u^2-\frac{uf(u)}{f'(u)}=u^2\left\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\right\};$$

folglich nach 37):

$$38)\quad X=x\left\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\right\},\quad Y=y\left\{1-\frac{f(u)}{uf'(u)}\right\}.$$

Diese beiden Gleichungen enthalten einen sehr merkwürdigen allgemeinen Satz, welcher eine Eigenschaft der Refractionscurven ausspricht, die als die Haupteigenschaft dieser Klasse von Curven zu betrachten ist. Beachtet man nämlich, dass in Folge der beiden vorhergehenden Gleichungen die Coordinaten X, Y des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 35) und 36) charakterisirten geraden Linien bloss von den Grössen x, y, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, gar nicht von der im Vorhergehenden durch μ bezeichneten Grösse, welche bekanntlich für verschiedene Refractionscurven verschiedene Werthe erhält, abhängen; so ergiebt sich auf der Stelle der folgende merkwürdige

Lehrsatz.

Wenn verschiedene auf denselben Pol bezogene Refractionscurven in beliebiger Anzahl durch einen und denselben Punkt gehen, so liegen die Mittelpunkte aller diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreise derselben in einer und derselben auf der durch den gemeinschaftlichen Pol und den allen Refractionscur-

ven gemeinschaftlichen Punkt gehenden geraden Linie senkrecht stehenden geraden Linie; oder wenn verschiedene auf denselben Pol bezogene Refractionscurven in beliebiger Anzahl durch einen und denselben Punkt gehen, so ist der geometrische Ort der Mittelpunkte der diesem Punkte entsprechenden Krümmungskreise derselben jederzeit eine auf der durch den gemeinschaftlichen Pol und den allen Refractionscurven gemeinschaftlichen Punkt gehenden geraden Linie senkrecht stehende gerade Linie.

Die Lage dieses geometrischen Orts ist durch die Gleichungen 38) vollkommen bestimmt.

Bezeichnen wir die Entfernung des Mittelpunkts (pq) des dem Punkte (xy) der Refractionscurve entsprechenden Krümmungskreises derselben von dem Pol oder dem Anfange der Coordinaten durch Q, so ist bekanntlich

$$Q = \sqrt{p^2+q^2}.$$

Nach 32) ist aber

$$\begin{aligned}
p^2+q^2 = x^2 &- \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \frac{x^2y \pm \mu x f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}} \\
&+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{\left\{\begin{array}{c} x^2y^2 \pm 2\mu x y f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2} \\ +\mu^2(f(u))^2\{u^2-\mu^2(f(u))^2\}\end{array}\right\}}{\{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}\}^2} \\
&+ y^2 + \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \frac{x^2y-\mu^2y(f(u))^2}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}} \\
&+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{x^4-2\mu^2x^2(f(u))^2+\mu^4(f(u))^4}{\{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}\}^2} \\
= u^2 &- \frac{2u}{\mu f'(u)} \cdot \mu f(u) \cdot \frac{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}} \\
&+ \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2 \cdot \frac{x^2u^2-\mu^2(x^2-y^2)(f(u))^2 \pm 2\mu x y f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}\}^2},
\end{aligned}$$

und folglich, weil, wie wir schon aus dem Obigen wissen,

$$\begin{aligned}
x^2u^2-\mu^2(x^2-y^2)(f(u))^2 &\pm 2\mu x y f(u)\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2} \\
&= \{\mu y f(u) \pm x\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}\}^2
\end{aligned}$$

ist,

$$p^2+q^2 = u^2 - \frac{2uf(u)}{f'(u)} + \left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

Digitized by Google

$$39)\quad Q=\sqrt{u^2-\frac{2uf(u)}{f'(u)}+\left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2}.$$

Für die Erdatmosphäre ist nach 34)

$$r=\frac{u}{\mu f'(u)},$$

also

$$40)\quad Q=\sqrt{u^2-2\mu r f(u)+r^2}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte (xy) und (XY) von einander durch R, so ist

$$R=\sqrt{(x-X)^2+(y-Y)^2}.$$

Nach 38) ist aber

$$x-X=\frac{xf(u)}{uf'(u)},\ y-Y=\frac{yf(u)}{uf'(u)};$$

also

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=(x^2+y^2)\left\{\frac{f(u)}{uf'(u)}\right\}^2,$$

oder nach 14)

$$(x-X)^2+(y-Y)^2=\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

und folglich

$$41)\quad R^2=\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2.$$

Die Grösse $f(u)$ ist immer positiv, und für die Erdatmosphäre ist nach dem Obigen auch $f'(u)$ positiv; also ist für diese

$$42)\quad R=\frac{f(u)}{f'(u)}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte (pq) und (XY) von einander durch S, so ist

$$S=\sqrt{(p-X)^2+(q-Y)^2}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$p-X=p-\frac{x(px+qy)}{x^2+y^2}=\frac{y(py-qx)}{x^2+y^2}=\frac{y(py-qx)}{u^2},$$

$$q-Y=q-\frac{y(px+qy)}{x^2+y^2}=\frac{x(qx-py)}{x^2+y^2}=\frac{x(qx-py)}{u^2};$$

also, wie leicht erhellen wird,

Digitized by Google

$$(p-X)^2+(q-Y)^2=\left(\frac{py-qx}{u}\right)^2.$$

Weil nun nach 31)

$$py-qx=\frac{uf(u)}{f'(u)}\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}},$$

also

$$\frac{py-qx}{u}=\frac{f(u)}{f'(u)}\cdot\frac{x+y\frac{\partial y}{\partial x}}{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}$$

ist, so ist nach 19) und 20)

$$\frac{py-qx}{u}=\mp\frac{f(u)}{f'(u)}\cdot\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f(u)}$$

d. i.

$$\frac{py-qx}{u}=\mp\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f'(u)},$$

folglich nach dem Obigen

$$43)\quad S^2=\frac{u^2-\mu^2(f(u))^2}{\mu^2(f'(u))^2},$$

oder

$$44)\quad S^2=\left\{\frac{u}{\mu f'(u)}\right\}^2-\left\{\frac{f(u)}{f'(u)}\right\}^2,$$

was man auch hätte unmittelbar aus 33) und 41) schliessen können, da natürlich

$$S^2=r^2-R^2$$

sein muss. Für die Erdatmosphäre ist $f'(u)$ nach dem Obigen bekanntlich positiv, und folglich

$$45)\quad S=\frac{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}{\mu f'(u)}$$

oder

$$46)\quad S=\frac{1}{\mu f'(u)}\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}.$$

Durch die Punkte s und s_n der in der Erdatmosphäre liegenden Refractionscurve ss_n in Taf. I. Fig. 2. wollen wir uns jetzt an dieselbe die Berührenden ss' und s_ns_n' gezogen denken. Der Durchschnittspunkt dieser beiden Berührenden sei O, und der von

Digitized by Google

denselben bei O eingeschlossene Winkel sOs_n' sei Θ. Die von C aus parallel mit $s_n s_n'$ und mit dieser Linie auf einer Seite der dem Punkte s_n entsprechenden Vertikale gezogene Linie CA werde jetzt als der positive Theil der Axe der x angenommen, und die in der Figur von C aus auf CA senkrecht gezogene Linie CB sei der positive Theil der Axe der y; so ist, wenn x, y die Coordinaten des Punktes s in Bezug auf das angenommene System bezeichnen, nach den Principien der analytischen Geometrie

$$47)\quad \tang\Theta = \frac{\partial y}{\partial x},$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$48)\quad w = \frac{\partial y}{\partial x}$$

setzen,

$$49)\quad \tang\Theta = w.$$

Also ist, wenn man nach Θ differentiirt:

$$50)\quad \frac{\partial\Theta}{\cos\Theta^2} = \partial w,$$

und folglich, weil

$$\cos\Theta^2 = \frac{1}{1+\tang\Theta^2} = \frac{1}{1+w^2}$$

ist:

$$51)\quad \partial\Theta = \frac{\partial w}{1+w^2}.$$

Nun ist aber nach 12)

$$52)\quad P = \pm\frac{y - x\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $y - x\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv oder negativ ist; d. i. in der eingeführten Bezeichnung

$$53)\quad P = \pm\frac{y - xw}{\sqrt{1+w^2}}.$$

Also ist, indem alle Differentiale in Bezug auf w genommen werden:

$$\partial P = \pm\frac{(1+w^2)(\partial y - w\partial x - x\partial w) - (y - xw)w\partial w}{(1+w^2)\sqrt{1+w^2}},$$

Digitized by Google

und folglich, weil nach 48)

$$\partial y - w\partial x = 0$$

ist:

$$54)\quad \partial P = \mp \frac{(x+yw)\partial w}{(1+w^2)\sqrt{1+w^2}};$$

also nach 51):

$$55)\quad \partial P = \mp \frac{x+yw}{\sqrt{1+w^2}}\partial\Theta.$$

Bezeichnet nun wie gewöhnlich u die Entfernung des Punktes s oder (xy) von dem Mittelpunkte C der Erde, so ist

$$u^2 - P^2 = x^2 + y^2 - P^2,$$

und folglich nach 53)

$$u^2 - P^2 = x^2 + y^2 - \frac{(y-xw)^2}{1+w^2},$$

d. i., wie man nach leichter Rechnung findet:

$$u^2 - P^2 = \frac{(x+yw)^2}{1+w^2}.$$

Nach (55) ist aber

$$\partial P^2 = \frac{(x+yw)^2}{1+w^2}\partial\Theta^2,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\partial P^2 = (u^2 - P^2)\partial\Theta^2.$$

und folglich

$$56)\quad \partial\Theta = \pm \frac{\partial P}{\sqrt{u^2-P^2}},$$

wo sich nun noch frägt, wie in dieser Gleichung das Zeichen zu nehmen ist. Aus einer blossen Ansicht von Taf. I. Fig. 3. wird aber auf der Stelle erhellen, dass P und Θ gleichzeitig zunehmen und abnehmen, und dass also ∂P und $\partial\Theta$ gleiche Vorzeichen haben, in der vorhergehenden Gleichung folglich das obere Zeichen genommen, also

$$57)\quad \partial\Theta = \frac{\partial P}{\sqrt{u^2-P^2}}$$

gesetzt werden muss.

Weil nach 9) aber

$$P = \mu f(u)$$

ist, so ist

$$\partial P = \mu f'(u)\partial u.$$

und folglich

$$58)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{\sqrt{u^2 - \mu^2(f(u))^2}}.$$

Digitized by Google

Terrestrische Refraction.

In Taf. I. Fig. 4. sei der um den Punkt C, welcher den Mittelpunkt der Erde vorstellen soll, beschriebene Kreis die Meeresfläche, d. h. die wahre oder eigentliche Oberfläche der Erde, und a sei der Halbmesser dieses Kreises, d. h. der Erdhalbmesser. Die Punkte A und B seien zwei Punkte auf der Erde, und in dem Punkte A sei die scheinbare Zenithdistanz Z des Punktes B gemessen worden, welche der von der Berührenden AB' der Refractionscurve AB zwischen A und B in dem Punkte A mit der Vertikale AA' dieses Punktes eingeschlossene Winkel $A'AB'$ ist. Die Höhen der Punkte A und B über der Meeresfläche seien h und H, so dass also $a+h$ und $a+H$ die Entfernungen dieser beiden Punkte von dem Mittelpunkte der Erde sind. Den von den Vertikalen der Punkte A und B am Mittelpunkte der Erde eingeschlossenen Winkel ACB wollen wir in der Kürze durch C bezeichnen.

Weil man das Gesetz der Abnahme der Temperatur in der Atmosphäre von unten nach oben, und also auch das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft in der Atmosphäre von unten nach oben gar nicht kennt, und wohl auch schwerlich Hoffnung haben darf, jemals zur Kenntniss dieses Gesetzes zu gelangen, es auch selbst fraglich bleibt, ob überhaupt ein solches ganz bestimmtes Gesetz in der Natur existirt; so bleibt nichts anderes übrig, als sich bei der Bestimmung der terrestrischen Refraction mit einer Annäherung zu begnügen, wozu auch alle Schriftsteller über diesen Gegenstand bis jetzt genöthigt gewesen sind. Da nun aber bei terrestrischen Messungen der zwischen den beiden Stationspunkten A und B liegende Bogen AB der Refractionscurve in allen Fällen immer nur sehr wenig gekrümmt und im Verhältniss zu den Dimensionen der Erde nur sehr klein ist, so wird man denselben mit hinreichender Annäherung als einen mit dem Krümmungshalbmesser der Refractionscurve in dem Punkte A als Halbmesser beschriebenen Kreisbogen betrachten können, von welcher freilich nur annähernd richtigen Voraussetzung auch Lambert a. a. O. p. 64. ausgeht. Bezeichnet man den Mittelpunkt dieses Kreisbogens durch O und zieht auch noch durch den Punkt B eine Berührende BD an denselben, so sind offenbar, wenn man sich noch die Sehne AB gezogen denkt, nach bekannten Eigenschaften des Kreises die beiden Winkel BAD und ABD einander gleich, und der Winkel BDB' ist also als Aussenwinkel des Dreiecks ABD doppelt so gross als der Winkel BAD oder BAB', durch welchen offenbar die Grösse der Refraction in dem Punkte A dargestellt wird. Sehr leicht erhellet aber auch aus bekannten Sätzen vom Viereck die Gleichheit der beiden Winkel BDB' und AOB, so dass

Digitized by Google

also auch der Winkel AOB die doppelte Refraction BAB', oder, wenn wir die Refraction von jetzt an durch φ bezeichnen, der Winkel $AOB = 2\varphi$ ist. Also ist in dem Dreiecke AOB:

$$AB = 2.AO.\sin\varphi,$$

und folglich, weil nach der Gleichung 34) in den im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen offenbar

$$AO = \frac{a+h}{\mu f'(a+h)}$$

ist:

$$AB = \frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)}\sin\varphi.$$

In dem Dreiecke ABC ist aber nach einem bekannten trigonometrischen Satze

$$AB^2 = (a+h)^2 + (a+H)^2 - 2(a+h)(a+H)\cos C$$

oder

$$AB^2 = (a+h)^2 + (a+H)^2 - 2(a+h)(a+H)(1-2\sin\tfrac{1}{2}C^2),$$

d. i., wie leicht erhellet:

$$AB^2 = (H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2.$$

Vergleicht man dies mit dem Vorhergehenden, so erhält man die Gleichung

$$\frac{4(a+h)^2}{\mu^2\{f'(a+h)\}^2}\sin\varphi^2$$
$$= (H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin\tfrac{1}{2}C^2,$$

also

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\mu^2\{f'(a+h)\}^2\left\{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\frac{a+H}{a+h}\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\sin\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\mu^2\{f'(a+h)\}^2\left\{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2\right\},$$

folglich

$$59)\quad \sin\varphi = \tfrac{1}{2}\mu f'(a+h)\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2 + 4\left(1+\frac{H-h}{a+h}\right)\sin\tfrac{1}{2}C^2},$$

wobei man nicht zu vergessen hat, dass $f'(a+h)$ in der Erdatmosphäre nach dem vorhergehenden Abschnitte bekanntlich eine positive Grösse ist.

Digitized by Google

Weil nun aber, wenn jetzt L den Brechungsexponenten für den leeren Raum und die Luft am Beobachtungsorte A bezeichnet, nach 6) offenbar

$$60)\quad \mu=(a+h)L\sin Z$$

zu setzen ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$61)\quad \sin\varphi=$$

$$\sin Z.\tfrac{1}{2}L(a+h)f'(a+h)\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Dichtigkeit der Luft in der Entfernung u vom Mittelpunkte der Erde überhaupt durch $\varpi(u)$, so erhellet aus der Gleichung 8) und dem Erfahrungssatze III. auf der Stelle die Richtigkeit der Gleichung

$$62)\quad f(u)=\frac{1}{\sqrt{1+K\varpi(u)}},$$

oder

$$63)\quad f(u)=\{1+K\varpi(u)\}^{-\frac{1}{2}},$$

wo nach dem Erfahrungssatze III.

$$64)\quad K=0{,}0005888$$

ist. Also ist

$$f'(u)=-\tfrac{1}{2}\{1+K\varpi(u)\}^{-\frac{3}{2}}.K\varpi'(u),$$

d. i.

$$65)\quad f'(u)=-\frac{K\varpi'(u)}{2\{1+K\varpi(u)\}\sqrt{1+K\varpi(u)}},$$

und folglich

$$66)\quad f'(a+h)=-\frac{K\varpi'(a+h)}{2\{1+K\varpi(a+h)\}\sqrt{1+K\varpi(a+h)}}.$$

Weil nun aber, wie aus der Bedeutung der Grösse L und dem Erfahrungssatze III. erhellet,

$$67)\quad L=\sqrt{1+K\varpi(a+h)}$$

ist, so ist

$$Lf'(a+h)=-\frac{K\varpi'(a+h)}{2\{1+K\varpi(a+h)\}},$$

und folglich nach dem Obigen

Digitized by Google

$$68)\quad \sin\varphi = -\sin Z.\frac{K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{4\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}$$

oder auch

$$69)\quad \sin\varphi = -\sin Z.\frac{\tfrac{1}{4}K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{1+K\overline{\omega}(a+h)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Die Temperatur der Luft nach dem Centesimalthermometer und die Barometerhöhe nach dem metrischen Barometer in dem Stationspunkte A wollen wir nun respective durch t und b bezeichnen. Wird dann ferner die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur 0 und der Barometerhöhe $0^m,76$ überhaupt durch Δ bezeichnet, so ist bekanntlich

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}\Delta.$$

Bezeichnen wir aber den Werth, welchen $\overline{\omega}'(a+h)$ haben würde, wenn in dem Punkte A die Luft die Temperatur 0 hätte und unter dem barometrischen Drucke $0^m,76$ stände, d. h. wenn in dem Punkte A die Dichtigkeit der Luft Δ wäre, durch G, so dass also gleichzeitig

$$\overline{\omega}(a+h)=\Delta,\ \overline{\omega}'(a+h)=G$$

wäre, so wird man offenbar nach den Principien der Differentialrechnung, wenn, wie es zur Zeit der Beobachtung in dem Punkte A nach dem Vorhergehenden wirklich der Fall ist,

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}\Delta$$

ist, gleichzeitig

$$\overline{\omega}'(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}G$$

zu setzen berechtigt sein, oder es ist, weil nach dem Erfahrungssatze III. bekanntlich $\Delta=1$ ist:

$$\overline{\omega}(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)},$$

$$\overline{\omega}'(a+h)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}G;$$

wo nach dem Vorhergehenden offenbar G eine Constante ist. Setzen wir nun der Kürze wegen

$$70)\quad \mathfrak{K}=-\tfrac{1}{4}KG,$$

Digitized by Google

wo auch $\mathfrak{K}$ eine Constante ist, und

$$71)\quad F(b,t)=\frac{b}{0^m{,}76.(1+0{,}00375.t)};$$

so erhält man nach dem Obigen für $\sin\varphi$ den folgenden Ausdruck:

$$72)\quad \sin\varphi=$$

$$\sin Z.\frac{\mathfrak{K}(a+h)F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Man kann auch

$$73)\quad K_1=a\mathfrak{K}$$

setzen, wo K_1 wieder eine Constante ist, und erhält dann nach dem Vorhergehenden

$$74)\quad \sin\varphi=$$

$$\sin Z.\frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\tfrac{1}{2}C^2}.$$

Will man sich verstatten, die immer sehr kleinen Grössen

$$\frac{h}{a}\text{ und }\frac{H-h}{a+h}$$

als verschwindend zu betrachten, so wird

$$75)\quad \sin\varphi=\frac{2K_1F(b,t)}{1+KF(b,t)}\sin\tfrac{1}{2}C\sin Z,$$

oder, weil φ und C immer sehr kleine Grössen sind, näherungsweise

$$76)\quad \varphi=\frac{K_1F(b,t)}{1+KF(b,t)}.C\sin Z.$$

Unter Voraussetzung derselben Temperatur und desselben barometrischen Drucks am Beobachtungsorte, wo die scheinbare Zenithdistanz Z gemessen worden ist, ist also die Refraction φ näherungsweise der Grösse $C\sin Z$ proportional, wo C bekanntlich der von den Vertikalen der beiden Stationen am Mittelpunkte der Erde eingeschlossene Winkel ist.

Bei der vorhergehenden Entwickelung sind wir von den beiden völlig genauen Formeln

$$\text{Chord }AB=\frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)}\sin\varphi$$

und

Digitized by Google

$$\text{Chord}\, AB = \sqrt{(H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin \tfrac{1}{2}C^2}$$

ausgegangen. Denkt man sich nun aber aus dem Mittelpunkte C der Erde mit dem Halbmesser CA durch den Punkt A den die Linie CB in dem Punkte B_1 schneidenden Bogen AB_1 beschrieben, und verstattet sich, diesen Bogen als eine auf CA in A und auf CB in B_1 senkrecht stehende gerade Linie zu betrachten, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke ABB_1 offenbar

$$\text{Chord}\, AB = \text{Arc}\, AB_1 . \operatorname{cosec}(Z+\varphi).$$

Nehmen wir aber an, dass der Winkel C in Graden ausgedrückt sei, so ist

$$(a+h)\pi : \text{Arc}\, AB_1 = 180 : C,$$

also

$$\text{Arc}\, AB_1 = \frac{(a+h)\pi C}{180},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\text{Chord}\, AB = \frac{(a+h)\pi C \operatorname{cosec}(Z+\varphi)}{180}.$$

Gestatten wir uns jetzt, diese Näherungsgleichung statt der im Obigen in Anwendung gebrachten genauen Gleichung

$$\text{Chord}\, AB = \sqrt{(H-h)^2 + 4(a+h)(a+H)\sin \tfrac{1}{2}C^2}$$

zu gebrauchen, so erhalten wir durch Vergleichung mit der genauen Gleichung

$$\text{Chord}\, AB = \frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h)} \sin\varphi$$

die Gleichung

$$\frac{2(a+h)}{\mu f'(a+h} \sin\varphi = \frac{(a+h)\pi C \operatorname{cosec}(Z+\varphi)}{180},$$

also

$$77)\quad \sin\varphi = \frac{\mu\pi f'(a+h)}{360} . C \operatorname{cosec}(Z+\varphi);$$

folglich, weil nach 60)

$$\mu = (a+h)\, L \sin Z$$

ist:

$$78)\quad \sin\varphi = L(a+h) f'(a+h) . \frac{\pi C}{360} . \frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)}.$$

Nach dem Obigen ist aber

Digitized by Google

$$Lf'(a+h) = -\frac{K\overline{\omega}'(a+h)}{2\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}};$$

also

$$\sin\varphi = -\frac{K(a+h)\overline{\omega}'(a+h)}{4\{1+K\overline{\omega}(a+h)\}}\cdot\frac{\pi C}{180}\cdot\frac{\sin Z}{\sin(z+\varphi)};$$

oder nach dem Obigen

$$\sin\varphi = -\frac{\frac{1}{4}KG(a+h)F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot\frac{\pi C}{180}\cdot\frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)},$$

d. i.

$$79)\quad \sin\varphi = \frac{\mathfrak{K}(a+h)F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot\frac{\pi C}{180^0}\cdot\frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)},$$

oder nach 73):

$$80)\quad \sin\varphi = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot\frac{\pi C}{180^0}\cdot\frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)}.$$

Setzt man aber φ für $\sin\varphi$, und nimmt nur an, dass φ und C in denselben Maasstheilen ausgedrückt sind, so erhält man näherungsweise

$$81)\quad \varphi = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot\frac{\sin Z}{\sin(Z+\varphi)}\cdot C.$$

Aus der Gleichung 80) erhält man auch, unter der Voraussetzung, dass C in Theilen des Halbmessers oder der Einheit ausgedrückt ist:

$$\sin\varphi\sin(Z+\varphi) = \frac{K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot C\sin Z,$$

d. i. nach einer bekannten goniometrischen Formel:

$$\cos Z - \cos(Z+2\varphi) = \frac{2K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot C\sin Z,$$

also

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z - \frac{2K_1(1+\frac{h}{a})F(b,t)}{1+KF(b,t)}\cdot C\sin Z.$$

Weil nun

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z\cos 2\varphi - \sin Z\sin 2\varphi$$

Digitized by Google

ist, so ist, wenn man sich wegen der Kleinheit von φ verstattet, $\cos 2\varphi = 1$ und $\sin 2\varphi = 2\varphi$ zu setzen, wovon das Erste mit Vernachlässigung von Gliedern der zweiten, das Zweite mit Vernachlässigung von Gliedern der dritten Ordnung zulässig ist, näherungsweise

$$\cos(Z+2\varphi) = \cos Z - 2\varphi \sin Z,$$

und folglich, wenn man dies für $\cos(Z+2\varphi)$ in die obige Gleichung setzt:

$$82)\quad \varphi = \frac{K_1\left(1+\frac{h}{a}\right)F(b,t)}{1+KF(b,t)}.C,$$

oder, wenn man nun noch $\frac{h}{a}$ als verschwindend betrachtet:

$$83)\quad \varphi = \frac{K_1 F(b,t)}{1+KF(b,t)}.C.$$

Hiernach ist also unter Voraussetzung derselben Temperatur und desselben barometrischen Drucks am Beobachtungsorte die Refraction dem von den Vertikalen der beiden Stationen am Mittelpunkte der Erde mit einander eingeschlossenen Winkel proportional, welches der Satz ist, auf welchen bekanntlich nach Lambert und Laplace die Berechnung der terrestrischen Refraction allgemein gegründet wird. Ich hoffe aber, durch die vorhergehenden Entwickelungen die Richtigkeit meiner in der Einleitung ausgesprochenen Behauptung, dass dieser Satz nur als eine rohere Annäherung betrachtet werden dürfe, jetzt deutlich nachgewiesen zu haben. Es ergiebt sich dies auch auf unzweideutige Weise, wenn man sich die Mühe nimmt, die Betrachtungen, auf welche Lambert a. a. O. seine Entwickelungen gegründet hat, genauer zu verfolgen und sorgfältig zu analysiren; und dass auch Laplace bei seiner Theorie der atmosphärischen Refraction sich eine ziemliche Anzahl von Vernachlässigungen und Auslassungen kleiner Grössen zu gestatten genöthigt gewesen ist, glaube ich hier als hinreichend bekannt voraussetzen zu dürfen.

Vorzüglich kommt es nun noch darauf an, zu zeigen, wie der aus dem Obigen bekannte constante Coefficient K_1 durch Beobachtungen bestimmt werden kann. Das zweckmässigste und der ganzen obigen Theorie, bei welcher der zwischen den beiden Stationspunkten liegende Bogen der Refractionscurve näherungsweise als ein Kreisbogen betrachtet worden ist, am besten entsprechende und überhaupt die consequenteste Durchführung dieser ganzen Lehre gestattende Mittel, zu dieser Bestimmung zu gelangen, scheinen mir jedenfalls die Messungen oder Beobachtungen sogenannter gegenseitiger Zenithdistanzen zu sein.

Hat man nämlich in den beiden Stationspunkten A und B, wobei jetzt Taf. I. Fig. 5. zu vergleichen ist, gleichzeitig die scheinbaren Zenithdistanzen Z und $\mathfrak{Z}$ gemessen, und bezeichnet die entsprechenden Refractionen durch ΔZ und $\Delta\mathfrak{Z}$, die wahren

Digitized by Google

ren Zenithdistanzen also durch $Z+\Delta Z$ und $\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}$; so hat man in dem Dreiecke ABC offenbar die Proportion

$$a+h:a+H=\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}):\sin(Z+\Delta Z).$$

Nun ist aber

$$C+\{180^0-(Z+\Delta Z)\}+\{180^0-(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z})\}=180^0,$$

also

$$\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z}=C-(Z+\mathfrak{Z})+180^0,$$

und aus der obigen Proportion ergiebt sich nach einem bekannten Satze

$$\begin{aligned}
&2a+H+h:H-h\\
&=\sin(Z+\Delta Z)+\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z}):\sin(Z+\Delta Z)-\sin(\mathfrak{Z}+\Delta\mathfrak{Z})\\
&=\sin\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}\cos\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\
&:\cos\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}\sin\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\
&=\tang\{\tfrac{1}{2}(Z+\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z+\Delta\mathfrak{Z})\}:\tang\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\},
\end{aligned}$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}
2a+H+h:H-h&=\tang(90^0+\tfrac{1}{2}C):\tang\{\tfrac{1}{2}(Z-\mathfrak{Z})+\tfrac{1}{2}(\Delta Z-\Delta\mathfrak{Z})\}\\
&=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\{\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)+\tfrac{1}{2}(\Delta\mathfrak{Z}-\Delta Z)\}.
\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung aber, dass der Bogen AB der Refractionscurve zwischen den beiden Stationspunkten A und B ein Kreisbogen sei, welche der ganzen vorhergehenden Theorie der terrestrischen Refraction zum Grunde liegt, ist offenbar $\Delta Z=\Delta\mathfrak{Z}$, weil die Gesichtslinien oder die Visirlinien in A und B als Berührende dieses Kreisbogens zu betrachten und folglich gegen die Sehne AB unter gleichen Winkeln geneigt sind; also ist unter dieser Voraussetzung nach dem Vorhergehenden

$$2a+H+h:H-h=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z),$$

oder auch

$$2(a+h)+H-h:H-h=\cot\tfrac{1}{2}C:\tang\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z).$$

Bestimmt man aus dieser Proportion $H-h$, so erhält man

$$H-h=\frac{2(a+h)\tang\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cot\frac{1}{2}C-\tang\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}$$

oder

$$H-h=\frac{2(a+h)\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)-\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)},$$

d. i.

$$84)\quad H-h=\frac{2(a+h)\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\frac{1}{2}(C+\mathfrak{Z}-Z)},$$

Digitized by Google

also

$$85)\quad H = h + \frac{2(a+h)\sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{Z}-Z)}{\cos\frac{1}{2}(C+\mathfrak{Z}-Z)}.$$

Um mittelst dieser Formel H berechnen zu können, muss ausser den gemessenen scheinbaren Zenithdistanzen Z und $\mathfrak{Z}$ der Erdhalbmesser a bekannt sein, für welchen man am besten den Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids unter der Breite setzt, welche das arithmetische Mittel zwischen den Breiten der beiden Stationspunkte ist, wobei wir die Formeln, nach welchen dieser Krümmungshalbmesser am leichtesten berechnet werden kann, die sich ohne Schwierigkeit aus der Theorie der Ellipse entwickeln lassen, hier als bekannt annehmen. Ferner muss die Höhe h der Station A über der Meeresfläche bekannt sein, welche durch barometrische Höhenmessungen oder durch ein Nivellement bestimmt werden muss, weshalb sich Beobachtungen in der Nähe des Meeres zu den Bestimmungen, von welchen hier die Rede ist, am besten eignen dürften. Endlich muss der Winkel C am Mittelpunkte der Erde, welcher aus dem gemessenen Horizontalabstande der beiden Stationspunkte, wie weiter zu erläutern hier nicht nöthig sein wird, immer leicht berechnet werden kann, bekannt sein, aus welchem Grunde gleichfalls Beobachtungen in der Nähe des Meeres zu solchen Bestimmungen wie die obigen die geeignetsten sein dürften.

Hat man nun auf diese Weise H bestimmt, so sind in dem Dreiecke ABC zwei Seiten $a+h$, $a+H$ und der eingeschlossene Winkel C bekannt, und es können also in diesem Dreiecke die beiden andern Winkel, deren Supplemente die wahren Zenithdistanzen in den beiden Stationspunkten A und B sind, nach bekannten Regeln der ebenen Trigonometrie berechnet werden. Zieht man nun von diesen so berechneten wahren Zenithdistanzen die gemessenen scheinbaren Zenithdistanzen ab, so erhält man die terrestrische Refraction, welche im Obigen überhaupt durch φ bezeichnet worden ist.

Wenn nun auch noch auf der Station A das Barometer und Thermometer beobachtet worden ist, wobei wir die beobachtete Barometerhöhe auf bekannte Weise gehörig reducirt voraussetzen, so sind in der Hauptgleichung 74) mit Ausnahme des constanten Coefficienten K_1 alle Grössen bekannt, und dieser Coefficient kann folglich mittelst der aus 74) unmittelbar sich ergebenden Formel

$$86)\quad K_1 = \frac{\{1+KF(b,t)\}\sin\varphi}{(1+\frac{h}{a})F(b,t)\sin Z\sqrt{\left(\frac{H-h}{a+h}\right)^2+4(1+\frac{H-h}{a+h})\sin\frac{1}{2}C^2}}$$

berechnet werden.

Bei der so eben gegebenen Erläuterung der Bestimmung des constanten Coefficienten habe ich mich bloss an die Hauptformel 74) gehalten, weil die Art und Weise, wie man sich bei dieser Bestimmung mittelst der übrigen im Obigen entwickelten Nähe-

Digitized by Google

rungsformeln zu verhalten hat, nun ganz von selbst erhellen, und hier keiner weitern Erläuterung bedürfen wird.

Wenn aber auch der Refractionscoefficient nach der so eben gegebenen Anleitung bestimmt worden ist und daher als bekannt angenommen werden kann, so wird man bei wirklichen Höhenmessungen zur Bestimmung der gesuchten Höhe am besten und einfachsten doch nur auf dem Wege successiver Annäherungen gelangen können. Man wird nämlich die Refractionen zuerst mittelst einer der beiden Näherungsformeln 75) oder 76), welche von der Höhe nicht abhängen, berechnen und die gemessenen Zenithdistanzen wegen derselben corrigiren, mittelst welcher dann ein erster Näherungswerth der zu bestimmenden Höhe gesucht wird. Dieser erste Näherungswerth der gesuchten Höhe führt dann ferner mittelst der Formel 74) zu einer genauern Bestimmung der Refractionen, wegen welcher die gemessenen Zenithdistanzen von Neuem corrigirt werden, die dann zur Bestimmung eines zweiten Näherungswerths der gesuchten Höhe führen, wobei nun auch schon von selbst erhellen wird, wie man auf diesem Wege beliebig weit, in allen Fällen aber so weit fortschreiten kann, bis zwei auf einander folgende Näherungswerthe der gesuchten Höhe sich in der verlangten Anzahl von Decimalstellen nicht mehr von einander unterscheiden. Abkürzungen und Vereinfachungen dieses Verfahrens werden sich einem Jeden, wo sie zulässig sind, leicht von selbst darbieten; hier beabsichtigten wir nur eine allgemeine Erläuterung desselben, und hatten unser Augenmerk überhaupt zunächst mehr auf die weitere Entwickelung der Theorie der terrestrischen Refraction, als auf den praktischen Theil dieser wichtigen Lehre gerichtet.

Digitized by Google

Astronomische Refraction.

Wenn, wie Taf. I. Fig. 6. zeigt, ein von einem Sterne S ausgehender Strahl Ss die Atmosphäre der Erde in dem Punkte s trifft, und dann nach den in der Atmosphäre erlittenen Brechungen in dem Punkte s_n auf der Oberfläche der Erde anlangt, so ist offenbar Ss_ns_n' der Winkel, um welchen man die in dem Punkte s_n gemessene scheinbare Zenithdistanz Z dieses Sterns vergrössern muss, um seine wahre Zenithdistanz zu erhalten, also der Winkel, welchen man die astronomische Refraction zu nennen pflegt. Wegen der grossen Entfernungen der Sterne von der Erde kann man aber die Linien Ss_n und Ss oder Ss' ohne allen merklichen Fehler als einander parallel betrachten, woraus sich die Gleichheit der Winkel Ss_ns_n' und SOs_n' oder sOs_n' ergiebt, so dass also auch durch den Winkel sOs_n', welcher oben in dem Abschnitte über die allgemeinen geometrischen Eigenschaften der Refractionscurven durch Θ bezeichnet worden ist, die astronomische Refraction dargestellt wird, und wir daher nach 58) für dieselbe die Differentialgleichung

$$87)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{\sqrt{u^2-\mu^2(f(u))^2}}$$

haben, wo jetzt u die Entfernung der äussersten Gränze der Atmosphäre von dem Mittelpunkte der Erde bezeichnet, und daher im Folgenden offenbar so lange als constant zu betrachten ist, so lange die Luft in der Atmosphäre in einem unveränderlichen Zustande vorausgesetzt wird.

Setzen wir nun

$$88)\quad \partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\partial u}{u\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}}$$

oder

$$\partial\Theta = \mu\left\{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.\frac{f'(u)\partial u}{u};$$

und entwickeln die Grösse

$$\left\{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze, dessen Anwendung hier zulässig ist, weil die nothwendige Reellität von $\partial\Theta$ von selbst fordert,

Digitized by Google

dass die Grösse

$$\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2$$

kleiner als die Einheit ist, in eine Reihe, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial\Theta = \mu\frac{f'(u)\partial u}{u} &+ \tfrac{1}{2}\mu^3\frac{(f(u))^2 f'(u)\partial u}{u^3} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\mu^5\frac{(f(u))^4 f'(u)\partial u}{u^5} \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^7\frac{(f(u))^6 f'(u)\partial u}{u^7} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Weil aber die Grösse

$$\mu = aL\sin Z$$

von u ganz unabhängig ist, und Θ für $u=a$ offenbar verschwinden muss, so erhält man aus der obigen Gleichung durch Integration auf der Stelle:

$$\begin{aligned}\Theta = \mu\int_a^u\frac{f'(u)\partial u}{u} &+ \tfrac{1}{2}\mu^3\int_a^u\frac{(f(u))^2 f'(u)\partial u}{u^3} \\ &+ \frac{1.3}{2.4}\mu^5\int_a^u\frac{(f(u))^4 f'(u)\partial u}{u^5} \\ &+ \frac{1.3.5}{2.4.6}\mu^7\int_a^u\frac{(f(u))^6 f'(u)\partial u}{u^7} \\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ueberlegt man nun, dass die Grössen

$$aL\int_a^u\frac{f'(u)\partial u}{u},$$

$$\tfrac{1}{2}a^3L^3\int_a^u\frac{(f(u))^2 f'(u)\partial u}{u^3},$$

$$\frac{1.3}{2.4}a^5L^5\int_a^u\frac{(f(u))^4 f'(u)\partial u}{u^5},$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6}a^7L^7\int_a^u\frac{(f(u))^6 f'(u)\partial u}{u^7},$$

u. s. w.

von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängig und also für alle scheinbaren Zenithdistanzen dieselben sind, so können wir dieselben nach der Reihe durch

$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$

bezeichnen, indem diese Symbole von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängige Grössen bedeuten, und erhalten da-

Digitized by Google

her nach dem Obigen für die astronomische Refraction Θ eine analytischen Ausdruck von der folgenden Form:

$$89)\quad \Theta = \mathfrak{A}\sin Z + \tfrac{1}{2}\mathfrak{B}\sin Z^3 + \frac{1.3}{2.4}\mathfrak{C}\sin Z^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\mathfrak{D}\sin Z^7 + \ldots$$

Einen Ausdruck von anderer Form kann man auf folgende Art entwickeln. Nach dem Obigen ist

$$\partial\Theta = \frac{\mu f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1-\mu^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}},$$

und folglich, wenn man für μ seinen aus dem Vorhergehenden bekannten Werth einführt:

$$\partial\Theta = \frac{aL\sin Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1-a^2L^2\sin Z^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2}},$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\partial\Theta = \frac{aL\sin Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{\cos Z^2 + \{1-a^2L^2\left(\frac{f(u)}{u}\right)^2\}\sin Z^2}},$$

folglich

$$90)\quad \partial\Theta = \frac{aL\,\mathrm{tang}\, Z f'(u)\frac{\partial u}{u}}{\sqrt{1+\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}\mathrm{tang}\, Z^2}}.$$

Entwickeln wir nun wieder die Grösse

$$\{1+(1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2)\mathrm{tang}\, Z^2\}^{-\frac{1}{2}}$$

nach dem Binomischen Lehrsatze in eine Reihe, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\partial\Theta = {} & \mathrm{tang}\, Z \,.\, \frac{aLf'(u)}{u}\partial u \\
& -\frac{1}{2}\mathrm{tang}\, Z^3 \,.\, \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}\partial u \\
& +\frac{1.3}{2.4}\mathrm{tang}\, Z^5 \,.\, \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}^2\partial u \\
& -\frac{1.3.5}{2.4.6}\mathrm{tang}\, Z^7 \,.\, \frac{aLf'(u)}{u}\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\}^3\partial u \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;
\end{aligned}$$

Digitized by Google

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichung integrirt, auf ganz ähnliche Weise wie bei der vorhergehenden Entwickelung:

$$\begin{aligned}\Theta = &\tang Z\int_a^u \frac{aLf'(u)}{u}\partial u\\ &-\frac{1}{2}\tang Z^3\int_a^u \frac{aLf'(u)}{u}\left\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\}\partial u\\ &+\frac{1.3}{2.4}\tang Z^5\int_a^u \frac{aLf'(u)}{u}\left\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\}^2\partial u\\ &-\frac{1.3.5}{2.4.6}\tang Z^7\int_a^u \frac{aLf'(u)}{u}\left\{1-\left(\frac{aLf(u)}{u}\right)^2\right\}^3\partial u\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

woraus sich, wenn wieder

$$A,\ B,\ C,\ D,\ldots.$$

gewisse von der scheinbaren Zenithdistanz Z ganz unabhängige Grössen bezeichnen, für die astronomische Refraction Θ unmittelbar der folgende Ausdruck ergiebt:

$$91)\quad \Theta = A\tang Z - \frac{1}{2}B\tang Z^3 + \frac{1.3}{2.4}C\tang Z^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6}D\tang Z^7 + \ldots$$

Diese Form des allgemeinen Ausdrucks der astronomischen Refraction wird der Theorie derselben gewöhnlich zum Grunde gelegt, und dabei eine grössere oder geringere Anzahl von Gliedern der Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens vom Anfange derselben an berücksichtigt. Da es uns hier, wie schon in der Einleitung bemerkt worden ist, vorläufig nur auf eine allgemeine Erläuterung dieses wichtigen Gegenstandes ankommt, und wir für jetzt mit diesen Entwickelungen nur eine Vervollständigung der im Vorhergehenden gegebenen Theorie der terrestrischen Refraction, vorzüglich Anfängern zu Liebe, bezwecken; so wird es der Kürze wegen hinreichend sein, bei den beiden ersten Gliedern der obigen Reihe stehen zu bleiben, und daher

$$92)\quad \Theta = A\tang Z - \tfrac{1}{2}B\tang Z^3$$

zu setzen. Die Coefficienten A und B sind offenbar nur so lange constant, so lange der Zustand der Atmosphäre ungeändert, d. h. so lange der Stand des Barometers und Thermometers am Beobachtungsorte derselbe bleibt. Legen wir nun aber den Zustand der Atmosphäre, wenn am Beobachtungsorte der Stand des Barometers $0^m,76$ und der Stand des Thermometers 0 ist, als einen Normalzustand zum Grunde, lassen ferner jetzt A und B die diesem Normalzustande der Atmosphäre entsprechenden Werthe der beiden Constanten bedeuten, und setzen endlich, wie gewöhnlich geschieht und, wenn auch nicht mit völliger Strenge, den Beobachtungen zufolge doch wenigstens näherungsweise verstattet ist, die atmosphärischen Refractionen den Dichtigkeiten der Luft proportional; so wird man offenbar, da bekanntlich

Digitized by Google

$$F(b,t)=\frac{b}{0^m,76.(1+0,00375.t)}$$

die Dichtigkeit der Luft bei dem Barometerstande b und der Temperatur t ist, nach dem Obigen im Allgemeinen

$$93)\quad \Theta=F(b,t).(A\,\mathrm{tang}\,Z-\tfrac{1}{2}B\,\mathrm{tang}\,Z^3)$$

oder

$$94)\quad \Theta=F(b,t)A\,\mathrm{tang}\,Z-\tfrac{1}{2}F(b,t)B\,\mathrm{tang}\,Z^3$$

zu setzen haben. Die Constanten A und B in dieser Formel müssen aber durch Beobachtungen bestimmt werden, wozu die Astronomie verschiedene Wege darbietet, von denen wir hier jedoch nur den folgenden etwas näher erläutern wollen.

Man messe die scheinbaren Zenithdistanzen Z' und Z'' eines Circumpolarsterns bei seinem obern und untern Durchgange durch den Meridian, und beobachte gleichzeitig die Stände des Barometers und Thermometers b', t' und b'', t''; so hat man, wenn die entsprechenden Refractionen durch Θ' und Θ'' bezeichnet werden, nach 94) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\Theta'=F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'.A-\tfrac{1}{2}F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'^3.B,$$
$$\Theta''=F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''.A-\tfrac{1}{2}F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''^3.B.$$

Weil nun $Z'+\Theta'$, $Z''+\Theta''$ die wahren Zenithdistanzen sind, und bekanntlich, wenn P den Abstand des Pols vom Zenith bezeichnet, jederzeit

$$(Z'+\Theta')\pm(Z''+\Theta'')=2P$$

ist *); so erhalten wir aus den beiden obigen Gleichungen, wenn der Kürze wegen

$$\alpha=Z'\pm Z'',$$
$$\beta=F(b',t')\,\mathrm{tang}\,Z'\pm F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z'',$$
$$\gamma=\tfrac{1}{2}F(b',t)\,\mathrm{tang}\,Z'^3\pm\tfrac{1}{2}F(b'',t'')\,\mathrm{tang}\,Z''^3$$

gesetzt wird, wo die Grössen α, β, γ aus den Beobachtungen sämmtlich bekannt sind, auf der Stelle die folgende Gleichung:

$$\alpha+\beta A-\gamma B=2P.$$

Hat man nun aber ganz auf dieselbe Art wie vorher drei Circumpolarsterne beobachtet, so erhält man auch drei Gleichungen von der Form:

$$\alpha+\beta A-\gamma B=2P,$$
$$\alpha_1+\beta_1 A-\gamma_1 B=2P,$$
$$\alpha_2+\beta_2 A-\gamma_2 B=2P;$$

*) Die obern oder untern Zeichen sind hier und nachher zu nehmen, jenachdem die Zenithdistanz Z'' (für unsere Hemisphäre) auf der Nordseite oder auf der Südseite des Zeniths gemessen worden ist.

Digitized by Google

in denen die Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$$

aus den Beobachtungen sämmtlich bekannt, und nur die drei Grössen A, B, P unbekannt sind, welche letzteren sich also mittelst der drei vorhergehenden Gleichungen bestimmen lassen.

Dass durch Vervielfältigung solcher Beobachtungen und mittelst der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate eine grössere Genauigkeit bei diesen Beobachtungen erreicht werden kann und nur allein zu erreichen ist, dürfen wir hier als allgemein bekannt voraussetzen. Jede Beobachtung eines Circumpolarsterns liefert eine Gleichung des ersten Grades von der obigen Form zwischen den drei unbekannten Grössen A, B, P; und hat man nun mehr als drei Sterne beobachtet, so lassen sich die daraus resultirenden Gleichungen, deren Anzahl die Anzahl der zu bestimmenden drei unbekannten Grössen übersteigt, bekanntlich nur der Behandlung nach der Methode der kleinsten Quadrate unterwerfen.

Dass sich zur Bestimmung der constanten Coefficienten in der Gleichung 89) eine der vorhergehenden ganz ähnliche Methode anwenden lassen würde, fällt auf der Stelle in die Augen.

Das Obige enthält zugleich eine Methode zur Bestimmung der die vorher durch P bezeichnete Distanz des Pols vom Zenith zu neunzig Graden ergänzenden Polhöhe des Beobachtungsorts, ohne dabei die unmittelbare Kenntniss der Refraction vorauszusetzen, hat hier aber zunächst nur den Zweck, im Allgemeinen die Möglichkeit der Bestimmung der beiden Constanten A und B durch Beobachtungen zu erläutern.

Eine weitere Entwickelung der Theorie der astronomischen Refraction behalte ich einer andern Gelegenheit vor, und bemerke nochmals, dass die obigen kurzen, wenig erschöpfenden Betrachtungen über diesen wichtigen Gegenstand nur der Vollständigkeit wegen und Anfängern zu Liebe beigefügt worden sind, indem ich in der vorliegenden Abhandlung hauptsächlich nur eine weitere Entwickelung der geometrischen Theorie der terrestrischen Refraction im Auge hatte, und wohl wünschte, durch dieselbe die Aufmerksamkeit einer grösseren Anzahl von Lesern auf diese Theorie von Neuem hinzulenken, und zu einer Wiederholung der Bestimmung des terrestrischen Refractionscoefficienten mit sorgfältiger Berücksichtigung aller dabei in Betracht kommenden Umstände vielleicht Veranlassung zu geben.

Digitized by Google

III.

Zur Differenziation der Potenz.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Der Differenzialquotient von x^μ ist bekanntlich die Gränze, welcher sich der Ausdruck

$$\frac{(x+\Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \frac{x^\mu}{\Delta x}\left[(1+\frac{\Delta x}{x})^\mu - 1\right]$$

nähert, sobald Δx bis zur Null abnimmt. Da unter dieser Voraussetzung auch $\frac{\Delta x}{x}$ gegen die Null convergirt, so kann man $\frac{\Delta x}{x} = \delta$ setzen, und es ist jetzt für Lim $\delta = 0$:

$$\frac{d(x^\mu)}{dx} = x^{\mu-1} \operatorname{Lim} \frac{(1+\delta)^\mu - 1}{\delta}. \tag{1}$$

Zur Auffindung des Gränzwerthes rechts hat man sehr verschiedene Wege eingeschlagen, weil man nicht gern das Binomialtheorem für jeden beliebigen Exponenten dabei in Anwendung bringen, sondern im Gegentheil dieses erst im Verlaufe der Differenzialrechnung mit Hülfe des Werthes von $d(x^\mu):dx$ ableiten wollte. Zwar hat es nicht die mindeste Schwierigkeit, mit Hülfe des Satzes

$$\operatorname{Lim}\left[(1+a\delta)^{\frac{1}{\delta}}\right] = e^a$$

die gesuchte Limes zu ermitteln, wie ich z. B. in meinem Handbuche der Differenzialrechnung gethan habe; wem aber die Anwendung dieses Theoremes zu fremdartig erscheinen mag, dem wird vielleicht die folgende Entwickelung besser zusagen, worin nichts weiter als die Kenntniss der ganz elementaren Formel

$$\frac{u^m - 1}{u - 1} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{m-1} \tag{2}$$

vorausgesetzt wird.

Sei zunächst μ eine ganze positive Zahl $= m$, so ist

Digitized by Google

$$\frac{(1+\delta)^\mu-1}{\delta}=\frac{(1+\delta)^m-1}{(1+\delta)-1},$$

und diess vermöge der Formel (2) auch

$$=1+(1+\delta)+(1+\delta)^2+\ldots.+(1+\delta)^{m-1}.$$

Da sich nun für bis zur Null abnehmende δ jedes einzelne Glied der Gränze 1 nähert, so wird

$$\text{Lim}\frac{(1+\delta)^m-1}{\delta}=m. \qquad (3)$$

Schreibt man $k\delta$ für δ, so erhält man noch

$$\text{Lim}\frac{(1+k\delta)^m-1}{\delta}=mk. \qquad (4)$$

Sei ferner μ gleich einem Bruche $\frac{p}{q}$, dessen Zähler und Nenner als ganze positive Zahlen vorausgesetzt werden, und

$$\text{Lim}\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=r, \qquad (5)$$

so kann man für ein beliebiges δ setzen:

$$\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=r+\varepsilon,$$

und hier muss ε eine Grösse sein, die mit δ gleichzeitig bis zur Null abnimmt, weil man ausserdem nicht auf die Voraussetzung (5) zurückkäme, sobald hier δ gegen die Null convergirt. Es folgt nun weiter

$$(1+\delta)^{\frac{p}{q}}=1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta,$$

$$(1+\delta)^p=(1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta)^q;$$

und folglich nach Subtraktion der Einheit und Division mit δ

$$\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}=\frac{(1+\overline{r+\varepsilon}\,\delta)^q-1}{\delta}. \qquad (6)$$

Die Gleichung (4) berechtigt uns aber

$$\frac{(1+k\delta)^m-1}{\delta}=mk+\varepsilon'$$

zu setzen, wo ε' mit δ bis zur Null abnimmt. Benutzen wir diess für die Gleichung (6), wo q, wie früher m, eine positive ganze Zahl ist, so folgt

Digitized by Google

$$\frac{(1+\delta)^p-1}{\delta}=q(r+\varepsilon)+\varepsilon'.$$

Gehen wir in dieser Gleichung zur Gränze für unendlich, d. h. bis zur Null abnehmende δ über und erinnern uns, dass das Verschwinden von δ auch das Verschwinden von ε und ε' nach sich zieht, so giebt die Anwendung der Formel (3) für $m=p$

$$p=qr \text{ und folglich } r=\frac{p}{q},$$

d. h. nach No. (5)

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{\frac{p}{q}}-1}{\delta}=\frac{p}{q}.$$

Mit No. (3) zusammen fliesst hieraus der Satz, dass für jedes rationale und positive μ

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu \qquad (7)$$

ist, der sich durch die blose Bemerkung, dass man sich nicht angebbaren Zahlen durch angebbare Zahlen soweit man will nähern kann, auf irrationale und positive μ, d. h auf jedes beliebige positive μ erweitert.

Ist endlich μ negativ, etwa $\mu=-\nu$, so sei wieder

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{-\nu}-1}{\delta}=r.$$

Es folgt hieraus der Reihe nach

$$(1+\delta)^{-\nu}=1+\overline{r+\varepsilon}\delta,$$

$$(1+\delta)^{\nu}=\frac{1}{1+\overline{r+\varepsilon}\delta},$$

$$\frac{(1+\delta)^{\nu}-1}{\delta}=-\frac{r+\varepsilon}{1+\overline{r+\varepsilon}\delta};$$

und da ε eine mit δ bis zur Null abnehmende Grösse sein muss, ν aber an sich positiv ist, so folgt jetzt durch Gränzenübergang

$$\nu=-r, \text{ also } r=-\nu,$$

d. h. vermöge der Bedeutung von r

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{(-\nu)}-1}{\delta}=(-\nu).$$

Mit No. (7) zusammengehalten giebt diess den Satz, dass überhaupt für jedes reelle μ

Digitized by Google

$$\operatorname{Lim}\frac{(1+\delta)^{\mu}-1}{\delta}=\mu \tag{8}$$

ist, und dieser führt vermöge der Gleichung (1) zu der allgemeinen Formel

$$\frac{d(x^{\mu})}{dx}=\mu x^{\mu-1},$$

deren Beweis demnach nur die Kenntniss der Summenformel für die geometrische Progression in Anspruch nimmt.

III.

Ueber eine eigenthümliche Erscheinung bei Reihensummirungen.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Die interessante Thatsache, deren Besprechung den Gegenstand dieser Zeilen ausmachen soll, besteht, in kürzester Form ausgedrückt, darin, dass eine durchweg convergente Reihe zwei oder mehrere ihrer Gestalt nach sehr verschiedene Summen haben kann, jenachdem eine in der Reihe vorkommende Variabele zwischen verschiedenen Gränzen liegt. Denken wir uns, um den Begriffen ein anschauliches Substrat zu geben, zunächst eine Reihensummirung von der Form

$$F(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\dots.$$

ausgeführt, und substituiren wir für z die Grösse

$$z=\frac{x}{1+x^2},$$

welche für kein reelles x die Einheit überschreitet; so bildet

$$F(z)=F\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$$

Digitized by Google

offenbar eine neue Funktion von x, die sehr verschieden sein kann und etwa $f(x)$ heissen möge. Wir haben dann

$$f(x) = A_0 + A_1 \frac{x}{1+x^2} + A^2 \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \ldots \qquad (1)$$

Die rechte Seite besitzt nun die Eigenschaft, sich nicht zu ändern, wenn man $\frac{1}{x}$ an die Stelle von x setzt, denn es ist

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{1+x^2},$$

und folglich wird jetzt

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = A_0 + A_1 \frac{x}{1+x^2} + A_2 \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \ldots \qquad (2)$$

Die rechten Seiten von (1) und (2) sind nun identisch, und daraus scheint zu folgen, dass es auch die linken Seiten sein müssten; aber das ist gar nicht nöthig, denn im Allgemeinen kann $f\left(\frac{1}{x}\right)$ unmöglich mit $f(x)$ zusammenfallen. Wenn nun ferner in (1) $x < 1$ war, so ist in (2) das neue $x > 1$, und folglich müssen wir jetzt sagen: in der Gleichung

$$y = A_0 + A_1 \left(\frac{x}{1+x^2}\right) + A_2 \left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \ldots..$$

hat die Summe y zwei verschiedene Werthe, nämlich

für $x < 1$ ist $y = f(x)$,

für $x > 1$ dagegen $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Wir wollen diess an einem Beispiele erläutern, dem man beliebig viele andere leicht anreihen kann.

Entwickelt man $\sqrt{1-z^2}$ nach dem Binomialtheorem, so ist für $z \leq 1$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1-\sqrt{1-z^2}}{z} \\ = \dfrac{1}{2} z + \dfrac{1}{2.4} z^3 + \dfrac{1.3}{2.4.6} z^5 + \dfrac{1.3.5}{2.4.6.8} z^7 + \ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

Aus

$$\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z} = x \right.$$

Digitized by Google

folgt aber sehr leicht

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und somit ergiebt sich auf der Stelle

$$x=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots, \qquad (4)$$

d. h. eine Gleichung von der Form (1), und zwar diejenige, wo $f(x)$ die einfachste Gestalt hat. Jedoch gilt dieses Resultat nur für $x \leqq 1$; denn aus No. (3) geht hervor, dass die linke Seite eine Funktion von z darstellt, welche beständig wächst, wenn man z das Intervall 0 bis 1 durchlaufen lässt, also für $z=1$ ihr Maximum erreicht $=1$; daraus folgt denn sogleich

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\leqq 1, \text{ d. h. } x\leqq 1,$$

wie behauptet wurde.

Setzt man dagegen in der Gleichung (3)

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=\frac{1}{x},$$

so findet man umgekehrt

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und folglich

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots \qquad (5)$$

und diess gilt wie vorhin für

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\leqq 1, \text{ d. h. } \frac{1}{x}\leqq 1 \text{ oder } x\geqq 1.$$

Vergleichen wir nun die unter (4) und (5) gefundenen Resultate, so ergiebt sich, dass die Summe der Reihe

$$y=\frac{x}{1+x^2}+\frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3+\frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5+\ldots \qquad (6)$$

ausgedrückt wird durch

$$y=x \text{ von } x=0 \text{ bis } x=1,$$

$$y=\frac{1}{x} \text{ von } x=1 \text{ bis } x=\infty.$$

Digitized by Google

Diess lässt sich geometrisch sehr gut veranschaulichen, wenn man sich in No. (6) x und y als rechtwinkliche Coordinaten denkt. Die Linie, deren Gleichung No. (6) ist, besteht dann aus zwei Theilen, von denen der erste eine die Abscissenachse unter dem Winkel 45° schneidende und durch den Anfangspunkt gehende Gerade (OB in Taf. I. Fig. 7.) und der andere ein Stück von einer gleichseitigen Hyperbel bildet, deren Achse $=\sqrt{2}$ ist und deren Asymptoten die Coordinatenachsen sind. Die vorher angeführte Figur giebt hiervon eine Abbildung, bei der $OA=AB=1$, $OB=\sqrt{2}$ ist, und worin OBS den positiven Theil der fraglichen Curve darstellt.

Es knüpft sich hieran eine allgemeinere Untersuchung, welche zeigen soll, auf welche Weise man jede gewissen Bedingungen unterworfene Funktion $f(x)$ in eine Reihe von der Form

$$A_0+A_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots$$

verwandeln kann. Wir müssen zu diesem Zwecke an die sogenannte Umkehrungsformel von Lagrange erinnern, welche Folgendes sagt. Ist y' die kleinste, d. h. die mit z gleichzeitig verschwindende Wurzel der Gleichung

$$y-z\varphi(y)=0, \qquad (7)$$

worin $\varphi(y)$ eine stetige für $y=0$ weder verschwindende noch unendlich werdende Funktion von y bezeichnet, so lässt sich jede andere Funktion $\psi(y')$ jener kleinsten Wurzel in die Reihe

$$\psi(y')=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots \qquad (8)$$

verwandeln, wobei die Coeffizienten mittelst der Formel

$$A_n=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{d^{n-1}[\varphi(y)^n\psi'(y)]}{dy^{n-1}} \qquad (9)$$

für $y=0$ nach geschehener Differenziation bestimmt werden. Diese Reihenentwickelung gilt aber nur so lange, als der Modulus von z kleiner als der Modulus des kleinsten z ist, welches die simultanen Gleichungen

$$z=\frac{y}{\varphi(y)},\quad z=\frac{1}{\varphi'(y)} \qquad (10)$$

erfüllt, und ausserdem muss $\psi(y)$ eine Funktion sein, welche für sich in eine Reihe von der Form $a_0+a_1y+a_2y^2+\ldots$ verwandelbar sein würde *).

Um hiernach unser Problem zu lösen, setzen wir in (7) $\varphi(y)=\frac{1}{2}(y^2+1)$; die Gleichung

---

*) M. s. mein Handbuch der Differenzialrechnung Cap. IX.

Digitized by Google

$$y-\frac{z}{2}(y^2+1)=0$$

hat dann die zwei Wurzeln

$$y=\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z},\quad y=\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z};$$

von denen die zweite mit z gleichzeitig verschwindet, also unser y' darstellt. So haben wir denn

$$\left.\begin{aligned}\psi(y')&=\psi\left(\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}\right)\\&=A_0+A_1z+A_2z^2+A_3z^3+\ldots\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

und dabei ist

$$A_n=\frac{1}{1.2\ldots.n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\frac{d^{n-1}[(y^2+1)^n\psi'(y)]}{dy^{n-1}},\text{ für } y=0.\quad(12)$$

Die beiden simultanen Gleichungen (10) sind

$$z=\frac{y}{\frac{1}{2}(y^2+1)},\quad z=\frac{1}{y};$$

also

$$\frac{2y}{y^2+1}=\frac{1}{y};$$

daraus folgt $y=\pm 1$, und nach dem Vorigen $z=\frac{1}{\pm 1}=\pm 1$, und folglich muss der Modulus von z immer kleiner als die Einheit sein, was man der Gleichung (11) schon im Voraus ansehen konnte. Setzt man in ihr

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=x,$$

wo nun wegen $z<1$ auch immer $x<1$ ist, so folgt

$$z=\frac{2x}{1+x^2},$$

und mithin

$$\psi(x)=A_0+2A_1\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+2^2A_2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\ldots$$

Schreibt man f für ψ und setzt

$$K_n=\frac{d^{n-1}[(y^2+1)^nf'(y)]}{dy^{n-1}},\text{ für } y=0;\quad(13)$$

so ergiebt sich jetzt, weil $A_0=f(0)$ sein muss:

Digitized by Google

$$f(x)=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots\quad x<1. \tag{14}$$

Hätte man dagegen

$$\frac{1-\sqrt{1-z^2}}{z}=\frac{1}{x}$$

gesetzt, so würde man zu dem Resultate

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots\quad x>1 \tag{15}$$

gekommen sein. Es ist demnach für

$$y=f(0)+\frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)+\frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2+\ldots,$$

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=1, \\ y=f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ von } x=1 \text{ bis } x=\infty; \end{array}\right\} \tag{17}$$

und die Curve, deren Gleichung (16) ist, besteht demnach wieder aus zwei Linien von verschiedener Natur *).

Man könnte noch fragen, ob sich nicht ein dritter analytischer Ausdruck finden liesse, der von selbst entweder in $f(x)$ oder $f\left(\frac{1}{x}\right)$ übergeht, jenachdem $x<1$ oder >1 ist und der dann ganz im Allgemeinen den Werth von y darstellte und die Unterscheidung von $x \gtrless 1$ überflüssig machte. Diess lässt sich auf folgende Weise erreichen. Nach einem bekannten Theoreme ist der Werth des Integrales

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\vartheta\cos\beta\vartheta}{\vartheta}d\vartheta$$

$$=\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ 0$$

$$\text{für } \alpha>\beta\ ,\ \alpha=\beta\ ,\ \alpha<\beta.$$

Bilden wir nun den Ausdruck

$$X=f(x)\int_0^\infty\frac{\sin\vartheta\cos x\vartheta}{\vartheta}d\vartheta+f\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty\frac{\sin x\vartheta\cos\vartheta}{\vartheta}d\vartheta,$$

---

*) Beispiele hierzu kann man sich leicht in Menge verschaffen, da es viele Funktionen $f(x)$ giebt, für welche die Bestimmung von K_n keinen Schwierigkeiten unterliegt, z. B. $f(x)=x^m$ (m ganz und positiv), $f(x)=\frac{1}{2}l(1+x^2)$ u. s. w.

Digitized by Google

worin x als constant für die Integration nach ϑ angesehen wird, so ist für $1 > x$ das erste Integral $= \frac{\pi}{2}$, das zweite $= 0$, folglich

$$X = \frac{\pi}{2} f(x);$$

ferner für $x = 1$ jedes der Integrale $= \frac{\pi}{4}$, mithin

$$X = \frac{\pi}{4} f(1) + \frac{\pi}{4} f(1) = \frac{\pi}{2} f(1),$$

und für $x > 1$ das erste Integral $= 0$, das zweite $= \frac{\pi}{2}$, also

$$X = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es stellt daher der Ausdruck $\frac{2}{\pi} X$ in jedem Falle den Werth von y dar, und demnach ist für die nach Formel (13) bestimmten Werthe von K

$$\left.\begin{aligned} & f(0) + \frac{K_1}{1}\left(\frac{x}{1+x^2}\right) + \frac{K_2}{1.2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^2 + \ldots \\ = & \frac{2}{\pi}\left[f(x)\int_0^\infty \frac{\sin\vartheta \cos x\vartheta}{\vartheta} d\vartheta + f\left(\frac{1}{x}\right)\int_0^\infty \frac{\sin x\vartheta \cos\vartheta}{\vartheta} d\vartheta\right] \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

und diess gilt für alle x von $x = 0$ bis $x = \infty$. Der reelle Gewinn bei dieser Form besteht darin, dass die Distinktionen hinsichtlich des x wegfallen, was oft die Rechnung abkürzt. Wollte man z. B. den Werth des Integrales

$$S = \int_0^x yF(x)\,dx,$$

wo F eine beliebige Funktion bezeichnet, entwickeln, so würde man, um sich der Formeln (16) und (17) bedienen zu können, erst schreiben müssen

$$S = \int_0^1 yF(x)\,dx + \int_1^\infty yF(x)\,dx,$$

und dann im ersten Integrale $y = f(x)$ und im zweiten $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ setzen; unter Anwendung der Formel (18) dagegen ist eine solche Zerspaltung von S nicht nöthig, indem man für y unmittelbar die rechte Seite der Gleichung (18) substituirt und damit S in ein Doppelintegral verwandelt.

Zum Schlusse noch ein Stückchen Polemik. Die vorigen Untersuchungen zeigen nämlich vollständig die Nichtigkeit der sogenannten syntaktischen oder allgemein analytischen

Digitized by Google

Bedeutung der unendlichen Reihen, wie sie namentlich von **Ohm** und seinen Schülern verfochten wird. Gäbe man z. B. einem solchen Herrn die Summirung der Reihe

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^5+\ldots$$

auf, so würde er sagen: nichts leichter als das, wir schreiben die Reihe in der Form

$$y=\frac{1}{2}2x(1+x^2)^{-1}+\frac{1}{2.4}(2x)^3(1+x^2)^{-3}+\ldots$$

und wenden das Binomialtheorem auf jede der einzelnen Potenzen von x^2 an; diess giebt

$$\begin{aligned}y=&\frac{1}{2}2x(1-x^2+x^4-x^6+\ldots)\\&+\frac{1}{2.4}(2x)^3(1-3x^2+6x^4-\ldots)\\&+\frac{1.3}{2.4.6}(2x)^5(1-5x^2+\ldots)\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

und zwar **ganz allgemein** richtig für alle x. Denn so lange x nicht zu einer Zahl spezialisirt wird, ist ja in der Gleichung

$$(1+x^2)^{-n}=1-\frac{n}{1}x^2+\frac{n(n+1)}{1.2}x^4-\ldots \tag{19}$$

x nur „der Träger der Operationen“ *), allgemein analytisches Symbol u. s. w. Die Zusammenziehung derjenigen Glieder, die gleiche Potenzen von x enthalten, giebt nun $y=x$ und folglich ist **ganz allgemein**

$$x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^3+\ldots \tag{20}$$

Die Unrichtigkeit hiervon zeigt sich aber sogleich, wenn man $\frac{1}{x}$ für x setzt, denn man erhält $x=\frac{1}{x}$, und das ist syntaktisch ungeheuer falsch und nur für $x=1$ richtig, so dass also am Ende gar keine Reihensummirung, sondern nur $x=1$ herauskommt.

*) Mir fällt bei diesem **Ohm**'schen Stichworte allemal das früher an deutschen Höfen existirende Institut der Prügeljungen ein, auch erinnert es mich an jene chinesischen Proletarier, die davon leben, dass sie die Anderen zuerkannten Bambushiebe sich aufzählen lassen.

Digitized by Google

Wir Anderen, die eine **Gleichung** zwischen Funktion und Reihe nur dann gelten lassen, wenn letztere convergirt, würden nun so verfahren. Die Formel (19) setzt voraus, dass $x<1$ sei, weil sonst die Reihe divergirt und mit $(1+x^2)^{-n}$ dann nicht mehr identisch ist. Wir führen also die ganze vorige Rechnung nur mit der Bedingung $x<1$ und behaupten daher auch das Endresultat $y=x$ oder die Gleichung (20) nur für $x<1$. Ist dagegen $x>1$, so schreiben wir

$$\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \text{ für } \frac{x}{1+x^2},$$

setzen $\frac{1}{x}=\xi$, wo nun $\xi<1$ ist, und nehmen die ganze Rechnung jetzt mit der Gleichung

$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\xi}{1+\xi^2}+\frac{1}{2.4}\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right)^2+\ldots$$

in Bezug auf ξ so vor, wie vorhin in Bezug auf x. Es findet sich dann $y=\xi$, d. h. $y=\frac{1}{x}$, und so gelangen wir genau zu demselben Endresultate wie früher. — Die Anzahl solcher Beispiele lässt sich übrigens leicht vermehren, und sie zeigen immer wieder, dass divergente Reihen den Funktionen, aus denen sie entwickelt wurden, nicht **gleich** zu setzen sind. Um aber solche Beispiele zu kennen, muss man sich im Gebiete des Calcüls etwas umgesehen und sich namentlich mit diskontinuirlichen Funktionen beschäftigt haben. Wer weiter nichts will, als Funktionen wie e^x, $\sin x$ etc., in Reihen verwandeln, langt freilich mit jeder noch so miserabelen, ja sogar mit gar keiner Ansicht aus; geht man aber ein paar Schritte weiter, so lernt man bald das Gefährliche solcher angeblich allgemeinen Theorien kennen; versteigt man sich endlich in Gegenden, wo es nur einen einzigen Weg, den man sich erst selbst brechen muss, und also auch keine Controlle giebt, so fühlt man die Nothwendigkeit solcher Methoden, welche die Garantie der Sicherheit in sich selbst tragen. Diess ist auch ganz einfach der Grund, warum alle die Männer, welche in neuerer Zeit die Wissenschaft materiell erweitert haben, sich zu den hauptsächlich von **Cauchy** und **Lejeune Dirichlet** vertretenen Ansichten bekennen.

Digitized by Google

IV.

Ueber die cylindrischen Kanalflächen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Wenn eine geschlossene Fläche oder Körper sich so bewegt, dass einer ihrer Punkte auf einer bestimmten Kurve sich bewegt, so ist die umhüllende Fläche aller der successiven Lagen, welche die bewegliche Fläche einnimmt, eine Kanalfläche. Für den Fall, dass die bewegliche Fläche eine Kugelfläche von konstantem Halbmesser ist, deren Mittelpunkt auf einer gegebenen Kurve sich bewegt, nennen wir die entstehende Kanalfläche eine cylindrische. Wir stellen uns nun im Folgenden die Aufgabe, den Flächen- und den Rauminhalt dieser letztern Gattung zu bestimmen.

I.

Eine Kugel vom Halbmesser r bewegt sich so, dass ihr Mittelpunkt auf einem Kreise bleibt, dessen Gleichung ist

$$y^2 = R^2 - x^2;$$

welches ist die Gleichung der beschriebenen Kanalfläche?

Bezeichnet a die Abscisse eines bestimmten Punktes des festen Kreises, so ist das dazu gehörige $y = \pm\sqrt{R^2 - a^2}$ und die Gleichung der Kugelfläche, wenn ihr Mittelpunkt in diesem Punkte sich befindet, ist

$$(y \mp \sqrt{R^2 - a^2})^2 + (x - a)^2 + z^2 = r^2. \qquad (1)$$

Differenzirt man diese Gleichung nach a, so ergiebt sich:

$$\pm (y \mp \sqrt{R^2 - a^2}) \frac{a}{\sqrt{R^2 - a^2}} - x + a = 0$$

oder

$$\pm ay = x\sqrt{R^2 - a^2}. \qquad (2)$$

Eliminirt man nun a zwischen der Gleichung (1) und (2), so ergiebt sich als Gleichung der verlangten Kanalfläche:

Digitized by Google

$$(x^2+y^2+z^2+R^2-r^2)^2=4R^2(x^2+y^2). \qquad (3)$$

Wie man leicht findet, wird diese Fläche von einer Ebene, die durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und auf der Ebene der xy senkrecht steht, in einem Kreise geschnitten, dessen Halbmesser r ist, was klar ist, da offenbar die vorliegende, durch die Gleichung (3) ausgedrückte Fläche auch entsteht, wenn ein Kreis vom Halbmesser r, dessen Ebene senkrecht steht auf der Ebene des festen Kreises, sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt den Umfang des festen Kreises durchläuft, oder dass er sich um die Axe der z dreht in der Entfernung R.

Suchen wir nun den Flächeninhalt der betrachteten Kanalfläche zu bestimmen.

Sei in Taf. I. Fig. 8. CD ein Viertelskreis, dessen Mittelpunkt G und dessen Halbmesser $DG=r$ ist; ferner sei AO senkrecht auf GA und $AG=R$; EF ein Element des Kreises, dessen Gleichung

$$y^2+x^2=r^2$$

sein soll. Dieser Viertelskreis drehe sich um AO, so beschreibt das Element EF, das man als geradlinig betrachten kann, eine Kegelfläche, deren Inhalt

$$=\pi.EF.(MF+NE)=\pi.\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}.(R-x+R-x+dx)$$

$$=2\pi\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}(R-x)\,dx$$

ist. Nun ist $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{x^2}{r^2-x^2}$; demnach ist die Fläche, welche durch den Viertelskreis CD beschrieben wird:

$$2r\pi\int_0^r\frac{(R-x)dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=Rr\pi^2-2r^2\pi.$$

Wäre der Viertelskreis nach Aussen, statt nach Innen gewendet, so fände sich für die beschriebene Fläche:

$$2r\pi\int_0^r\frac{(R+x)dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=Rr\pi^2+2r^2\pi.$$

Die betrachtete Kanalfläche ist aber offenbar gleich der doppelten Summe dieser zwei Flächen, d. h. gleich

$$4Rr\pi^2,$$

oder gleich der Umfläche eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge ($2R\pi$) der Mittellinie der Kanalfläche ist. Biegt man also diesen Cylinder, bis er eine Kanalfläche bildet, so dehnt sich seine eine Seite um eben so viel aus, als die andere zusammengedrückt wird.

Digitized by Google

Den Rauminhalt erhält man auf ähnliche Weise. Der von *NEFM* erzeugte Körper hat einen durch $\frac{\pi}{3} . NM . (MF^2 + MF . NE + NE^2)$ ausgedrückten Inhalt. Dieser ist nun gleich $\pi dy\,(R-x)^2 = -\frac{\pi x(R-x)^2 dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$; somit hat der von *ODCA* erzeugte Körper den Inhalt:

$$\pi\int_0^r \frac{x(R-x)^2 dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \pi R^2 r - \frac{\pi^2 R r^2}{2} + \frac{2r^3\pi}{3}.$$

Ist der Viertelskreis nach Aussen gewendet, so erhält man für den entsprechenden erzeugten Raum:

$$\pi\int_0^r \frac{x(R+x)^2 dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = \pi R^2 r + \frac{\pi^2 R r^2}{2} + \frac{2r^3\pi}{3}.$$

Der Rauminhalt des cylindrischen Kanals ist aber gleich dem doppelten Unterschiede dieser beiden Körper, also gleich

$$2\pi^2 R r^2,$$

d. h. gleich dem Kubikinhalte des vorhin erwähnten senkrechten Cylinders.

II.

Die vorstehenden Resultate können nun leicht verallgemeinert werden. Sei

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer ebenen Kurve, auf der sich der Mittelpunkt der beweglichen Kugel bewegt, so ist die Gleichung dieser letztern

$$(x-a)^2 + (y-f(a))^2 + z^2 = r^2,$$

und wenn man a zwischen dieser Gleichung und

$$x - a + (y - f(a))\,f'(a) = 0$$

eliminirt, so erhält man die Gleichung der gesuchten cylindrischen Kanalfläche.

Diese ist offenbar die nämliche, als die Fläche, welche ein Kreis vom Halbmesser r beschreiben würde, dessen Mittelpunkt auf der gegebenen Kurve sich bewegt und dessen Ebene senkrecht steht auf der Ebene der Kurve.

Um die Oberfläche dieser Kanalfläche zu bestimmen, verfahren wir auf folgende Art.

Denken wir uns im Anfangspunkte der Coordinaten die Axe der z errichtet, so kann man sich vorstellen, der bewegliche Kreis drehe sich um diese Axe. Betrachten wir (vorhergehende Figur) den Punkt F, so bleibt für ihn MF nicht konstant, wie in

Digitized by Google

I., sondern es ändert sich, je nach der Gestalt der festen Kurve; jedoch kann man für einen unendlich kleinen Winkel $d\psi$, um den sich der Kreis dreht, MF als konstant annehmen, wie auch die Entfernung aller Punkte des beweglichen Kreises von der Axe AO. Die durch solche Drehung beschriebene Oberfläche ist nach I.:

$$\frac{4\varrho r\pi^2 d\psi}{2\pi} = 2r\pi \,.\, \varrho d\psi,$$

wenn ϱ die veränderliche Länge von AG bedeutet. Da ϱ für die unendlich kleine Drehung $d\psi$ konstant bleibt, so ist $\varrho d\psi = ds$, wenn ds das Element der festen Kurve bezeichnet. Bewegt sich also der Mittelpunkt der beweglichen Kugel durch die Länge s der festen Kurve, so ist der Inhalt der dadurch erzeugten Kanalfläche:

$$\int_0^s 2r\pi\, ds = 2r\pi \,.\, s,$$

d. h. gleich der Oberfläche eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge der Mittellinie ist.

Ganz eben so findet man, dass der Kubikinhalt des Kanals gleich ist dem Kubikinhalte des eben erwähnten Cylinders.

Sei z. B. die Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist, die leitende, feste Kurve (Mittellinie), so ist, wenn man die ganze Kanalfläche betrachtet, die Länge der Mittellinie:

$$l = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2\varphi}\, d\varphi,$$

worin $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, welches Integral man durch die elliptischen Funktionen, oder durch die sehr convergirende Reihe

$$l = 2a\pi\left[1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\right)^2 - \tfrac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^3\right)^2 - \text{etc.}\right]$$

ausdrücken kann. Der Flächen- und Rauminhalt der Kanalfläche sind nun:

$$2r\pi l \text{ und } r^2\pi l.$$

Auf ähnliche Weise verfährt man in andern Fällen.

III.

Endlich sei die leitende Kurve eine krumme Linie doppelter Krümmung, deren Gleichungen sind:

Digitized by Google

$$y=f(x),\ z=F(x);$$

so erhält man die Gleichung der entstehenden Kanalfläche, wenn man a eliminirt zwischen

$$(x-a)^2+(y-f(a))^2+(z-F(a))^2=r^2$$

und

$$x-a+(y-f(a))f'(a)+(z-F(a))F'(a)=0.$$

Ist ds das Element der leitenden Kurve, so kann man dieses als eben betrachten, woraus nach II. folgt, dass die Elemente der Oberfläche und des Rauminhaltes resp. sind:

$$2r\pi\,ds \text{ und } r^2\pi ds,$$

woraus durch Integration leicht folgt, dass sowohl Oberfläche, als Rauminhalt bezüglich gleich sind Umfläche und Kubikinhalt eines senkrechten Cylinders von gleicher Weite, dessen Höhe gleich der Länge der leitenden Kurve.

Die oben hergeleiteten Formeln hätten sich auch aus dem Guldinschen Theoreme entwickeln lassen; da jedoch die Kanalflächen häufig vorhanden sind, so ist es nicht vergebene Mühe, die betreffenden Aufgaben ohne Anwendung dieses Theorems zu lösen, zumal die vorliegende Entwickelung sich leicht ganz elementar darstellen lässt.

Digitized by Google

V.

Ueber eine Klasse geometrischer Sätze, deren Beweise auf keinen Grössenbestimmungen beruhen, nebst einer elementaren Konstruktion des Mittelpunktes des einfachen Hyperboloids.

Von
Herrn Fr. Seydewitz,
Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Die von dem Herrn Herausgeber in diesem Theile des Archivs S. 89. zur synthetischen Auflösung vorgelegte Aufgabe*) gehört zu demjenigen Theile der Geometrie, dessen Sätze nicht aus Grössenbestimmungen, sondern einzig und allein aus der Definition der geraden Linie und der Ebene fliessen, und welcher dieses seines reingeometrischen Charakters wegen und besonders desshalb, weil er die allgemeinen Figuren und Figurenbeziehungen, welche Gegenstand der quantitativen Betrachtung werden sollen, dieser letzteren als reelle und bereits vorhandene überliefert, den Anfang des gesammten Systemes der Geometrie bilden sollte. Wenn ich nämlich nicht sehr irre, so besteht die letztere aus drei wesentlich von einander geschiedenen und zugleich einander voraussetzenden Haupttheilen, in denen sich der wissenschaftliche Gedanke auf ähnliche Weise, wie das sich entwickelnde Bewusstsein überhaupt, durch die Stufen der Anschauung und der Reflexion hindurch zum begreifenden Wissen hin bewegt. Der erste dieser Theile — die Geometrie der reinen Lage — ist der so eben angedeutete; der zweite — die Geometrie der Gestalt und Grösse — hat die überlieferten Gebilde hinsichtlich ihrer Linien-, Winkel-, Flächen- und körperlichen Grösse zu vergleichen und insbesondere durch Entwicklung ihrer metrischen Beziehungen, von den besonderen zu den allgemeineren aufsteigend, die allgemeinen metrischen Ge-

---

*) Die gesuchte Gerade ist die Durchschnittslinie derjenigen zwei Ebenen, welche den gegebenen Punkt mit den beiden gegebenen Geraden verbinden, oder auch, was einerlei ist, die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit demjenigen Punkte der einen gegebenen Geraden, in welchem die letztere von der Verbindungsebene des gegebenen Punktes und der anderen gegebenen Geraden geschnitten wird.

Digitized by Google

setze zu erforschen, welche dann dem dritten Theile — der Geometrie der Grösse und Lage — als Principien dienen, um die Gesammtheit der geometrischen Wahrheiten als wohlgegliederten Organismus darzustellen. — Von diesen dreien ist der erste Theil der bis jetzt noch am wenigsten ausgebildete, so dass es scheinen kann, als ob derselbe ausser einigen wenigen, in den Lehrbüchern zerstreut liegenden Sätzchen weiter nichts als eine Reihe von Definitionen enthalte. Gewiss aber würde derselbe einen grösseren Inhalt und grössere Selbstständigkeit gewonnen haben, wenn man die in den übrigen Theilen durch die Natur der Sache gebotene Maxime, die Erscheinungen des vollen Raumes aus denen der Ebene, und nicht umgekehrt, abzuleiten, nicht auch auf jenen übertragen hätte. Denn hier gerade zeigt es sich, dass man planimetrische Sätze, welche bisher mittels vieler Proportionen hergeleitet wurden, durch eine einfache stereometrische Betrachtung erhält und so gewissermassen Früchte mit blosser Hand erfasst, zu denen man nicht ohne Leiter und Brechhaken zu gelangen glaubte. Das Folgende mag als Beweis dieser Behauptung dienen.

1.

Wenn drei Gerade A, B, C im Raume paarweise drei Punkte (endlich oder unendlich entfernt) gemein haben, und eine vierte Gerade D hat mit zweien derselben, z. B. mit A und B, zwei neue Punkte gemein, so hat dieselbe auch mit der dritten, C, einen Punkt gemein.

Beweis. Denn hätte D mit C keinen Punkt gemein, so würde man, wegen der völligen Einerleiheit der rechten und der linken Seite der Figur, mit demselben Rechte behaupten können, dass die Gerade D links, als dass sie rechts von der Geraden C abwiche.

2.

Denkt man sich einen Punkt S mit sämmtlichen Punkten einer Geraden A im Raume durch gerade Linien a, b, c, d... verbunden, so bilden die letzteren eine Fläche 𝔈; ist nun N irgend eine neue Gerade, welche mit 𝔈 zwei Punkte 𝔞, 𝔟 gemein hat, so gehen von S nach diesen letzteren zwei jener Linien, a, b, c, d..., z. B. a und b; da nun A, a, b paarweise drei Punkte, also auch N mit A einen Punkt gemein hat, und da, wenn k irgend eine andere der Linien a, b, c, d... ist, die geraden A, a, k paarweise drei Punkte, die N aber mit A und a zwei Punkte, also auch N mit k einen Punkt gemein hat, so hat N mit sämmtlichen Linien a, b, c, d... einen Punkt gemein und liegt demnach ganz in der Fläche 𝔈. Eine solche Fläche, in welcher alle Punkte einer Geraden liegen, sobald dieselbe irgend zwei Punkte der ersteren verbindet, heisst eine Ebene.

Aus 1. und 2. wird nun bewiesen, dass zwei Gerade in der Ebene — eine Gerade und eine Ebene im Raume — endlich zwei Ebenen im Raume, allemal bezüglich einen Punkt oder eine Gerade (endlich oder unendlich entfernt) gemein haben.

Digitized by Google

3.

Drei beliebige Ebenen im Raume haben entweder nur einen Punkt oder eine gerade Linie (endlich oder unendlich entfernt) gemein.

Beweis. Denn hat die Ebene *B* mit *A* die Gerade *AB*, und mit der Ebene *C* die Gerade *CB* gemein, so haben die in *B* liegenden Geraden *AB* und *CB* einen Punkt *s* gemein oder fallen zusammen; im ersten Falle haben alle drei Ebenen den Punkt *s*, im zweiten eine gerade Linie gemein.

4.

Gehen in Taf. II. Fig. 1. drei beliebige Gerade im Raume durch einerlei Punkt *S*, und werden auf jeder zwei Punkte a, α; b, β; c, γ beliebig angenommen, so lassen sich diese letzteren paarweise durch zwölf neue Gerade ab, $\alpha\beta$, $a\beta$, αb; bc, $\beta\gamma$, $b\gamma$, βc; ca, $\gamma\alpha$, $c\alpha$, γa, und drei zu drei, ausser Sab, Sbc, Sca, durch acht neue Ebenen abc, $\alpha\beta\gamma$, $ab\gamma$, $\alpha\beta c$, αbc, $a\beta\gamma$, $a\beta c$, $\alpha b\gamma$ verbinden. Ist nun der Reihe nach

der Punkt	a_1	der Durchschnitt der Geraden	bc	und	$\beta\gamma$,
	α_1		$b\gamma$	„	βc,
	b_1		ca	„	$\gamma\alpha$,
	β_1		$c\alpha$	„	γa,
	c_1		ab	„	$\alpha\beta$,
	γ_1		$a\beta$	„	αb;

so liegen der Reihe nach die drei Punkte

a_1, b_1, c_1		abc	und	$\alpha\beta\gamma$,
a_1, β_1, γ_1		αbc	„	$a\beta\gamma$,
	im Durchschnitte der Ebenen			
α_1, b_1, γ_1		$a\beta c$	„	$\alpha b\gamma$,
α_1, β_1, c_1		$ab\gamma$	„	$\alpha\beta c$;

also in vier neuen Geraden, und da diese paarweise sechs Punkte gemein haben, so liegen dieselben in einer und derselben neuen Ebene *M*.

5.

Sind nun abc und $\alpha\beta\gamma$ irgend zwei Ebenen im Raume, welche von den Strahlen eines räumlichen Strahlbüschels *S* bezüglich in den Punkten a, α; b, β; c, γ; d, δ... geschnitten werden, und setzt man in der vorhergehenden Betrachtung d, δ an die Stelle von c, γ, so erhält man eine Ebene *M*, welche gleich der vorigen den Durchschnitt der Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$ und ausserdem auch den Durchschnitt der Geraden $a\beta$ und αb enthält; beide Ebenen *M* fallen also zusammen. Hieraus folgt:

Werden zwei Ebenen von den Strahlen eines räumlichen Strahlbüschels bezüglich in den Punktenpaaren

Digitized by Google

$a, b, c, d \ldots$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ geschnitten, und je zwei dieser Punktenpaare, wie a und β, b und α, wechselsweise durch zwei Gerade verbunden, so liegen die Durchschnittspunkte je zweier solcher Geraden alle in einunddderselben Ebene, welche auch die Durchschnittslinie jener beiden ersten Ebenen enthält.

6.

Aufgabe. Wenn zwei Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$, deren Durchschnittslinie ausser dem Bereich der Zeichnung liegt, beliebig gegeben sind, durch einen beliebig gegebenen Punkt γ_1 eine Ebene zu legen, welche, gehörig verlängert, nach jener Durchschnittslinie gehen würde.

Auflösung. Man lege durch den Punkt γ_1 zwei Gerade $a\beta$ und αb, welche die geg. Ebenen bezüglich in den Punkten a, β und α, b schneiden; ziehe sodann die Geraden ab und $\alpha\beta$, und aus dem Durchschnitte S der letzteren eine dritte $c\gamma$, welche die beiden Ebenen in c und γ schneidet. Jetzt ziehe man noch $a\gamma$ und αc, die sich in β_1, und $b\gamma$ und βc, die sich in α_1 schneiden; so hat die durch die drei Punkte α_1, β_1, γ_1 gehende Ebene die verlangte Eigenschaft.

7.

Es seien in Taf. II. Fig. 2. abc und $a_1\,b_1\,c_1$ zwei in einerlei Ebene liegende Dreiecke, deren Ecken paarweise auf drei Strahlen aa_1, bb_1, cc_1 eines Punktes s liegen; durch den Punkt s werde eine beliebige Gerade Ss in den Raum gezogen, und zwei beliebige Punkte S, s_1 der letzteren, jener mit den Ecken des Dreiecks abc durch die Geraden Sa, Sb, Sc, dieser mit denen von $a_1\,b_1\,c_1$ durch $s_1\,a_1$, $s_1\,b_1$, $s_1\,c_1$ verbunden. Diess vorausgesetzt, so schneiden sich Sa und s_1a_1 in einem Punkte α; Sb und s_1b_1 in β; Sc und s_1c_1 in γ; ferner schneiden sich die drei Geraden ab, a_1b_1, $\alpha\beta$ in einerlei Punkte γ_1 der Durchschnittslinie der Ebenen abc und $\alpha\beta\gamma$; die drei Geraden bc, b_1c_1, $\beta\gamma$ in einerlei Punkte α_1 derselben Linie, und ebenso ca, c_1a_1, $\gamma\beta$ in einerlei Punkte β_1 dieser Linie. Folglich liegen die Durchschnittspunkte α_1, β_1, γ_1 der Seitenpaare bc und b_1c_1, ca und c_1a_1, ab und $a_1\,b_1$ in einerlei gerader Linie.

Gehen in einer Ebene die drei Geraden, welche die Ecken zweier Dreiecke paarweise verbinden, durch einerlei Punkt, so liegen die drei Durchschnittspunkte der entsprechenden Seitenpaare in einerlei gerader Linie.

8.

In einer Ebene (Taf. II. Fig. 3.) werden zwei beliebige Gerade A, A_1, von drei Strahlen eines Strahlbüschels s bezüglich in den Punktenpaaren a, b, c und a_1, b_1, c_1 geschnitten; zieht man noch die Geraden ab_1 und ba_1, die sich in γ; cb_1 und bc_1, die sich in α schneiden, so liegen die Ecken a, b_1, c und a_1, b, c_1 der Dreiecke ab_1c und a_1bc_1 auf drei in s convergirenden Geraden; also liegen die Punkte α, γ, β, in denen sich die entsprechenden Seitenpaare schneiden, in einer geraden Linie. Hieraus folgt:

Digitized by Google

Werden zwei Gerade einer Ebene von den Strahlen eines Strahlbüschels in den Punktenpaaren *a*, *b*, *c*, *d*... und a_1, b_1, c_1, d_1... geschnitten, und je zwei dieser Paare wechselsweise durch zwei neue Gerade, z. B. ab_1 und a_1b, verbunden, so liegen die Durchschnittspunkte aller dieser neuen Geraden in einer und derselben geraden Linie, welche auch den Durchschnitt der beiden ersten Geraden enthält.

Hieraus ergeben sich nun ähnliche Aufgaben, wie aus 6., nämlich: Durch einen gegebenen Punkt einer Ebene in derselben eine Gerade zu ziehen, welche nach dem (ausser dem Bereich der Zeichnung liegenden) Durchschnitte zweier gegebenen Geraden gehe; ferner: Mit zwei gegebenen Parallelen durch einen gegebenen Punkt ihrer Ebene eine neue Parallele zu ziehen; endlich: Durch einen gegebenen Punkt des Raumes eine Gerade zu ziehen, welche nach dem (ausserhalb dem Bereich der Zeichnung liegenden) Durchschnitte einer gegebenen Geraden und einer gegebenen Ebene gerichtet sei.

9.

Durch den in 7. entwickelten Satz, welcher sich auf die bekannte Weise für Figuren von mehr Seiten erweitern lässt, ist nun die unter dem Namen der Collineation bekannte Beziehung der Figuren, und durch die Annahme eines unendlich entfernten Punktes *s* und des Parallelismus der Seiten sind zugleich die besonderen Fälle der Affinität, Aehnlichkeit, Gleichheit, Symmetrie und Congruenz gesetzt. Sache des zweiten Theiles ist es nun, die metrischen Bedingungen dieser Beziehungen zu erforschen und insbesondere nachzuweisen, inwiefern zwei beliebig gegebene Figuren in eine dieser Beziehungen treten können.

10.

Es seien im Raume drei einander nicht schneidende Gerade A, A_1, A_2 gegeben, und durch eine derselben, z. B. durch A_2, beliebig viele Ebenen α, β, γ, δ... gelegt, welche die beiden anderen Geraden A, A_1 bezüglich in den Punktenpaaren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$... schneiden; so werden die Verbindungslinien *a*, *b*, *c*, *d*... dieser Punktenpaare, weil in den Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$... liegend, auch die Gerade A_2 in (endlich oder unendlich entfernten) Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$... treffen müssen. Die Gesammtheit der Geraden *a*, *b*, *c*, *d*..., deren jede also die drei Geraden A, A_1, A_2 schneidet, bildet eine stetig zusammenhängende Fläche, welche **windschief oder einfaches Hyperboloid** (surface gauche, hyperboloide à une nappe) genannt wird. Dieselbe wird auch dadurch erzeugt, dass man sämmtliche Punkte $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$... der einen Geraden A_2 mit den beiden anderen, A und A_1, durch Ebenenpaare α, α_1; β, β_1, γ, γ_1; δ, δ_1... verbindet: die Durchschnittslinien dieser Ebenenpaare sind mit den vorigen *a*, *b*, *c*, *d*... identisch; denn offenbar lässt sich durch jeden Punkt einer der Geraden A, A_1, A_2 immer nur eine einzige Gerade ziehen, welche allen dreien begegnet.

Digitized by Google

Anmerkung. Das einfache Hyperboloid (und sein besonderer Fall, das hyperbolische Paraboloid) ist eine Zwittergestalt von Ebene und durchaus krummlinichter Fläche, und ein eben so wichtiges Hülfsmittel zur Entwicklung geometrischer Eigenschaften, als die Ebene. Seine Stellung im ersten Theile der Geometrie würde es vollkommen verdienen, wenn, was ich nicht für unmöglich halte, ohne Hülfe metrischer Beziehungen sich beweissen liesse, dass eine jede Gerade, welche dreien der Geraden a, b, c, d... begegnet, sämmtlichen begegnen müsse, und demnach das einfache Hyperboloid aus zwei Schaaren unendlich vieler, einander nicht schneidender Geraden bestehe, welche sich gegenseitig durchsetzen. Mittels projektivischer Eigenschaften, welche im Grunde auf der Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke beruhen, ist die Existenz jener zweiten Schaar von Geraden so, wie folgt, dargethan worden.

Da zwei Gerade A, A_1 (Taf. II. Fig. 4.) in Ansehung der Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$..., in denen sie von den Ebenen α, β, γ, δ... eines Ebenenbüschels A_2 geschnitten werden, projektivisch sind, so sind auch drei Gerade A, A_1, A_2 in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...; $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$...; $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{d}_2$..., in denen sie von den Geraden a, b, c, d... geschnitten werden, paarweise projektivisch. Dasselbe gilt nun auch von drei Geraden a, b, c in Ansehung der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$...; $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$...; $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$..., in denen sie von A, A_1, A_2, A_3... geschnitten werden. Denkt man sich nun durch einen beliebigen Punkt $\mathfrak{a}_3$ der einen Geraden a eine Gerade $A_{'''}$ gelegt, welche die b und eine beliebige vierte, von A, A_1, A_2 geschnittene Gerade d in den Punkten $b_{'''}$ und $\mathfrak{d}_{'''}$ schneidet, so müssen die Punkte b_3 und $b_{'''}$ sich vereinigen, weil sowohl

$$a\ (\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3 \ldots) = b\ (\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{b}_3 \ldots),$$

als auch

$$a\ (\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{a}_3 \ldots) = b\ (\mathfrak{b},\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{b}_2,\ \mathfrak{b}_{'''} \ldots)$$

ist.

Folglich fallen auch A_3 und $A_{'''}$ zusammen, d. h. A_3 schneidet nicht nur die a, b, c, sondern auch jede beliebige vierte d der Schaar von Geraden a, b, c, d....

Digitized by Google

Ueber den Mittelpunkt des einfachen Hyperboloids.

Der Herr Prof. Steiner hat im ersten Theile seines Werks (Abh. d. geom. Gestalten) folgenden Satz aufgestellt, dessen Beweis erst im dritten Bande erfolgen soll:

Alle Ebenen, welche sich durch die verschiedenen Paare paralleler Geraden eines einfachen Hyperboloids legen lassen, schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich im Mittelpunkte des Hyperboloids.

Der Beweis desselben lässt sich ohne die Theorie der harmonischen Pole und Polaren führen; er beruht nämlich auf folgendem Elementarsatze:

Sind die Gegenseiten eines windschiefen Sechsecks im Raume paarweise parallel, so gehen die drei Hauptdiagonalen desselben durch einerlei Punkt, welcher der Mittelpunkt einer jeden dieser Diagonalen ist.

Beweis. Um zuvörderst die Realität eines solchen Sechsecks darzuthun, denke man sich (Taf. II. Fig. 5) vier beliebige Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ im Raume durch die Geraden $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$ verbunden, und durch den ersten $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{cd}$, durch den letzten $\mathfrak{d}$ mit $\mathfrak{ab}$ zwei Parallelen $\mathfrak{af}$ und $\mathfrak{de}$ von unbestimmter Länge gezogen. sodann durch die Gerade $\mathfrak{af}$ eine mit $\mathfrak{bc}$ parallele Ebene, und durch den Punkt $\mathfrak{e}$, in welchem diese Ebene die $\mathfrak{de}$ trifft, mit $\mathfrak{bc}$ eine parallele Linie $\mathfrak{ef}$ gelegt: so muss letztere die $\mathfrak{af}$ in einem Punkte $\mathfrak{f}$ schneiden, und es ist $\mathfrak{abcdefa}$ ein windschiefes Sechseck mit drei parallelen Seitenpaaren.

Die drei Ebenen $\mathfrak{abde}$, $\mathfrak{bcef}$, $\mathfrak{cdfa}$, in denen die drei Paar Parallelen liegen, schneiden sich paarweise, nämlich $\mathfrak{abde}$ und $\mathfrak{bcef}$ in der Geraden $\mathfrak{be}$; $\mathfrak{bcef}$ und $\mathfrak{cdfa}$ in $\mathfrak{cf}$; $\mathfrak{cdfa}$ und $\mathfrak{abde}$ in $\mathfrak{ad}$, d. h. in den Hauptdiagonalen des Sechsecks $\mathfrak{abcdefa}$; also gehen diese letzteren durch einerlei Punkt s. Ferner verhält sich

$$s\mathfrak{a}:s\mathfrak{d}=s\mathfrak{b}:s\mathfrak{e}=s\mathfrak{c}:s\mathfrak{f}=s\mathfrak{d}:s\mathfrak{a},$$

also

Digitized by Google

$$s\mathfrak{a} : s\mathfrak{d} = s\mathfrak{d} : s\mathfrak{a}$$

d. h.

$$s\mathfrak{a} = s\mathfrak{d},\ s\mathfrak{b} = s\mathfrak{e},\ s\mathfrak{c} = s\mathfrak{f};$$

w. z. b. w.

Es seien nun A, A_1, A_2 irgend drei zu einerlei Schaar gehörige Geraden eines einfachen Hyperboloids, und a, b, c diejenigen Geraden der anderen Schaar, welche bezüglich nach den unendlich entfernten Punkten von A, A_1, A_2 gehen d. h. mit letzteren parallel sind; so muss a die A_1, A_2 in zwei Punkten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$; b die A_2, A in zwei Punkten, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$; und c die A, A_1 in zwei Punkten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{a}$ schneiden, und es entsteht so ein windschiefes Sechseck $\mathfrak{abcdefa}$, in welchem die Gegenseiten $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{ef}$, $\mathfrak{de}$ und $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{af}$ und $\mathfrak{cd}$ oder a und A, b und A_1, c und A_2 parallel sind. Nach dem vorigen Satze gehen also die Durchschnittslinien $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$ der drei Ebenen, welche durch die Parallelen a, A; b, A_1; c, A_2 sich legen lassen, und somit diese Ebenen selbst durch einerlei Punkt s, welcher der Mittelpunkt jener Linien ist. — Vertauscht man nun die Gerade A_2 mit irgend einer vierten Geraden A_3 derselben Schaar, und ist d die ihr parallele Gerade der anderen Schaar, so änderen sich hierdurch nur die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$, nicht aber $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$, und folglich auch nicht der Mittelpunkt s der Hauptdiagonalen des neuen Sechsecks. Folglich geht auch die durch d, A_3 bestimmte Ebene und ebenso alle übrigen dergleichen Ebenen durch den Punkt s. — Endlich treffe ein beliebiger Strahl von s das Hyperboloid in den Punkten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$; so gehen durch $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zwei Gerade M, N des Hyperboloids, welche zu einerlei Schaar gehören; und sind m, n die mit M, N parallelen Geraden der anderen Schaar, so schneidet m die N in einem Punkte $\mathfrak{n}_1$, und n die M in einem Punkte $\mathfrak{m}_1$, und es muss die Gerade $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{n}_1$, als Durchschnittslinie der durch M und m, N und n bestimmten Ebenen, durch den Punkt s gehen und in ihm gehälftet werden. Da nun die Geraden M, N per hypothesin einander nicht schneiden noch parallel sind, die Punkte $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}_1$, s aber nach dem so eben Gesagten in einer Ebene liegen müssen, so fallen die Punkte $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}_1$ zusammen; es ist also $s\mathfrak{m} = s\mathfrak{n}$ und somit s der Mittelpunkt des Hyperboloids.

w. z. b. w.

Aus diesem Satze ergiebt sich nun folgende höchst einfache Konstruktion des Mittelpunktes eines einfachen Hyperboloids:

Sind A, A_1, A_2 irgend drei zu einerlei Schaar gehörige Gerade eines einfachen Hyperboloids; legt man durch irgend eine derselben, z. B. durch A_2, zwei Ebenen u, v, welche bezüglich mit A, A_1 parallel sind und die A_1, A in den Punkten $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{n}$ schneiden, verbindet diese Punkte mit einander durch eine Gerade und bestimmt den Mittelpunkt der Strecke $\mathfrak{m}_1\ \mathfrak{n}$, so ist letzterer der Mittelpunkt des Hyperboloids.

Digitized by Google

VI.

Ueber eine besondere Gattung algebraischer Funktionen.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die Untersuchungen über die Anziehungen der Sphäroide und die Gestalt der Planeten führen, wie man seit lange weiss, auf eine besondere Art algebraischer Funktionen, welche äusserst merkwürdige Eigenschaften besitzen, u. A. die, dass sich jede beliebige Funktion durch eine unendliche Reihe derselben darstellen lässt. Da der Entwickelungen über diesen interessanten Gegenstand sehr verschiedene an sehr verschiedenen Orten (Crelle's Journal, Savans étrangers, Légendre: Exercices de calcul intégral etc.) gegeben worden sind, welche bald auf diese, bald auf jene Weise zum Ziele gelangen, so ist es vielleicht nicht überflüssig, hier eine kurze und einfache Darstellung der hauptsächlichsten Punkte jener Theorie mitzutheilen.

Wendet man das Theorem von Mac Laurin auf die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ux+x^2}}$$

an, so ist klar, dass man für dieselbe eine Reihe von der Form

$$1+U_1x+U_2x^2+U_3x^3+\ldots.$$

substituiren kann, worin U_1, U_2. U_3,.... gewisse, nur von u und ihrem Index abhängige Coefficienten bedeuten, von denen der $n$te durch die Formel

$$U_n=\frac{1}{1.2\ldots n}\cdot\frac{\partial^n(1-2ux+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^n}\text{, für } x=0 \qquad (1)$$

bestimmt wird. Hierin liegt die Definition der eigenthümlichen algebraischen Funktion von u, welche das Thema unserer Betrachtungen ausmachen soll.

Zunächst ist nun zu bemerken, dass man diese Definition dadurch wesentlich vereinfachen kann, dass man die in ihr angedeuteten Rechnungsoperationen ausführt, was nach den Entwickelungen, welche im 8ten Theile des Archivs Seite 357. und weiter gegeben worden sind, nicht die mindeste Schwierig-

Digitized by Google

keit hat. Setzt man nämlich in der Formel (8) das. $a = -2u$, $b = 1$, $\mu = -\frac{1}{2}$ und zuletzt $x = 0$, so wird

$$U_n = \frac{1}{(2u)^n}\left[n_0 (n-\tfrac{1}{2})_n (2u)^{2n} - (n-1)_1 (n-\tfrac{3}{2})_{n-1} (2u)^{2n-2} + (n-2)_2 (n-\tfrac{5}{2})_{n-2} (2u)^{2n-4} - \ldots\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned} U_n = n_0 (n-\tfrac{1}{2})_n 2^n u^n - (n-1)_1 (n-\tfrac{3}{2})_{n-1} 2^{n-2} u^{n-2} \\ + (n-2)_2 (n-\tfrac{5}{2})_{n-2} 2^{n-4} u^{n-4} - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dieser Ausdruck ist aber einer bedeutenden Reduktion fähig. Setzen wir nämlich in dem allgemeinen Gliede der Reihe rechts

$$(n-p)_p \left(n - \frac{2p+1}{2}\right)_{n-p} 2^{n-2p} u^{n-2p}$$

für die darin vorkommenden Binomialkoeffizienten ihre Werthe nach der Formel

$$m_s = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-s+1)}{1.2.3\ldots s},$$

so geht dasselbe über in

$$\frac{1}{2^n} 2^{2n-2p} \frac{(n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{1.2.3\ldots p}$$
$$\times \frac{(2n-2p-1)(2n-2p-3)\ldots 5.3.1}{1.2.3\ldots(n-p)} \cdot \frac{u^{n-2p}}{2^{n-p}}.$$

Hier ist nun

$$1.2\ldots(n-p) = \frac{1.2.3\ldots n}{n(n-1)\ldots(n-p+1)},$$

$$\frac{1}{1.2\ldots(n-p)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2.3\ldots p} \cdot \frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots n}$$
$$= n_p \frac{1.2.3\ldots p}{1.2.3\ldots n};$$

und, wenn man diess substituirt, so wird jener Ausdruck

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{n_p}{1.2\ldots n} \cdot 2^{n-p} (n-p)(n-p-1)\ldots(n-2p+1)$$
$$\times (2n-2p-1)(2n-2p-3)\ldots 3.1 . u^{n-2p},$$

wobei wir noch den Faktor

$$\frac{(n-2p)(n-2p-1)\ldots 2.1}{(n-2p)(n-2p-1)\ldots 2.1}$$

Digitized by Google

zusetzen wollen. Wir erhalten dann

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n_p}{1.2....n}2^{n-p}\,1.2.3....(n-p).1.3.5....(2n-2p-1)\,u^{n-2p}$$
$$:1.2.3....(n-2p.$$

Durch Vertheilung der $n-p$ in 2^{n-p} enthaltenen Zweien auf die $n-p$ Faktoren $1.2....(n-p)$ wird jetzt

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n_p}{1.2....n}.2.4.6....(2n-2p).1.3.5....(2n-2p-1)u^{n-2p}$$
$$:1.2.3....(n-2p),$$

d. i.

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{n_p}{1.2....n}\cdot\frac{1.2.3....(2n-2p)}{1.2....(n-2p)}u^{n-2p}$$
$$=\frac{1}{2^n.1.2....n}(2n-2p)(2n-2p-1)....(n-2p+1).n_p u^{n-2p}.$$

Der Werth von U_n gestaltet sich jetzt wie folgt:

$$U_n=\frac{1}{2^n.1.2...n}[2n(2n-1)(2n-2)....(n+1)n_0 u^n$$
$$-(2n-2)(2n-3)....(n-1)n_1 u^{n-2}$$
$$+(2n-4)(2n-5)....(n-3)n_2 u^{n-4}$$
$$-\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .],$$

wofür man sehr kurz schreiben kann:

$$U_n=\frac{1}{2^n.1.2....n}\cdot\frac{\partial^n(u^2-1)^n}{\partial u^n}. \qquad (3)$$

denn wenn man $(u^2-1)^n$ nach dem Binomialtheoreme entwickelt und $n$mal differenzirt, so findet man auf der Stelle die vorher in der Klammer stehende Reihe. Die so eben entwickelte Gleichung, die man auch in der Form

$$U_n=\frac{1}{2.4.6....(2n)}D^n(u^2-1)^n \qquad (4)$$

darstellen kann, und die auf anderem Wege zuerst von Jacobi bewiesen wurde (Crelle's Journal Bd. 2. S. 224.), kann als die Fundamentaleigenschaft der Funktion U_n gelten, und in der That lassen sich ihre anderen Eigenschaften mit Leichtigkeit daraus ableiten. Zu den wichtigsten derselben gehört die, dass der Werth des Integrales

$$\int_{-1}^{+1}U_m U_n\partial u$$

immer Null ist, so lange m von n verschieden bleibt, dagegen

Digitized by Google

$=\frac{2}{2n+1}$ für $m=n$. Man gelangt hierzu mittelst der folgenden einfachen Betrachtung.

Es sei nach einer sehr gewöhnlichen Bezeichnung

$$\frac{\partial^m \varphi(u)}{\partial u^m}=\varphi^{(m)}(u),\ \frac{\partial^n \psi(u)}{\partial u^n}=\psi^{(n)}(u);$$

so ist bei unbestimmter Integration

$$\int \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=\varphi^{(m)}(u)\int\psi^{(n)}(u)\,\partial u$$
$$-\int\varphi^{(m+1)}(u)\,\partial u\int\psi^{(n)}(u)\,\partial u$$

oder auch

$$\int\varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u$$
$$=\varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)-\int\varphi^{(m+1)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)\,\partial u.$$

Verschwindet nun $\psi^{(n-1)}(u)$ sowohl für $u=a$ als $u=b$, so folgt hieraus

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=-\int_a^b \varphi^{(m+1)}(u)\,\psi^{(n-1)}(u)\,\partial u.$$

Auf der rechten Seite kann man dieselbe Reduktion wieder vornehmen und findet unter der Bedingung, dass $\psi^{(n-1)}(u)$ und $\psi^{(n-2)}(u)$ für $u=a$ und $u=b$ verschwinden:

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=+\int_a^b \varphi^{(m+2)}(u)\,\psi^{(n-2)}(u)\,\partial u.$$

Man übersieht leicht den Fortgang dieser Betrachtung; unter der Rücksicht, dass $\psi^{(n-n)}(u)=\psi(u)$ ist, gelangt man nämlich zu dem Satze: verschwinden die Funktionen $\psi^{(n-1)}(u)$, $\psi^{(n-2)}(u)$,.... $\psi''(u)$, $\psi'(u)$, $\psi(u)$ sämmtlich für $u=a$ und $u=b$, so ist

$$\int_a^b \varphi^{(m)}(u)\,\psi^{(n)}(u)\,\partial u=(-1)^n\int_a^b \varphi^{(m+n)}(u)\,\psi(u)\,\partial u.$$

Diesen Satz können wir auf die Formen

$$\varphi(u)=(u^2-1)^m,\ \psi(u)=(u^2-1)^n$$

anwenden, indem man sich sehr leicht überzeugen wird, dass die Funktion $\psi(u)$ nebst ihren Differenzialquotienten bis zum $(n-1)$ten inclus. sich für $a=-1$ und $b=+1$ annullirt. Es wird so

$$\int_{-1}^{+1} D^m(u^2-1)^m D^n(u^2-1)^n\partial u=(-1)^n\int_{-1}^{+1} D^{m+n}(u^2-1)^m.(u^2-1)^n\partial u.$$

und wir stellen daher den Satz auf:

Digitized by Google

(5)

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u$$

$$= \frac{1}{2.4.6\ldots.(2m)} \cdot \frac{1}{2.4.6\ldots.(2n)} (-1)^n \int_{-1}^{+1} (u^2-1)^n D^{m+n} (u^2-1)^m \partial u.$$

Das Integral rechts bedarf noch einer kleinen Umformung. Entwickelt man nämlich mittelst des Taylorschen Satzes $f(u+h)$ in eine nach Potenzen von h fortgehende Reihe für $f(u) = (u^2-1)^m$, so wird

$$[(u+h)^2-1]^m = 1 + A_1 h + \ldots. + A_{m-r} h^{m-r} + \ldots. \quad (6)$$

und hier ist

$$A_{m-r} = \frac{1}{1.2\ldots.(m-r)} \cdot \frac{\partial^{m-r}(u^2-1)^m}{\partial u^{m-r}}. \quad (7)$$

Setzt man in der obigen Gleichung $\frac{u^2-1}{h}$ für h, so erhält man

$$[(u+\frac{u^2-1}{h})^2-1]^m = 1 + A_1 \frac{u^2-1}{h} + \ldots.,$$

und hier kommt rechts u. A. auch das Glied

$$A_{m+r}\left(\frac{u^2-1}{h}\right)^{m+r}$$

vor; beiderseitige Multiplikation mit h^{2m} giebt

$$[(hu+u^2-1)^2-h^2]^m$$
$$= h^{2m} + (u^2-1) A_1 h^{2m-1} + \ldots. + (u^2-1)^{m+r} A_{m+r} h^{m-r} + \ldots$$

Das links in der Klammer Befindliche ist aber nichts Anderes als

$$(u^2-1)\{(h+u)^2-1\},$$

und folglich wird durch Division mit $(u^2-1)^m$:

$$[(h+u)^2-1]^m = \frac{h^{2m}}{(u^2-1)^m} + \ldots. + (u^2-1)^r A_{m+r} h^{m-r} + \ldots$$

Die linke Seite ist nun mit der von (6) identisch; folglich müssen auch rechts die Coeffizienten gleicher Potenzen von h dieselben sein; daraus folgt

$$(u^2-1)^r A_{m+r} = A_{m-r},$$

oder vermöge der durch No. (7) festgestellten Bedeutung der Coeffizienten A:

Digitized by Google

$$\frac{(u^2-1)^r}{1.2....(m+r)} D^{m+r}(u^2-1)^m = \frac{1}{1.2....(m-r)} D^{m-r}(u^2-1)^m,$$

wobei natürlich immer $r \leqq m$ sein muss. Diese schon an sich sehr interessante Beziehung dient uns auch zur Reduktion des Integrales in (5), wenn wir $r=n$ und

$$(u^2-1)^n D^{m+n}(u^2-1)^m = \frac{1.2....(m+n)}{1.2....(m-n)} D^{m-n}(u^2-1)^m$$

setzen. Es wird dann

(8)

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u$$
$$= \frac{(-1)^n}{2.4....(2m).2.4....(2n)} \cdot \frac{1.2....(m+n)}{1.2....(m-n)} \int_{-1}^{+1} D^{m-n}(u^2-1)^m \partial u,$$

und diese Gleichung wird durch die Bedingung $n \leqq m$ nicht beschränkt, weil es bei der Symmetrie der linken Seite immer frei steht mit n den kleinsten der Indices m und n zu bezeichnen.

Für das Integral rechts in (8) sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich $m > n$ oder $m = n$ ist. Im ersten giebt die unbestimmte Integration

$$D^{m-n-1}(u^2-1)^m,$$

und diess annullirt sich sowohl für $u=+1$ als $u=-1$, wie überhaupt

$$D^q(u^2-1)^m,$$

sobald $q < m$ ist. Es wird demnach

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial u = 0 \text{ für } m > n,$$

d. h. für ein von n verschiedenes m (nach der vorhin gemachten Bemerkung). Für $m=n$ dagegen geht das Integral auf der rechten Seite von (8) über in

$$\int_{-1}^{+1} (u^2-1)^n \partial u = (-1)^n \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^n \partial u,$$

und der Werth desselben ist

$$2(-1)^n \cdot \frac{2.4.6....(2n)}{3.5.7.....(2n+1)},$$

wie man leicht durch eine Reduktionsformel oder mittelst der Gammafunktionen findet. Berücksichtigt man ferner, dass die

Digitized by Google

Faktorielle $1.2\ldots.(m-n)$ für $m=n$ die Einheit bedeutet, so wird jetzt

$$\int_{-1}^{+1} U_n U_n \partial u$$

$$=\frac{1}{2^2.4^2.6^2\ldots.(2n)^2}\cdot\frac{1.2\ldots.(2n)}{1}\cdot\frac{2.4.6\ldots.(2n)}{3.5.7\ldots..(2n+1)}2=\frac{2}{2n+1},$$

und damit ist gezeigt, dass

$$\left.\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} U_m U_n &= 0, \text{ für } m \lessgtr n\\ &= \frac{2}{2n+1}, \text{ für } m=n\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

wird. Hiervon lässt sich sogleich die folgende interessante Anwendung machen. Sei $f(u)$ eine beliebige Funktion von u und

$$f(u) = C_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots.$$

wo C_0, C_1, C_2,.... unbestimmte Coeffizienten bedeuten, so kann man C_n auf folgende einfache Weise bestimmen. Man multiplizire die ganze Gleichung mit $U_n \partial u$ und integrire hierauf zwischen den Gränzen $u=-1$, $u=+1$, so wird

$$\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u = C_0 \int_{-1}^{+1} U_n \partial u + C_1 \int_{-1}^{+1} U_1 U_n \partial u + \ldots$$

$$\ldots. + C_n \int_{-1}^{+1} U_n U_n \partial u + \ldots$$

Mit Ausnahme des C_n enthaltenden Gliedes sind hier alle Integrale von der Form

$$\int_{-1}^{+1} U_m U_n \partial n,\ m \gtrless n$$

und folglich sämmtlich $=0$; es bleibt nur

$$\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u = C_n \frac{2}{2n+1},$$

woraus sich der Werth von C_n findet, nämlich

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(u)\, U_n \partial u. \quad (10)$$

Hat man hiernach die Coeffizienten C bestimmt, so ist

$$f(u) = C_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \ldots, \quad (11)$$

also jede beliebige Funktion durch die algebraischen Funktionen U_1, U_2,.... ausdrückbar.

Digitized by Google

[1] Es mag übrigens noch bemerkt werden, dass diese Ableitung der Formeln (10) und (11) zwar kurz und heuristisch, aber, wie der heuristische Gedankengang oft, nichts weniger als streng ist, da man die Bedingungen nicht erfährt, an welche die Gültigkeit der Gleichung (11) geknüpft sein kann. Eine strengere Begründung erhält man dadurch, dass man die Reihe

$$C_0 + C_1 U_1 + C_2 U_2 + \dots + C_n U_n,$$

in welcher die Coeffizienten mittelst der Formel (10) bestimmt sind, summirt, darauf n ins Unendliche wachsen lässt, und die Gränze bestimmt, welcher sich der gefundene Ausdruck nähert. In sehr eleganter und allgemeiner Weise hat in Crelle's Journal Herr Prof. Lejeune Dirichlet diesen Gedanken ausgeführt und es kann bei der Vollendung, welche der scharfsinnige Geometer seiner Arbeit gegeben hat, hier nur eine Verweisung auf dieselbe statt finden.

VII.

Ueber die Differenziation unendlicher Reihen.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Schon Abel hat darauf aufmerksam gemacht, dass der Differenzialquotient von der Summe einer unendlichen Reihe nicht immer der Summe der Differenzialquotienten der einzelnen Glieder gleich gesetzt werden darf *), er hat aber den Grund dieser auf den

*) So gilt z. B. die Gleichung

$$-\tfrac{1}{2}l(2-2\cos x) = \tfrac{1}{1}\cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + \tfrac{1}{3}\cos 3x + \dots$$

ganz unbestritten für alle reellen x; wollte man aber differenziren, so würde

$$\tfrac{1}{2}\cot \tfrac{1}{2}x = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots$$

herauskommen, was wenigstens qua Gleichung unrichtig ist; für $x = 0$ erhielte man z. E. $\infty = 0$, was selbst syntaktische Genie's nur schwer werden „deuten" können.

Digitized by Google

ersten Blick sehr befremdlich aussehenden Erscheinung nicht angegeben. Diess zu thun ist der Zweck der folgenden Zeilen.

Es sei die Summe einer $n$gliedrigen Reihe

$$F(x) = f(x,1) + f(x,2) + \dots + f(x,n) \tag{1}$$

gegeben, so hat man

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = \frac{f(x+\delta,1) - f(x,1)}{\delta} + \frac{f(x+\delta,2) - f(x,2)}{\delta} \; \dots \dots \; + \frac{f(x+\delta,n) - f(x,n)}{\delta}.$$

Nun ist aber nach der Definition des Differenzialquotienten $\varphi'(x) = \mathrm{Lim} \frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta}$, und folglich kann man immer

$$\frac{\varphi(x+\delta) - \varphi(x)}{\delta} = \varphi'(x) + \varepsilon$$

setzen, wo ε eine Grösse bezeichnet, die mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnimmt. Es folgt jetzt

$$\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f'(x,1) + f'(x,2) + \dots + f'(x,n) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ gewisse mit δ gleichzeitig bis zur Gränze Null abnehmende Grössen sind. Durch Uebergang zur Gränze für unendlich abnehmende δ wird jetzt

$$\left.\begin{array}{l} F'(x) = f'(x,1) + f'(x,2) + \dots + f'(x,n) \\ \quad + \mathrm{Lim}\,[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n]. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Hier sind nun die zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich n eine endliche constante, oder eine unendlich wachsende Zahl ist. Dass im ersten Falle

$$\mathrm{Lim}\,[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n] = 0$$

sei, erhellt sehr leicht auf folgende Weise. Es möge ε' die grösste, ε'' die kleinste unter den Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$ bedeuten, so ist

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_n < n\varepsilon' \text{ und } > n\varepsilon''.$$

Da aber jede der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ unbegränzt abnimmt, so ist diess auch mit ε' und ε'' der Fall, und da bei diesem Prozesse n constant bleibt, so hat man gleichzeitig

Digitized by Google

$$\text{Lim}(n\varepsilon')=0, \ \text{Lim}(n\varepsilon'')=0;$$

woraus sogleich

$$\text{Lim}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots+\varepsilon_n)=0$$

folgt, und jetzt ergiebt sich aus No. (2)

$$F'(x)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots+f'(x,n). \qquad (3)$$

In einer endlichen Reihe darf man also beiderseits Glied für Glied differenziren, ohne die Gleichheit beider Seiten zu stören.

Ganz anders aber verhält sich die Sache, wenn n ins Unendliche wächst oder die Reihe eine unendliche ist. Obschon auch hier die Grössen ε_1, ε_2,.... in der Gleichung (2) der Gränze Null zueilen, so kann doch die Summe einer unendlichen Menge von ihnen sehr beträchtlich ausfallen. Wäre z. B. $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3\ldots$, wofür wir blos ε schreiben wollen, so würde

$$F'(x,n)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots+f'(x,n)$$
$$+\text{Lim}(n\varepsilon)$$

folgen, wo nun ε unbegränzt ab-, dagegen n, wegen der Unendlichkeit der Reihe, unbegränzt zunimmt, folglich Lim$(n\varepsilon)$ gegen einen angebbaren Werth Δ als Gränze convergiren kann. Man sieht hieraus, dass es Fälle geben wird, in welchen eine Gleichung wie

$$F(x)=f(x,1)+f(x,2)+f(x,3)+\ldots \text{ in inf.} \qquad (4)$$

eine Consequenz von der Form

$$F'(x)-\Delta=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots \text{ in inf.} \qquad (5)$$

nach sich zieht, so dass es also unter Umständen nicht erlaubt ist, aus No. (4) schliessen zu wollen:

$$F'(x)=f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots \text{ in inf.}$$

Man kann dieses Resultat auf folgende Weise etwas prägnanter und anschaulicher darstellen. Es sei

$$F(x)=\Sigma f(x,n), \qquad (6)$$

wo das Summenzeichen bedeuten soll, dass $n=1, 2, 3, \ldots$ zu setzen ist und die so entstehenden Glieder zu summiren sind. Bezeichnen wir ferner die Differenziation in Bezug auf x mit einem blosen D, so dass also überhaupt

$$D\varphi(x)=\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$$

ist, so folgt aus der Gleichung (6) ganz unzweifelhaft

Digitized by Google

$$DF(x) = D\Sigma f(x,n), \qquad (7)$$

denn wenn zwei Funktionen identisch sind, müssen offenbar auch ihre Differenzialquotienten zusammenfallen. Dabei darf man jedoch die Stellung von D und Σ nicht übersehen, es wird nämlich zuerst summirt und nach geschehener Summirung differenzirt. Dagegen ist es nicht immer erlaubt, die Reihenfolge dieser Operationen umzukehren und zu schreiben

$$DF(x) = \Sigma Df(x,n), \qquad (8)$$

wo jedes einzelne Glied erst differenzirt und nachher Alles summirt wird. Mit einem Worte also: wer aus der Gleichung

$$F(x) = \Sigma f(x,n)$$

ohne weiteres die folgende ableiten will:

$$DF(x) = \Sigma Df(x,n),$$

setzt stillschweigend voraus, dass immer

$$D\Sigma f(x,n) = \Sigma Df(x,n)$$

sei, kehrt also willkührlich die Reihenfolge der Operationen um.

Man sieht hieraus, dass es immer noch einer besonderen Untersuchung bedarf, um entscheiden zu können, ob die durch Differenziation einer ursprünglichen Summenformel entstandene neue Gleichung auch wirklich richtig ist, oder nicht, was aber in den meisten Fällen keine besonderen Schwierigkeiten hat.

VIII.

Ueber den 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides.

Von dem

Herrn Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

Königl. Bayer. Hofrathe, Director des Lyceums zu Aschaffenburg, etc.

---

1. Dieser 28. Satz des XI. Buchs ist folgender: Wenn ein Parallelopipedum von einer Ebene durch die Diagona-

Digitized by Google

len zweier gegenüberliegenden Seitenflächen durchschnitten wird, so wird es hierdurch halbirt. — Es werde das Parallelopipedum *AB* (Taf. III. Fig. 1.) von einer Ebene durch die Diagonalen *CF* und *DE* durchschnitten, so ist es hierdurch halbirt.

Der Beweis ist (nach meiner Ausgabe der geometrischen Bücher der Elemente des Euclides. Mainz. 1829. gr. 8. S. 168.) dieser: Da hier $\Delta\, CGF \cong \Delta\, CBF$ (I. 34. S.) und $\Delta\, DAE \cong \Delta\, DHE$, und da ferner die Parallelogramme *CA* und *BE* (XI. 24. S.) und *GE* und *CH* einander gleich sind, auch die Durchschnittsebene *CFED* beiden Körpern gemein ist, so muss auch das Prisma *CGFDAE* dem Prisma *CFBDEH* gleich sein (XI. 10. Erkl.)

2. Diese als Beweisgrund citirte 10. Erklärung lautet (nach obiger Ausgabe S. 143.) folgendergestalt: Gleiche und ähnliche Körper sind jene, die von gleich vielen, gleichen und ähnlichen Ebenen eingeschlossen werden.

3. Da man aber unter gleichen und ähnlichen, d. h. unter congruenten Körpern nur jene versteht, welche, wenn sie gehörig in einander gestellt werden, einen einzigen Körper bilden, so enthält diese 10. Erklärung eigentlich eine Behauptung, welche bewiesen werden müsste. Allein diese Behauptung selbst ist nicht allgemein wahr. Denn wenn das schiefe Parallelopipedum *AB* (Taf. III. Fig. 2.) durch den Diagonalschnitt *CEHG* in die zwei schiefen dreieckigen Prismen *AECFHG* und *ECDHGB* getheilt wird, so sind beide (wie man leicht findet) zwar von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen umschlossen; allein sie können doch nicht zur gegenseitigen Deckung gebracht werden. Dennoch ist ein überzeugender Beweis über die Gleichheit ihrer Körperräume erforderlich, welchen Euclides nicht gegeben hatte.

4. Zwei der vorzüglichsten ältern Commentatoren der Elemente, Christoph Clavius und Robert Simson, hatten sich bemüht, diese Lücke auszufüllen; allein sie erreichten das vorgesteckte Ziel nicht. Auch die meisten neueren Schriftsteller, Deutsche und Franzosen, haben dieses Mangelhafte nicht ergänzt. Selbst der durch Herausgabe und Erläuterung der alten Geometer so rühmlich bekannte Peyrard befriediget hier nicht vollkommen. Die Beweise, welche man bei Karsten und Legendre findet, entsprechen zwar der geometrischen Strenge; scheinen aber nicht elementar genug, um an die Stelle des 28. Satzes im XI. Buche der Elemente gesetzt zu werden.

5. Die Mittheilung einiger leicht verständlichen, strengen Beweise dieses so wichtigen Lehrsatzes wird demnach den Liebhabern des geometrischen Studiums erfreulich sein. Ehe dieselben geführt werden, ist jedoch noch nachzuweisen, dass (Taf. III. Fig. 2.) die Diagonale *EC* der Oberfläche *ACDE* mit der Diagonale *HG* der Grundfläche *FGBH* in einerlei Ebene liege. Denn nur in diesem Falle ist ein Diagonalschnitt durch *ECGH* möglich. Der Grund hievon ist folgender. Da *ACGF* ein Parallelogramm ist, so muss *AF* mit *CG*, und da auch *AEHF* ein solches ist, so muss *AF* mit *EH* parallel sein. Demnach sind

Digitized by Google

auch die Linien *CG* und *EH* miteinander parallel (9. S. XI. B.). Allein es ist auch $CG = EH$. Folglich muss *ECGH* ein Parallelogramm sein.

6. Nun sei *AH* (Taf. III. Fig. 3.) das gegebene Parallelopipedum und *CF* der Diagonalschnitt, so entstehen die beiden schiefen dreiseitigen Prismen *ABCEFG* und *CDBGHF*. Wir wollen jenes das hintere, dieses das vordere (in Bezug auf die Ansicht unserer Zeichnung) nennen. Wird nun das vordere Prisma von dem Parallelopipedum getrennt, dasselbe umgekehrt, d. h. seine Oberfläche zur Grundfläche und seine Grundfläche zur Oberfläche gemacht; so, dass nun *CBD*, in der verlängerten Linie *FE* und in der über *EG* erweiterten Ebene *EFG*, die Lage von *ebd* erhält, so stellt *gfhdbc* die Lage dieses umgekehrten dreieckigen Prisma's vor.

7. Vergleicht man nun die Prismen *ABCGFE* und *ghfdbc* mit einander, so ergeben sich folgende Resultate:

a) $\Delta\, ACB \cong \Delta\, EGF \cong \Delta\, gfh \cong \Delta\, cbd$. Ferner ist $BCGF \cong bcgf$, $ACGE \cong hfbd$ und $ABFE \cong ghdc$. Dieses heisst: beide Prismen sind von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen.

b) Da die Neigung der Seitenebenen *ABFE* und *CBFG* der Neigung der Ebenen *DCGH* und *BCGF* gleich ist, so muss auch die Neigung jener beiden Ebenen der Neigung der Ebenen *hgcd* und *fgcb* gleich sein. Auf ähnliche Weise ist der Neigungswinkel der Ebenen *BAEF* und *CAEG* jenem der Ebenen *ghdc* und *fhdb*, und der Neigungswinkel der Ebenen *BCGF* und *ACGE* jenem der Ebenen *gfbc* und *hfbd* gleich.

c) Ferner ist leicht zu erkennen, dass jede der Seitenflächen *ABFE*, *CBFG* und *CAEG* mit der Oberfläche *ABC* und mit der Grundfläche *EFG* die nämlichen Winkel bildet, welche jede der Seitenflächen *hgcd*, *fgcb* und *fhdb* mit der Oberfläche *hgf* und mit der Grundfläche *dcb* erzeuget.

d) Auch wird jeder der sechs Körperwinkel, welche das eine dreieckige Prisma enthält, mit dem homologen des andern Prisma's aus gleichvielen und gleich grossen ebenen Winkeln gebildet. Der Körperwinkel bei *C* wird z. B. wie jener bei *f* aus drei ebenen Winkeln $ACB = hfg$, $BCG = gfb$ und $ACG = hfb$ gebildet. Eben dieses gilt von jedem andern Paare dieser homologen Winkel.

8. Ungeachtet nun beide Prismen in Congruenz ihrer Seitenflächen, in der Neigung derselben sowohl unter sich, als gegen Grund- und Oberflächen, und endlich auch in der Grösse und Zahl der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkeln übereinstimmen, so decken sie sich dennoch nicht. Worin liegt der Grund dieser Abweichung bei sovielfacher Uebereinstimmung? Diese Frage kann einzig und allein durch die Anschauung beantwortet werden. Denn wer die Dreiecke *ACB* und *hgf* aufmerksam betrachtet, sieht nun sogleich, dass die Seiten *AB* und *hg* in Rücksicht ihrer Lage übereinstimmen, die Linien *AC* und *hf*, so wie *BC* und *gf* aber eine verschiedene Lage haben. Man

Digitized by Google

kann sie in Bezug auf *gB* die symmetrische nennen, und erkennt sogleich, dass auch die ganzen Dreiecke *ACB* und *hfg* eine symmetrische Lage haben. Auf gleiche Weise sind *EGF* und *dbc* symmetrisch liegende Dreiecke und die Kanten *AE* und *hd*, *CG* und *fb*, *BF* und *gc* symmetrische Linien. Betrachtet man das ganze Prisma *ACBFGE* und *gfhdbc*, so haben endlich beide Körper, in Bezug auf ihre Oberflächen, oder in Bezug auf ihre Grundflächen, eine symmetrische Lage gegen einander, und können daher füglich symmetrische Körper genannt werden.

9. Eine besondere Aufmerksamkeit verdienen aber die homologen Körperwinkel. Betrachtet man z. B. diese Winkel bei *C* und bei *f*, so ist zwar jeder von drei ebenen Winkeln umschlossen, welche paarweise gleich sind; allein wenn der Winkel *ACB* den Winkel *gfh* so decket, dass *C* in *f*, *CA* längs *fg* und *CB* längs *fh* fällt, so decket der Winkel *ACG* den Winkel *gfb* so wenig, als der Winkel *BCG* den Winkel *hfb*, weil die Seitenflächen, worin diese Winkel liegen, gegen die Dreiecke *ACB* und *gfh* eine verschiedene (man kann sagen eine symmetrische) Lage haben. Daher kann denn der Körperwinkel bei *C* den Körperwinkel bei *f* nicht decken. Aus gleichem Grunde wird keiner der übrigen Körperwinkel bei *A*, *B*, *F*, *G* und *E* mit dem ihm homologen Körperwinkel bei *h*, *g*, *c*, *b* und *d* so zusammenfallen, dass sie sich deckten. Diese Eigenthümlichkeit der Körperwinkel beider Prismen hatte sowohl Clavius als Robert Simson übersehen. Denn sonst hätten Beide das gänzliche Ineinanderfallen dieser Winkel, und mit diesem auch die Congruenz der Körper selbst, nicht behaupten können, da dieser Behauptung die Klarheit der Anschauung geradezu widerspricht. Wie äusserst wichtig zeigt sich hierdurch die scharfe Bildung der Anschauungskraft für das Studium der Geometrie? und wie unentbehrlich ist nicht eine geometrische Anschauungslehre als Propädeutik zur eigentlichen geometrischen Wissenschaftslehre?

10. Hieraus entspringt nun der Begriff von den symmetrischen Körpern, der, soviel wir wissen, zuerst von den französischen Geometern in die Geometrie eingeführt worden ist. Legendre sagt (in seinen Elémens de Géométrie, avec des notes. 4me édition. A Paris. 1802. S. 163.): Symmetrische Körper werde ich jene nennen, welche auf beiden Seiten einer gemeinschaftlichen Grundfläche dergestalt construirt sind, dass die Verbindungslinien zwischen den Scheiteln ähnlich liegender Körperwinkel auf dieser Grundfläche (oder ihrer Verlängerung) lothrecht stehen.

Zur Erläuterung dieser Erklärung sei *abc* (Taf. III. Fig. 4.) ein beliebiges Dreieck und *d* ein ausserhalb dessen Ebene angenommener Punkt. Von *d* giebt es ein Loth auf die Ebene *abc*, welches entweder in dieselbe, oder ausserhalb derselben, in ihre Verlängerung, trifft. Hier sei das Letzte der Fall und *df* dieses Loth. Macht man nun $fg = df$ und zieht die geraden Linien *ad*, *bd*, *cd*, ferner *ag*, *bg*, *cg*, so entstehen zwei dreiseitige Pyramiden *abcd* und *abcg*, welche eine symmetrische Lage haben und desshalb symmetrische Pyramiden heissen. — Auf

Digitized by Google

gleiche Art lassen sich symmetrische dreieckige Prismen, symmetrische Parallelopipeden u. s. f. construiren.

11. Man wird bald finden, dass die, auf diese Weise (10) entstandenen, symmetrischen Körper in gleich viele, congruente Seitenflächen eingeschlossen sind, dass jedes Paar homologer Seitenflächen gleiche Neigung hat, und dass alle homologe Körperwinkel von gleich vielen und gleich grossen ebenen Winkeln eingeschlossen sind. Dieses hier weitläufig auseinander zu setzen, verbietet die Kürze des Raumes. Aber selbst der Anfänger wird diese Beweise leicht selbst finden können. Es stimmt daher die Erklärung der symmetrischen Körper nach Legendre mit der unserigen (8) überein.

12. Was nun die Entstehung symmetrischer Prismen betrifft, so kann man dieselbe auf folgende leichtverständliche Art nachweisen. Man nehme in einer gegebenen Ebene die gerade Linie gB (Taf. III. Fig. 3.), in ihr $gh = AB$, und beschreibe die congruenten Dreiecke gfh und ACB so, dass $gf = BC$, $hf = AC$ werde. Auf gfh und BCA errichte man nun die $hd = AE$, in derselbigen (der Lage nach willkührlichen) Ebene liegend, unter gleichen schiefen Neigungswinkeln, nehme $fb = gc = hd$ und parallel mit hd; ebenso $CG = BF = AE$ parallel mit AE, und ziehe die Verbindungslinien cd, db, bc und FE, EG, GF, so entstehen die beiden symmetrischen dreieckigen Prismen $gfhdbc$ und $BCAEGF$. Setzt man sie gehörig zusammen, so bilden sie das Parallelopipedum AH.

13. Nachdem nun Legendre (a. a. O.) gezeigt hat, dass die symmetrischen Körper in der Congruenz ihrer Seitenflächen, in ihrer Neigung gegeneinander und in der Gleichheit der ihre Körperwinkel bildenden ebenen Winkel übereinstimmen, fügt er hinzu: „On peut conclure, que deux polyèdres symmétriques sont égaux quoiqu'ils ne puissent être superposés: Car il n'y a d'autre différence dans les deux solides, que celle de la position des parties, laquelle n'est point essentielle à la grandeur de ces mêmes parties."

So wahr nun diese Aeusserungen sind, so wenig können sie die Gleichheit der symmetrischen Körper geometrisch wissenschaftlich begründen. Dieses fühlte auch der scharfsinnige Legendre. Denn er hat in den Notes sur les Élémens de Géométrie; note VII. Seite 303. u. f. einen strengen Beweis über die Gleichheit der symmetrischen Körper gegeben.

14. Da sich dieser Beweis von Legendre durch Originalität und Gründlichkeit auszeichnet und die Élémens de Géométrie in Deutschland immer noch nicht so allgemein bekannt sind, wie sie verdienen, so theilen wir ihn hier, wenigstens der Gedankenfolge nach, mit. Der aufmerksame Leser wird die ausführlichen Beweise wohl selbst auffinden und sich die passenden Zeichnungen dazu leicht verfertigen können.

1. Satz. Wenn man aus der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf dessen Ebene ein Loth errichtet und solches zu beiden Seiten der Ebene gleich gross nimmt, auch von jedem Endpunkte der Grundlinie dieses gleichschenklichen Dreiecks eine gerade Linie nach jedem Endpunkte dieser beiden Lothe zieht, so entstehen zwei dreieckige Pyramiden, welche sich decken.

Digitized by Google

II. Satz. Wenn man aus dem Mittelpunkte des um ein gegebenes Dreieck zu beschreibenden Kreises auf des Dreiecks Ebene ein Loth errichtet, dasselbe nach beiden Seiten des Dreiecks gleich gross macht, und jeden Endpunkt dieser zwei Lothe mit jedem der drei Winkelpunkte des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so entstehen zwei symmetrische Pyramiden von gleicher Grösse.

Denn jede dieser Pyramiden zerfällt in drei andere von gleichschenklichen Grundflächen (wie die im I. Satze), welche paarweise congruent sind. Folglich sind auch ihre Summen gleich.

III. Satz. Um jede dreiseitige Pyramide kann eine Kugel beschrieben werden, deren Fläche durch die Scheitelpunkte ihrer vier Körperwinkel geht.

Wenn man um eine der dreieckigen Seitenflächen der gegebenen Pyramide einen Kreis beschreibt, aus dessen Mittelpunkte auf denselben ein Loth errichtet, so ist jeder Punkt dieses Lothes von jedem Winkelpunkte des Dreiecks gleichweit entfernt, und es kommt nur darauf an, diesen Punkt so zu wählen, dass auch seine Entfernung von der Spitze der Pyramide eben diese Grösse erhält, was man leicht durch Construction finden kann.

IV. Satz. Zwei symmetrische dreiseitige Pyramiden sind gleich am Körperinhalte.

Wenn man um jede derselben eine Kugel beschreibt, so sind ihre Halbmesser von gleicher Grösse. Fallen nun die Mittelpunkte dieser Kugeln in die Pyramiden, so fälle man aus ihnen auf jede ihrer Seitenflächen ein Loth, und ziehe nach jeder Winkelspitze der Pyramiden eine gerade Linie, so entstehen in jeder Pyramide vier kleinere, welche (nach II. Satz) paarweise gleich sind. Folglich sind auch ihre Summen, d. h. die symmetrischen Pyramiden einander gleich.

V. Satz. Zwei symmetrische Prismen sind gleich am Körperraume.

Denn man sieht leicht, dass sich jede zwei symmetrische Prismen in eine gleiche Anzahl von symmetrischen dreieckigen Pyramiden zertheilen lassen. Da nun diese paarweise einander gleich sind (nach IV. Satz), so sind es auch die gegebenen symmetrischen prismatischen Körper.

Anmerkung. Wenn im II. Satze der Mittelpunkt des um das Dreieck zu beschreibenden Kreises ausserhalb dieses Dreiecks; oder in dem IV. Satze der Mittelpunkt der um die Pyramiden zu beschreibenden Kugeln ausserhalb der Pyramiden fällt, so ist es leicht, die Beweise auf ähnliche Art zu führen.

15. So befriedigend nun auch dieser Beweis ist, so muss man doch gestehen, dass er (besonders bei näherer Ausführung) auf elementarische Kürze keinen Anspruch machen kann. Es schien mir daher der Mühe werth, einen so höchst wichtigen Satz der Stereometrie: das Theorem von dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedums, so kurz und bündig zu erweisen, als dieses nur immer von einer ähnlichen Behauptung der Körperlehre gefordert werden kann. Den hierüber ersonnenen

Digitized by Google

Beweis hatte ich bereits vor langer Zeit der vormaligen Departementalgesellschaft der W. W. und K. K. in Mainz (welche mich mit einem Diplome zum Beitritt als auswärtiges Mitglied beehrte) als kleine Denkschrift zugesendet, und die mathematische Section jener Gesellschaft hatte meine Darstellung als befriedigend erkannt. Ich füge sie hier öffentlich mit der Bemerkung bei, dass sie sehr füglich an die Stelle des 28. Satzes im XI. Buche der Elemente des Euclides gesetzt werden und so die Lücke ergänzen kann, welche in dem Beweise dieses wichtigen Lehrsatzes herrscht.

16. Es sei (Taf. III. Fig. 5.) *abcdefgh* das gegebene schiefe Parallelopipedum und *adhe* dessen Diagonalebene, so ist zu beweisen, dass das Prisma *acdheg* gleich sei dem Prisma *abdhfe*.

Man halbire *cg* in *l*, errichte *lm* in der Ebene *ch* und *li* in der Ebene *ce* lothrecht auf *cl* und ziehe *im*, so sind *cg*, *ae* und *dh* auf der Dreiecksebene *ilm* senkrecht (El. XI. 4. und 8.). Wird nun das schiefe Parallelopipedum *ah* durch das über *im* verlängerte Dreieck *lim* durchschnitten, so entspringt das Rechteck *likm*, worauf die vier Seitenflächen dieses Parallelopipedums lothrecht stehen (El. XI. 8.).

Nun verlängere man die *cg*, *ae*, *bf* und *dh* über *g*, *e*, *f* und *h*, so, dass $gp = cl$, $en = ai$, $fo = bk$ und $hq = dm$ ist, und ziehe die Verbindungslinien *pn*, *no*, *oq* und *qp*, so wird *noqp* ein Rechteck, welches dem Rechtecke *ikml* congruent ist (El. XI. 10. 4. und 5.). Auch sieht man leicht, dass nun ein senkrechtes Parallelopipedum *iq* entstanden ist, welches durch den Diagonalschnitt *imqn* in zwei congruente dreieckige Prismen *limqnp* und *ikmqon* getheilt werden kann, und dass der Körper *cadmil* dem Körper *gehqnp*, und der Körper *adbkmi* dem Körper *ehfoqn* vollkommen congruent ist.

Hieraus entstehen nun folgende Schlüsse:

$$\begin{array}{l} \text{Körper } acdilm \cong \text{Körper } cghnpq, \\ \underline{\text{Körper } ilmegh = \text{Körper } ilmegh,} \\ \text{Körper } acdegh = \text{Körper } ilmnpq, \text{ d. h.} \\ \text{Prisma } acdegh = \text{Prisma } ilmnpq \text{ No. I.} \end{array}$$

Desgleichen ist auch:

$$\begin{array}{l} \text{Körper } bdakmi \cong \text{Körper } fheoqn, \\ \underline{\text{Körper } kmifhe = \text{Körper } kmifhe,} \\ \text{Körper } bdafhe = \text{Körper } kmioqn, \text{ d. h.} \\ \text{Prisma } bdafhe = \text{Prisma } kmioqn \text{ No. II.} \end{array}$$

Da nun, nach dem Erwiesenen, Prisma $ilmnpq =$ Prisma *kmioqn* ist, so muss auch (nach No. I. und II.) Prisma $acdegh =$ Prisma *bdafhe* sein.

Wenn die auf den Seitenflächen des gegebenen schiefen Parallelopipedums lothrecht stehende Durchschnitts-Ebene *likm* mit *mk* in *hf* oder in die Grundfläche *eghf* eintreffen sollte, so darf

man nur das gegebene Parallelopipedum oberhalb *acdb* und unterhalb *eghf* um die Grösse der Seite *gc* ein- oder mehrmal verlängern, wo denn der nämliche Beweis geführt werden kann.

17. In Frankreich haben die Elemente des Euclides an Peyrard (Bibliothekar der polytechnischen Schule zu Paris) einen sehr thätigen Uebersetzer und geschickten Herausgeber gefunden. Seine Schrift führt den Titel: Les Élémens de Géométrie d'Euclide traduits littéralement, et suivis d'un Traité du Cercle, du Cylindre, du Cône et de la Sphère; de la mesure des Surfaces et des Solides; avec des Notes. Par F. Peyrard. A Paris. 1804. XV. und 576. S. 8. mit 8 Kupfertafeln. Sie enthält eine wohlgerathene wörtliche Uebersetzung der sechs ersten Bücher, nebst dem eilften und zwölften der Elemente. In dem Supplemente (S. 447—558) hat Peyrard die von Euclides nicht aufgenommenen Sätze vom Kreise, Cylinder, Kegel, von der Kugel, vom Ausmessen der Oberflächen und der Körper, nach den Grundsätzen des Archimedes, aber nach Euclides Methode abgehandelt. Die Noten endlich (S. 559—575) enthalten Erklärungen über einige dunkle Stellen der Elemente, und vorzüglich eine Kritik gegen Robert Simson in Bezug auf die X. Erklärung des XI. Buchs.

18. Diese Kritik betrifft fürs Erste eine Behauptung von Robert Simson: die X. Erklärung des XI. Buchs der Elemente sei nicht allgemein wahr, indem es in der That Körper gäbe, welche, obgleich von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen umschlossen, dennoch weder congruent, noch blos gleich an Körperraume seien. Diese Behauptung beweiset Robert Simson durch zwei Körper, welche entstehen, wenn man in der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide einen willkührlichen Punkt annimmt, durch ihn ein beliebiges Loth in dem Innern der Pyramide darauf errichtet, dasselbe eben so weit zur andern Seite der Grundfläche verlängert, und nun von jedem Endpunkte dieser Lothe drei gerade Linien nach den drei Winkelpunkten der Grundfläche ziehet. Man sieht leicht, dass die sich hierdurch bildenden zwei Körper, von welchen der eine vier auswärtsgehende, der andere aber drei auswärts- und einen einwärtsgehenden Körperwinkel hat, von gleich vielen, gleich und ähnlichen Seitenflächen eingeschlossen werden, ohne dass solche weder an Grösse, noch an Gestalt übereinstimmen. Da nun dieses unwidersprechlich wahr ist, so müssen wir Robert Simson's Aeusserung als vollkommen begründet ansehen, und die X. Erklärung des XI. Buchs ist somit nicht bestimmt genug ausgedrückt. Peyrard sagt zwar: „Ist es nicht einleuchtend, dass Euclides nur von solchen Körpern sprach, welche keine einwärts gehende Winkel haben?" Allein hier ist nicht die Rede von dem Sinne, welchen Euclides mit seinen Worten verbunden haben mag, sondern von dem Sinne, welchen man mit klar ausgesprochnen Worten verbinden muss. Und darin hat Robert Simson offenbar Recht. Was sonst noch gegen diese X. Erklärung zu bemerken ist, wurde bereits oben (3.) auseinandergesetzt.

19. Fürs Zweite entgeht dem scharfsinnigen Peyrard das Unzulängliche in dem Beweise von Robert Simson nicht. Er

Digitized by Google

bemerkt mit Recht, dass der XVIII. und XL. Satz des XI. Buchs, so wie auch der III. und IV. Satz des XII. Buchs der Elemente nicht befriedigend dargethan sei, so lange die fragliche Behauptung nicht scharf erwiesen wäre.

20. Aber wie verhält sich Peyrard in dieser schwierigen Sache? Er stellt drei Lehrsätze auf, welche mit den von Robert Simson ausgesprochenen im Wesentlichen einerlei sind. Bei dem zweiten Lehrsatze bemerkt er auch richtig, dass sich die entsprechenden Körperwinkel nicht immer deckten, sondern bisweilen als symmetrische erschienen. Aber nun heisst es: „Hieraus schliesse ich, dass die Congruenz zweier Körperwinkel, welche von drei ebenen, einzeln genommen, gleichen Winkeln eingeschlossen sind, nicht Statt finde, wenn, nachdem man zwei gleiche ebene Winkel derselben in einander gelegt hat, ihre beiden andern Winkel nicht nach den nämlichen Seiten hin liegen. In diesem Falle muss man sich also begnügen, zu sagen, dass zwei Körperwinkel, deren jeder von drei ebenen Winkeln, welche paarweise einander gleich sind, gebildet wird, auch unter sich gleich sind, weil ihre bestimmenden Stücke, d. h. ihre ebenen Winkel und ihre Neigungen, gleiche Grösse haben."

21. Peyrard hat hierdurch wohl Robert Simsons Behauptung, dass sich die fraglichen Körperwinkel deckten, berichtiget; allein, dass er jene Körperwinkel gleiche nennt, welche nicht als congruent erscheinen, ist gegen die Natur der Sache, und selbst gegen den Sprachgebrauch, da solche Körperwinkel sehr wohl symmetrische heissen. Man soll nie von allgemein anerkannten Begriffsbestimmungen abweichen. Alle Geometer verstehen aber unter Gleichheit die Uebereinstimmung in der Grösse; unter Aehnlichkeit Uebereinstimmung in der Gestalt, und unter Congruenz die Uebereinstimmung in Grösse und Gestalt zugleich. Nach diesem ergiebt sich sogleich, dass die fraglichen Körperwinkel weder gleiche, noch ähnliche, noch congruente genannt werden dürfen. Sie sind nämlich zum Theil gleich, zum Theil ähnlich, und folglich nicht vollkommen übereinstimmend. Die Benennung: symmetrische Körperwinkel ist wohl die schicklichste. Wie durfte sie also Peyrard gleich nennen, da er sich selbst des Ausdrucks: symmetrische Körper bedienet?

22. Der dritte Lehrsatz von Peyrard ist wörtlich das Theorem von Robert Simson, welches behauptet, dass die zwei dreieckigen Prismen, welche aus dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedums entstehen, gleich und ähnlich seien, obschon sie nicht als congruent erscheinen. Hier, bemerkt er, muss man sich wieder begnügen, zu sagen, dass diese Körper deshalb gleich und ähnlich seien, weil ihre bestimmenden Stücke gegenseitig vollkommen gleich sind.

23. Zur Prüfung dieser Ansicht müssen wir unsere vorigen Aeusserungen (21) wiederholen. Es ist fürs Erste gegen den scharfen Sprachgebrauch, zwei Körper gleich und ähnlich zu nennen, welche doch nicht congruent sind, und wofür Peyrard selbst den Ausdruck: symmetrische Körper gebraucht. Aber fürs

Digitized by Google

Zweite kann noch weniger aus einer solchen Gleichheit und Aehnlichkeit die Uebereinstimmung in der Grösse beider Körper abgeleitet werden. Diese ist vielmehr gar nicht scharf bewiesen. Da Peyrard selbst (a. a. O. S. 564.) auf die, der Geometrie von Legendre beigefügten Noten verweiset (33 u. f.), so ist es um so auffallender, wie ein so strenger Geometer sich hier diesen Mangel an Schärfe erlauben konnte. Er hätte zum wenigsten die Beweise von Legendre (14) seinem Vortrage einverleiben sollen.

24. Da der Satz von der Gleichheit der zwei dreieckigen Prismen, welche durch den Diagonalschnitt eines schiefen Parallelopipedums entstehen, in den meisten Compendien der Elementargeometrie nur höchst unbefriedigend erwiesen wird, so ist es zweckmässig, hier noch den strengen Beweis eines ältern, jedem deutschen Geometer rühmlichst bekannten Schriftstellers, des gründlichen Karsten, beizubringen. Man mögte sich wundern, dass diese sinnreich ausgedachte Demonstration nicht häufiger in späteren Schriften aufgenommen worden ist; allein wahrscheinlich hat man sie nicht für elementar genug gehalten, um solche den ersten Anfängern mitzutheilen. In der That scheint sie auch der unserigen (16.) in dieser Hinsicht nachzustehen.

25. Um diesen Beweis von Karsten (Lehrbegriff der Mathematik, Geometrie, §. 343.) kennen zu lernen, theilen wir ihn hier in einer fasslicheren Form mit.

Wenn *AS* (Taf. III. Fig. 6.) das gegebene schiefe Parallelopipedum, *GCMQ* aber der Diagonalschnitt ist, und man legt durch die Mitte *E* und *O* der Grundflächen *AI* und *KS* die Ebene *HBLR* parallel mit *GAKQ*, und die Ebene *FDNP* parallel mit *ACMK*, so entstehen vier Parallelopipeden: *AO*, *FR*, *BN* und *ES*, welche unter sich congruent sind, und deren jedes $\frac{1}{4}$ des gegebenen ist. Zwei von diesen Parallelopipeden theilet der Diagonalschnitt *GCMQ* nicht; zwei andere aber werden durch ihn in zwei dreieckige Prismen getheilt. Jene sollen die äusseren, diese die mittleren Parallelopipeden, die aus letzten entstehenden dreieckigen Prismen aber die mittleren Prismen heissen.

Wird nun jedes der mittleren Parallelopipeden, wie das gegebene, in vier kleine Parallelopipeden getheilt, so entstehen in jedem wieder vier congruente Parallelopipeden, zwei mittlere und zwei äussere, deren jedes $\frac{1}{16}$ des gegebenen ist. Jedes dieser mittleren könnte nun wieder so getheilt werden, und man würde in jedem vier congruente Parallelopipeden erhalten, deren jedes $\frac{1}{64}$ des gegebenen wäre. Diese Theilung aber kann, wie man leicht sieht, ins Unendliche fortgesetzt werden.

Da nun bei jeder Theilung die Summe der äusseren Parallelopipeden die Hälfte des gegebenen beträgt, und somit von letzterem die Hälfte, von dieser Hälfte wiederum die Hälfte u. s. f. ohne Ende hinweggenommen werden kann, so muss der Unterschied zwischen der Summe aller äusseren Parallelopipeden und dem gegebenen einmal kleiner als jede angebliche Grösse werden (Elem. X. B. 1. S.). Allein der Unterschied der grösseren Prismen *GCS* und *GCK* kann nur in dem Unterschiede

Digitized by Google

aller **mittleren** Prismen liegen. Da nun diese mittleren Prismen selbst kleiner als jede angebliche Grösse werden können, so muss sich auch ihr Unterschied in dem Maasse verkleinern. Daher sind die grösseren Prismen *GCS* und *GCK* um einen Unterschied verschieden, der kleiner als jede angebliche Grösse ist, d. h. diese Prismen sind gleich.

26. Bei dem Durchdenken dieser sinnreichen Demonstration habe ich folgenden Beweis gefunden, welcher, wie es mir scheint, sich durch Kürze und Fasslichkeit empfehlen mögte.

I. Das dreieckige Prisma *GCS* (Taf. III. Fig. 6.) besteht aus **einem** äussern Parallelopipedum *ES*, welches $\frac{1}{4}$ des gegebenen *AS* ist, aus **zwei** äussern Parallelopipeden, welche zusammen $\frac{2}{16}$, d. h. $\frac{1}{8}$ von *AS*; aus **vier** äussern, welche zusammen $\frac{4}{64}$, d. h. $\frac{1}{16}$ von *AS*; aus **acht** äussern, welche zusammen $\frac{8}{256}$, d. h. $\frac{1}{32}$ von *AS* betragen, und so fort ohne Ende. Die Summe aller dieser äussern Prismen (sie heisse *S*) bildet also, in Bezug auf das Parallelopipedum $AS=1$, eine **unendliche Reihe** von der Form:

$$S = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64} + \dots$$

II. Aus der Arithmetik ist aber bekannt, dass, wenn *a* das erste Glied, *e* der Exponent und *S* die Summe einer **unendlichen Reihe** ausdrückt, der Werth von $S=\frac{a}{1-e}$ sei. Daher ist, für obige Reihe,

$$S=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}\times\tfrac{2}{1}=\tfrac{1}{2}.$$

III. Auf gleiche Weise ist aber auch die Summe aller **äussern** Parallelopipeden im dreieckigen Prisma $GCK=\frac{1}{2}AS$, weil sie mit der in II. gefundenen aus gleichvielen und gegenseitig gleichgrossen Gliedern besteht. Folglich ist Prisma $GCS=$ Prisma $GCK=\frac{1}{2}$ Parallelopipedum *AS*.

27. *a*. Der hier (in 16.) gegebene **directe** Beweis des Lehrsatzes hat einen **neuen indirecten** veranlasst, welcher ebenfalls Fasslichkeit mit geometrischer Strenge vereinigt. Er ist folgender. Wenn (Taf. III. Fig. 7.) *ABCDEFGH* das gegebene schiefe Parallelopipedum und *BDHF* der Diagonalschnitt in demselben ist, so soll bewiesen werden, dass das schiefe dreieckige Prisma *ADBEHF* dem schiefen dreieckigen Prisma *BDCFHG* nicht ungleich an Grösse sein kann, ohne auf einen Widerspruch zu gelangen, welcher aus der Annahme dieser Ungleichheit hervorgehen müsste.

b. Man lege durch *AD* (wobei, der Einfachheit wegen, die Winkel *DAE* und *ADH* als rechte angenommen sind) eine Ebene, welche auf *BCGF* lothrecht steht, so bildet dieser Durchschnitt das Parallelogramm *ADKJ*, auf dessen Ebene die Seitenkanten *AE*, *DH*, *BF*, *CG* senkrecht sind. Wird nun ebenso durch *FG* eine Durchschnittsebene lothrecht auf *AEHD* gelegt, so entsteht ein Parallelogramm *FGML*, welches dem Parallelogramme *ADKJ* congruent ist und auf welchem die Kantenlinien *LA*, *MD*, *FB*.

Digitized by Google

GC ebenfalls senkrecht sind. Demnach bildet sich im Innern des schiefen Parallelopipedums *ABCDEFGH* ein senkrechtes Parallelopipedum *AJKDLFGM*, welches durch die Diagonalebene *DJFM* in die beiden vollkommen congruenten dreieckigen Prismen *ADJLMF* und *DJKMFG* getheilt wird, wie dieses aus Taf. III. Fig. 1. hervorgeht, indem das vordere dreieckige Prisma dergestalt in das hintere gestellt werden kann, dass beide nur ein einziges bilden.

c. Das schiefe dreieckige Prisma (Taf. III. Fig. 7.) *ADBEHF* besteht daher aus dem senkrechten Prisma *ADJLMF*, aus der dreiseitigen Pyramide, deren Grundfläche das Dreieck *ADJ* und deren Spitze in *B* ist, und aus der vierseitigen Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogramm *LMHE* und deren Spitze in *F* liegt. — Ebenso besteht das schiefe dreieckige Prisma *BDCFHG* aus dem senkrechten Prisma *DJKMFG*, aus der viereckigen Pyramide, deren Grundfläche *BCKJ* und deren Spitze *D* ist, und aus der dreiseitigen Pyramide, deren Basis das Dreieck *FHG* und deren Spitze in *M* ist. Man überzeugt sich leicht, dass die ebengenannten beiden viereckigen, so wie auch die zwei dreiseitigen Pyramiden keine congruente, wohl aber symmetrische (8.) Körper seien.

d. Sollten nun diese beiden schiefen dreieckigen Prismen *ADBEHF* und *DBCHFG* (welche mit *P* und *Q* bezeichnet werden sollen) an Grösse verschieden sein, so kann dieser Unterschied (da beide die einander congruenten dreieckigen Prismen als Bestandtheil gemein haben) nur in der Verschiedenheit der Körpersummen *ADJB* + *LEHMF* und *FGHM* + *KCBJD* begründet sein.

e. Wäre nun (hypothetisch angenommen) $P > Q$, so setze man $P - Q = d$, und es ist klar, dass nunmehr $2P - 2Q = 2d$, $3P - 3Q = 3d$ und überhaupt $nP - nQ = nd$ sein müsste. Wenn aber gezeigt werden kann, dass bei $P - Q$, bei $2P - 2Q$, bei $3P - 3Q$, und, im Allgemeinen, bei $nP - nQ$ stets eine und dieselbige Differenz stattfinden müsste, wenn bei $P - Q$ irgend eine Differenz bestände, so ist dieses nur dadurch möglich, dass diese Differenz $= 0$ ist, d. h. dass $P = Q$ sein muss.

f. Denkt man sich die Seitenkanten *EA*, *FB*, *HD*, *GC* über *A*, *B*, *D*, *C* so verlängert, bis *Aa* (welche man in einer Zeichnung wirklich ziehen kann) $= EA$, $Bb = FB$, $Dd = HD$, $Cc = GC$ ist, verbindet die Endpunkte *a*, *b*, *d*, *c* durch vier gerade Linien und betrachtet den Diagonalschnitt *dbFH*, so ist klar, dass in dem schiefen Parallelopipedum *abcdEFGH* zwei schiefe dreieckige Prismen entstehen, von welchen $abdEFH = \frac{1}{2}ABDEFH$ und $dbcHFG = \frac{1}{2}DBCHFG$ ist. Wird nun durch *ad* eine mit *AJKD* parallele Ebene gelegt, so entsteht ein Viereck *aikd*, welches mit *abcd* einen Körper *abcdik* bestimmt, der dem Körper *ABCDJK* vollkommen congruent ist, und die oben (in *c.*) bemerkten Theile dieser Körper bilden den Ueberschuss der beiden grossen schiefen dreieckigen Prismen (2*P* und 2*Q*) über die zwei in ihrem Innern entstehenden congruenten dreieckigen Prismen. Bestände nun zwischen *P* und *Q* eine Differenz $= d$, so müsste hier bei 2*P* und 2*Q* eine Differenz $= 2d$ statt-

Digitized by Google

finden. Da aber auch bei nP und nQ (wie die fortgesetzte Construction der gleichvielfach grössern schiefen dreieckigen Prismen P und Q deutlich zeiget) diese Differenz zwischen P und Q nie grösser wird, so kann zwischen P und Q gar kein Unterschied bestehen, d. h. es muss $P = Q$ sein.

g. Wäre der Winkel ADH ein stumpfer, so würde durch D eine Ebene gelegt, auf welcher die vier Seitenkanten DH, AE, BF, CG lothrecht stehen, und der Beweis wäre der nämliche, da nun auch durch F eine Durchschnittsebene gelegt würde, worauf eben diese Kanten senkrecht sind.

h. Der allgemeine Satz, worauf sich dieser indirecte Beweis gründet, ist demnach folgender: Wenn zwei Grössen P und Q, von welchen man nicht weiss, ob sie einander gleich oder ungleich sind, gegeben werden, uud man kann überzeugend beweisen. dass, wenn zwischen ihnen ein Unterschied stattfände, ebenderselbe auch bei ihren Doppelten, Dreifachen und überhaupt bei ihren *n*fachen stattfinden müsste, so muss nothwendig auch $P = Q$ sein.

i. In der früher erschienenen Abhandlung: Der 28. Satz des XI. Buchs der Elemente des Euclides u. s. w. S. 4. mit einer Steintafel (40 Kr.), ist sowohl das Geschichtliche, als das Kritische dieses Satzes ausführlicher dargestellt worden.

Digitized by Google

IX.

Ueber zwei Kurven, die von der Ellipse abgeleitet sind. Berechnung der von denselben umschlossenen Fläche.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 1.

Sei

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$$

die Gleichung einer Ellipse, (x', y') ein Punkt derselben. Auf diesen Punkt ziehe man vom Mittelpunkte einen Radius vector und verlängere diesen um die Grösse h. Die Gleichung des Rad. vect. ist $y=\frac{y'}{x'}x$, und die Koordinaten des Endpunktes (des verlängerten Rad. v.): $x'+\frac{hx'}{r'}$, $y'+\frac{hy'}{r'}$, wo $r'=\sqrt{x'^2+y'^2}$. In diesem Endpunkte errichte man eine Senkrechte auf den Rad. v., so ist die Gleichung dieser Linie:

$$y-\left(y'+\frac{hy'}{r'}\right)=-\frac{x'}{y'}\left(x-x'-\frac{hx'}{r'}\right). \qquad (1)$$

Das, was bisher mit einem einzigen Rad. vect. vorgenommen wurde, nehme man mit allen vor, und suche sodann die Gleichung der Kurve, die von allen den auf den verschiedenen Rad. vect. senkrecht stehenden Geraden berührt wird. Zu diesem Ende muss man die Gleichung (1), welche auch so dargestellt werden kann:

$$yy'+xx'=x'^2+y'^2+h\sqrt{x'^2+y'^2}, \qquad (1)$$

nach x' differenziren, indem man y' als Funktion von x', bedingt durch die Gleichung

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

ansieht, und zwischen der erhaltenen Differenzialgleichung und der Gleichung (1), x' und y' climiniren. Nun giebt (1):

$$y\frac{\partial y'}{\partial x'} + x = 2x' + 2y'\frac{\partial y'}{\partial x'} + \frac{h\left(x' + y'\frac{\partial y'}{\partial x'}\right)}{\sqrt{x'^2 + y^2}},$$

während aus (2) folgt:

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Setzt man diesen Werth in (3), so erhält man:

$$a^2 y' x - b^2 x' y = 2(a^2 - b^2) x' y' + h(a^2 - b^2)\frac{x' y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (4)$$

Eliminirt man nun aus (1), (2), (4) die Grössen x', y', so erhält man die Gleichung der gesuchten Kurve.

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2a^2 y'^2 + b^2 x'^2 - b^2 y'^2}{a^2 y'^2 + b^2 x'^2} x' + \frac{h x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ y &= \frac{(2b^2 x'^2 + a^2 y'^2 - a^2 x'^2)}{a^2 y'^2 + b^2 x'^2} y' + \frac{h y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Diese Gleichungen geben für jeden Punkt (x', y') der Ellipse den entsprechenden Punkt der gesuchten Kurve an.

Man setze in (5) $x' = a\cos\varphi$, $y' = b\sin\varphi$, so genügen x', y' der Gleichung (2), während φ ein Winkel ist, der in dem Punkte 0 ist, in welchem die Axe der x die Ellipse schneidet; durch diese Substitution findet sich:

$$\left.\begin{aligned} x &= (1 + e^2\sin^2\varphi)\, a\cos\varphi + \frac{h\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}, \\ y &= \frac{b^2 - a^2 e^2\cos^2\varphi}{b}\sin\varphi + \frac{b h \sin\varphi}{a\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wenn $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Die Gleichungen (6), wenn man in ihnen φ von 0 bis 2π gehen lässt, drücken die gesuchte Kurve aus. Durch Elimination von φ zwischen ihnen erhielte man die Gleichung derselben in gewöhnlichen rechtwinklichen Koordinaten. Für den Fall $h = 0$ erhält man als gesuchte Gleichung (siehe Crelle's Journal. Bd. 33. S. 90 ff.):

$$[6a^2 b^2 - 2(2b^2 - a^2)(2a^2 - b^2) - 3(a^2 x^2 + b^2 y^2)]^3 =$$
$$[9a^2(2b^2 - a^2)x^2 + 9b^2(2a^2 - b^2)y^2 - 4(a^2 + b^2)(2b^2 - a^2)(2a^2 - b^2)]^2.$$

In unserm Falle würde die Endgleichung offenbar noch verwickelter ausfallen; da es aber für den Zweck, der hier verfolgt wird, nicht nöthig ist, dieselbe zu haben, so begnügen wir uns mit den Gleichungen (6).

Digitized by Google

Die gesuchte Kurve besteht offenbar aus vier kongruenten Theilen, von $\varphi=0$ bis $\frac{\pi}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ bis π, $\varphi=\pi$ bis $\frac{3\pi}{2}$, $\varphi=\frac{3\pi}{2}$ bis 2π. Der erste dieser Quadranten ist von den positiven Theilen der Axen der x und y begränzt: er beginnt an der Axe der x. Suchen wir nun die Fläche zwischen der Axe der x, der Kurve und der Ordinate y. Da die Ordinate y den Quadranten in zwei Theile theilt, so muss noch bemerkt werden, dass derjenige dieser beiden Theile gemeint ist, der vom Mittelpunkte entfernter ist.

Die Formel für die Quadrirung ist $\pm\int y dx$, je nachdem x mit wachsender Fläche zu- oder abnimmt. In unserm Falle ist das untere Zeichen anzuwenden. Da aber x und y als Funktionen von φ gegeben sind, so ist der Ausdruck für die gesuchte Fläche

$$-\int_0^\varphi y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\partial\varphi.$$

Setzt man hier die obigen Werthe (6) von x und y, so erhält man als Ausdruck des gesuchten Flächenstücks:

$$ab\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,\partial\varphi-\frac{a^3e^2}{b}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi$$

$$+2abe^2\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi+abe^2\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,\partial\varphi$$

$$+\frac{2a^3e^4}{b}\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^4\varphi\,\partial\varphi$$

$$-\frac{a^3e^4}{b}\int_0^\varphi \sin^4\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi+\frac{hb^3}{a^2}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

$$-hbe^2\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}+hb\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

$$-2bhe^2\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

$$+bhe^2\int_0^\varphi\frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}+\frac{h^2b^3}{a^3}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^4}}.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\,\partial\varphi=-\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi=\tfrac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi-\tfrac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{1}{8}\varphi.$$

$$\int_0^\varphi \sin^4\varphi\,\partial\varphi=-\tfrac{1}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi-\tfrac{3}{8}\sin\varphi\cos\varphi+\tfrac{3}{8}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \sin^2\varphi\cos^4\varphi\,\partial\varphi=\tfrac{1}{6}\sin^3\varphi\cos^3\varphi+\tfrac{1}{8}\sin^3\varphi\cos\varphi-\tfrac{1}{16}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$+\tfrac{1}{16}\varphi.$$

Digitized by Google

$$\int_0^\varphi \sin^4\varphi\cos^2\varphi\partial\varphi = \tfrac{1}{6}\sin^5\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{24}\sin^3\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{16}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = \frac{E(\varphi,e)}{1-e^2} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi.e)}{e^2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}} = -\frac{E(\varphi,e)}{1-e^2} - \frac{e^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{(2-e^2)E(\varphi,e)}{e^4} + 2\frac{(1-e^2)F(\varphi,e)}{e^4} + \frac{(1-e^2)\sin\varphi\cos\varphi}{e^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{e^2},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^4\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}{3e^2} - \frac{2(1+e^2)E(\varphi,e)}{3e^4}$$
$$+\frac{(2+e^2)F(\varphi,e)}{3e^4},$$

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{(2-e^2)E(\varphi,e)}{3e^4} - \frac{2(1-e^2)F(\varphi,e)}{3e^4}$$
$$-\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}{3e^2};$$

wenn

$$E(\varphi,e) = \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,\quad F(\varphi,e) = \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Ferner ist

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi).$$

Differenzirt man diese Gleichung nach e, und theilt beiderseits durch $2e$, so ergiebt sich

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^2} = \frac{1}{2\sqrt{(1-e^2)^3}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi)$$
$$-\frac{1}{2(1-e^2)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{(1-e^2)^3}}\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1-e^2}.\operatorname{tg}\varphi)$$
$$-\frac{1}{2(1-e^2)}\cdot\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

Setzt man diese Werthe, so erhält man das fragliche Flächenstück.

Um den Quadranten zu erhalten, muss man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzen. Derselbe ist also:

$$ab\frac{\pi}{4}-\frac{a^3e^2}{b}\frac{\pi}{16}-2abe^2\frac{\pi}{16}+3abe^2\frac{\pi}{16}+\frac{a^3e^4}{b}\frac{\pi}{16}-\frac{a^3e^4}{b}\frac{\pi}{32}$$

$$+\frac{hb^3}{a^2}\left\{\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2}-\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right\}$$

$$-hbe^2\left\{\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2}-\frac{(2-e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{e^4}+\frac{2(1-e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{e^4}\right\}$$

$$+hb\left\{\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right\}$$

$$-2bhe^2\left\{\frac{(2-e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}-\frac{2(1-e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}\right\}$$

$$+bhe^2\left\{\frac{2(1+e^2)F(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}-\frac{2(1+e^2)E(\frac{\pi}{2},e)}{3e^4}\right\}+\frac{h^2b^3}{a^3}\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1-e^2)^3}}\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{32ab}(10a^2b^2-a^4-b^4)-\frac{a^2h}{b}E(\frac{\pi}{2},e)+2hbF(\frac{\pi}{2},e)+\frac{h^2\pi}{4}.$$

Mithin der ganze, von der fraglichen Kurve umschlossene Raum:

$$\frac{\pi}{8}\left(\frac{10a^2b^2-a^4-b^4}{ab}\right)-4\frac{a^2h}{b}E(\frac{\pi}{2},e)+8hbF(\frac{\pi}{2},e)+h^2\pi. \quad (7)$$

(Ueber die Herleitung obiger Ausdrücke sehe man u. A. Crelle's Journal. Bd. 31. S. 25 ff.)

§. 2.

Sei wieder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b$$

die Gleichung einer Ellipse, (x', y') ein Punkt derselben. Die Gleichung des Radius vector in diesem Punkte ist $y=\frac{y'}{x'}x$, und die Gleichung der auf seinem Endpunkte Senkrechten: $yy'+xx'=x'^2+y'^2$. Die Gleichung der Normale im Punkte (x', y') ist: $\frac{x'}{a^2}(y-y')=\frac{y'}{b^2}(x-x')$, die Gleichung der mit der Normale parallelen, durch den Mittelpunkt gehenden Geraden also $\frac{y'}{b^2}x=\frac{x'}{a^2}y$. Heissen nun x, y die Koordinaten des Punktes, in dem diese letztere Gerade die so eben erwähnte Senkrechte trifft, so ist

$$x=\frac{x'(x'^2+y'^2)}{a^2},\ y=\frac{y'(x'^2+y'^2)}{b^2}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun $x'=r'\cos\varphi'$, $y'=r'\sin\varphi'$, so dass

$$r'^2\left(\frac{\cos^2\varphi'}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi'}{b^2}\right)=1,$$

und eliminirt aus den drei letzten Gleichungen r', φ', so erhält man

$$(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^4x^2+b^4y^2)^2 \tag{8}$$

als Gleichung der durch alle jene Fusspunkte gehenden Kurve.

Man ziehe in einen Punkt (x', y') dieser Kurve (8) einen Radiusvector, und verlängere denselben um die Grösse h, so sind die Koordinaten seines Endpunktes

$$x=x'+\frac{hx'}{\sqrt{x'^2+y'^2}},\ y=y'+\frac{hy'}{\sqrt{x'^2+y^2}}.$$

Man suche nun die Gleichung der Kurve, die durch die Endpunkte aller so verlängerten Radien geht. Setzt man $x'=r\cos\varphi$, $y'=r\sin\varphi$, so hat man r, φ zu eliminiren aus

$$x=r\cos\varphi+h\cos\varphi=(r+h)\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi+h\sin\varphi=(r+h)\sin\varphi,$$

$$r^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3=(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2.$$

Hieraus folgt $(r+h)^2=x^2+y^2$, $r=\sqrt{x^2+y^2}-h$,

$$\cos^2\varphi=\frac{x^2}{(r+h)^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2},\ \sin^2\varphi=\frac{y^2}{(r+h)^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}.$$

Demnach erhält man als Gleichung der fraglichen neuen Kurve:

$$(\sqrt{x^2+y^2}-h)^2(a^2x^2+b^2y^2)^3=(a^4x^2+b^4y^2)^2(x^2+y^2), \tag{9}$$

welche Gleichung für $h=0$ in (8) übergeht.

Diese Kurve besteht aus vier kongruenten Theilen, so dass die Betrachtung eines Quadranten genügt. Man setze in (9) $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, so ist

$$(r-h)^2(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3=(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2,$$

$$r=h+\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den Flächeninhalt des Quadranten findet sich:

Digitized by Google

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \partial\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(h^2+2h\,\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}+\frac{(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}\right)\partial\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\left\{h^2\frac{\pi}{2}+2h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right.$$

$$\left.+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a^4\cos^2\varphi+b^4\sin^2\varphi)^2}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}\,\partial\varphi.\right\}$$

Setzt man $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$, so ist $a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi=a^2(1-e^2\sin^2\varphi)$. demnach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{a^3}\left\{\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right\},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{a^3(1-e^2)}-\frac{F(\frac{\pi}{2},e)-E(\frac{\pi}{2},e)}{a^3e^2}.$$

Ferner ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{ab}.$$

Differenzirt man diese Gleichung nach a und theilt alsdann durch $-2a$, so findet sich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2a^3b}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{a^3b}.$$

Differenzirt man abermals nach a und dividirt durch $-4a$, so ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^4\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{3}{a^5b}.$$

Durch ähnliche Verfahrungsweisen ergiebt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi)^3}=\frac{\pi}{16}\cdot\frac{1}{a^3b^3}.$$

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\partial\varphi}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)^3} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{3}{ab^5}.$$

Substituirt man diese Werthe, so ergiebt sich für den Quadranten:

$$\frac{1}{2}\left\{ h^2\frac{\pi}{2} + 2ha\left(\frac{F(\frac{\pi}{2},e) - E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right)\right.$$

$$+\frac{2hb^4}{a^3}\left(\frac{E(\frac{\pi}{2},e)}{1-e^2} - \frac{F(\frac{\pi}{2},e) - E(\frac{\pi}{2},e)}{e^2}\right)$$

$$\left. + \frac{\pi}{16}\frac{3a^3}{b} + \frac{2\pi}{16}ab + \frac{\pi}{16}\frac{3b^3}{a}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{32}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right]$$

$$+\frac{h(a^2+b^2)}{a}F(\frac{\pi}{2},e) - ah\,E(\frac{\pi}{2},e) + h^2\frac{\pi}{4}.$$

Die ganze, von der fraglichen Kurve umschlossene Fläche ist

$$\frac{\pi}{8}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right] + 4\frac{h(a^2+b^2)}{a}F(\frac{\pi}{2},e)$$

$$-4ah\,E(\frac{\pi}{2},e) + h^2\pi. \qquad (10)$$

Für $h=0$ erhält man hieraus

$$\frac{\pi}{8}\left[\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{ab}\right], \qquad (10')$$

als Werth des von der Kurve (8) umschlossenen Raumes.

Für $a=b$ geht die Kurve (9) in einen Kreis vom Halbmesser $a+h$ über.

X.

Ueber einige Sätze der höheren Arithmetik.

Von
Herrn Wilhelm Mösta,
Lehramts-Candidaten zu Cassel.

Es muss gewiss einem jeden Freunde der Zahlenlehre eine erfreuliche Erscheinung sein, wenn in neuerer Zeit immer mehr ein Band zwischen den vereinzelten Lehren der höhern Arithmetik und den übrigen Branchen der Mathematik geknüpft wird; umsomehr, da auf viele der hierher gehörigen Probleme ihrer Natur nach insbesondere von den Annäherungsmethoden der Analysis gar leicht Anwendung gemacht werden kann. In dieser Beziehung haben die Forschungen des Herrn Libri (Mémoires de l'Académie de sciences, savans étrangers, Tom. V.) Vortreffliches geleistet, indem durch sie die Lösung der Congruenzen von beliebigen Graden aus einem allgemeinen Princip hergeleitet, so wie die der vom 1. und 2. Grade durch Formeln gegeben werden, deren Werth sich in jedem besondern Falle durch Hülfe der Analysis ermitteln lässt. Hiernach schien es mir vielleicht der Mühe werth, die von Herrn Eisenstein (Crelle Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. 27. pag. 281.) aufgestellten Sätze, von denen meines Wissens noch keine Beweise gegeben sind, auf die obige Auflösungsmethode der Congruenzen zurückzuführen.

Ich schicke die folgenden bekannten Sätze voraus.

Ist n eine Primzahl, so sind sämmtliche Wurzeln der Gleichung

$$x^n - 1 = 0$$

gegeben durch:

$$\cos k\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin k\frac{2\pi}{n},$$

wo k alle Werthe $0, 1, 2, \ldots, n-1$ durchläuft.

Digitized by Google

Bildet man die Summe der m-Potenzen dieser Wurzeln, so wird dieselbe $=n$ oder $=0$, jenachdem m ein Vielfaches von n ist oder nicht; d. h. mit anderen Worten, es ist:

$$\frac{1}{n}\Big\{(\cos 0\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 0\frac{2\pi}{n})^m+(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n})^m+\ldots$$
$$+(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n})^m\Big\}$$
$$=1 \text{ oder } =0.$$

Diese Eigenschaft der Wurzeln obiger Gleichung hat nun Herr Libri zur Bestimmung der Wurzeln der Congruenz

$$\varphi(x,y,z\ldots)\equiv 0 \pmod n$$

benutzt.

Betrachtet man nämlich für

x die Werthe $1, 2, 3\ldots a$;
y „ „ $1, 2, 3\ldots b$;
z „ „ $1, 2, 3\ldots c$;

so hat man nach dem Vorhergehenden unmittelbar für die Summe der Wurzeln der vorgelegten Congruenz den Ausdruck:

$$\frac{1}{n}\Sigma(x,\ y,\ z\ldots.)\left\{\begin{aligned}&\cos 0\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 0\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}\\ &+(\cos\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}+\ldots\\ &+(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)}\end{aligned}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\Sigma(x,\ y,\ z\ldots.)(\cos\theta\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\theta\frac{2\pi}{n})^{\varphi(x,y,z\ldots.)},$$

wo sich das Summenzeichen über die für x, y, $z\ldots.$ aufgestellten Werthe und über die Werthe $\theta=0, 1, 2\ldots., n-1$ erstreckt.

Reducirt sich die vorgelegte Congruenz auf eine solche vom ersten Grade mit einer Unbekannten, deren allgemeine Form

$$ax+b\equiv 0 \pmod n,$$

so ist die Summe ihrer Wurzeln, wenn man noch berücksichtigt, dass es zur Auffindung aller Wurzeln der Congruenz genügt, für x die Werthe:

$$1,\ 2,\ 3\ldots.n$$

zu betrachten, und man die Potenzen der Sinus und Cosinus in vielfache Bögen verwandelt, gegeben durch

Digitized by Google

$$\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} .x\left\{\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}.$$

Nun ist aber:

$$\sum_{x=1}^{x=n} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}$$
$$=\frac{(n-1)\sin 2\theta(an+b-\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{n}+\sin 2\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{\pi}{n}}{2\sin\theta\frac{a\pi}{n}}$$
$$+\frac{\cos 2\theta\left(\frac{an+b-a}{n}\right)\pi-\cos 2\theta(b-a)\frac{\pi}{n}}{\left(2\sin\theta\frac{a\pi}{n}\right)^2}$$
$$=\frac{n\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{2\sin\theta\frac{a\pi}{n}};$$

daher ist die Summe der Wurzeln obiger Congruenz

$$=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{x=n}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1} x\cos\theta(ax+b)\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}$$
$$=\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=0}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}.$$

Sind a und n relative Primzahlen, so hat bekanntlich die Congruenz $ax+b\equiv 0 \pmod n$ nur eine positive Wurzel, kleiner als n, und man hat desshalb für diese den Ausdruck

$$\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=n-1}\frac{\sin\theta(b-\tfrac{1}{2}a)\frac{2\pi}{n}}{\sin\theta\frac{a\pi}{n}}.$$

Versteht man nun unter $G(\Omega)$ die nächst kleinere ganze Zahl als Ω, so wollen wir jetzt $G\left(\frac{M}{N}\right)$), wo M und N relative Primzahlen sind, zu bestimmen suchen.

Digitized by Google

Ist der bei der Division der Zahl M durch N bleibende Rest $=x$, so wird $G\left(\frac{M}{N}\right)$ sofort bekannt sein, wenn x bekannt ist. Zur Bestimmung des Werthes von x hat man aber nur die kleinste Auflösung der Congruenz

$$M-x\equiv 0 \pmod N$$

zu suchen. Diese ist aber nach der obigen Formel

$$\frac{N-1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\left(-\frac{\pi}{N}\right)}$$

$$=\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\frac{\pi}{N}},$$

oder, da

$$\frac{\sin\theta(M+\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}{\sin\theta\frac{\pi}{N}}=\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}+\cos\theta\frac{2M\pi}{N}$$

und

$$\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\cos\theta\frac{2M\pi}{N}=-1,$$

auch:

$$\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}. \tag{I}$$

Alsdann ergibt sich aber unmittelbar aus der Congruenz

$$M-x\equiv 0 \pmod N$$

(II)

$$G\left(\frac{M}{N}\right)=\frac{M-x}{N}=\frac{M}{N}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2N}\sum_{\theta=1}^{\theta=N-1}\sin\theta\frac{2M\pi}{N}\cot\theta\frac{\pi}{N}.$$

Die Formel I. stellt den kleinsten Rest von M für den Modulus N vor und I. und II. bilden die beiden ersten am angeführten Orte aufgestellten Sätze.

Ich füge noch folgende Bemerkung bei.

Sind M und N relative Primzahlen und überdies N eine ungerade Zahl, so genügt, die Summe zwischen den Grenzen $\theta=1$

Digitized by Google

und $\theta = \frac{N-1}{2}$ zu nehmen. Denn da sämmtliche Zahlen M, $2M$, $3M, \ldots, (N-1)M$ nach dem Modulus N ungleiche Reste lassen und

$$\frac{N+1}{2} \equiv -\frac{N-1}{2} (\mathrm{mod}\, N),$$

so bleibt das Product der beiden Functionen unter dem Summenzeichen durch Einführung der negativen Werthe von θ ungeändert, und man hat desshalb auch für den kleinsten Rest von M für den Mod. N den Ausdruck:

$$\frac{N}{2} - \sum_{\theta=1}^{\theta=\frac{N-1}{2}} \sin\theta \frac{2M\pi}{N} \cot\theta \frac{\pi}{N},$$

und damit auch

$$G\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{M}{N} - \frac{1}{2} + \frac{1}{N} \sum_{\theta=1}^{\theta=\frac{N-1}{2}} \sin\theta \frac{2M\pi}{N} \cot\theta \frac{\pi}{N}$$

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen:

$$\sum_{k=1}^{k=v} G\left(k\frac{M}{N}\right)$$

zu entwickeln, wobei wir wieder M und N als relative Primzahlen voraussetzen.

Zunächst ist klar, dass man für die kleinste Wurzel der Congruenz

$$v \cdot M - x \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, N), \text{ wo } v < N$$

nach dem Obigen erhält:

$$\frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N-1} \sin \frac{2vMk\pi}{N} \cot k\frac{\pi}{N}.$$

Setzt man für v nach einander die Werthe:

$$1, 2, 3 \ldots v;$$

so wird man durch Summation dieser verschiedenen Werthe die Summe der kleinsten Reste erhalten, welche durch Division der Zahlen M, $2M$, $3M \ldots vM$ durch N hervorgehen. Bezeichnen wir diese Summe durch S, so ist:

$$S = v \cdot \frac{N}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\sigma=1}^{\sigma=v} \sum_{k=1}^{k=N-1} \sin k\sigma \frac{2M\pi}{N} \cot k\frac{\pi}{N}.$$

Diese Reste sind sämmtlich von einander verschieden, und wenn $v = N-1$, so fallen selbige mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, N-1$, ohne

Rücksicht auf ihre Stellung, zusammen. Wenn wir desshalb die Zahlen M und N als relative Primzahlen und N zugleich als eine ungerade Zahl voraussetzen, so ist die Summe nur von $\sigma=1$ bis $\sigma=\frac{N-1}{2}$ zu nehmen, um die Summe aller von einander verschiedenen Reste zu erhalten, so dass

$$S=(N-1)\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\sigma=1}^{\sigma=\frac{N-1}{2}}\sum_{k=1}^{k=N-1}\sin k\sigma\frac{2M\pi}{N}\cot k\frac{\pi}{N}.$$

Die angezeigte Summation nach σ lässt sich jetzt nach dem Princip der doppelten Summation ausführen; denn es ist:

$$S=(N-1)\frac{N}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cot k\frac{\pi}{N}\left\{\frac{1}{2}\cot k\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos Mk\pi}{2\sin\frac{Mk\pi}{N}}\right\}.$$

Ist nun M eine gerade Zahl, so ist für alle Werthe von k, $\cos Mk\pi=1$, und wenn man noch bedenkt, dass allgemein

$$\operatorname{cosec} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\cot x,$$

so ergibt sich:

$$S=\frac{N-1}{2}\left(N+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cot k\frac{\pi}{N}\operatorname{tg}k\frac{M\pi}{2N}\right.$$

Hiernach ergibt sich aber unmittelbar

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}G\left(k\frac{M}{N}\right)-\frac{N+1}{2}\,\frac{N-1}{4}\,\frac{M}{N}-\frac{S}{N}$$

$$=\frac{N^2-1}{8}\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{4N}\sum_{k=1}^{k=N-1}\cos k\frac{\pi}{N}\operatorname{tg}k\frac{M\pi}{2N}.$$

Ist aber M eine ungerade Zahl, so zerlegen wir den Ausdruck unter dem Summenzeichen so, dass

$$\sum_{k=1}^{k=N-1}\cos k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\cot k\frac{2\pi}{N}\left\{\cot k\frac{2M\pi}{N}-\frac{\cos 2Mk\pi}{\sin k\frac{2M\pi}{N}}\right\}$$

$$+\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\left\{\cot(2k-1)\frac{M\pi}{N}-\frac{\cos(2k-1)M\pi}{\sin(2k-1)\frac{M\pi}{N}}\right\}.$$

Digitized by Google

Unter dieser Form erkennt man sofort, dass der Werth des Cosinus im ersten Gliede der rechten Seite für jeden Werth von k, $= +1$ wird, dagegen im zweiten Gliede $= -1$. Da nun allgemein

$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \cot x = \cot\frac{x}{2} - \cot x,$$

so ergibt sich nach einer einfachen Reduction:

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \cot k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N} - \frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg}\frac{Mk\pi}{N} + \sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N}.$$

Erwägen wir nun, dass

$$\cot(2k-1)\frac{\pi}{N} = -\cot\left(\frac{N-(2k-1)}{N}\right)\pi$$

und

$$\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N} = \operatorname{tg}\left(MN\frac{\pi}{2} - (2k-1)\frac{M\pi}{2N}\right) = \operatorname{tg}(N-(2k-1))\frac{M}{N}\frac{\pi}{2},$$

so sehen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot(2k-1)\frac{\pi}{N}\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N} = -\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N},$$

und damit:

$$\sum_{k=1}^{k=N-1} \cot k\frac{\pi}{N}\left\{\cot k\frac{M\pi}{N} - \frac{\cos Mk\pi}{\sin k\frac{M\pi}{N}}\right\}$$

$$= -2\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N},$$

so wie:

$$S = \frac{N-1}{2}N + \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\operatorname{tg} k\frac{M\pi}{N}.$$

Alsdann resultirt sogleich der 3. angeführten Orts aufgestellte Satz:

Digitized by Google

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} G\left(k\frac{M}{N}\right)=\frac{N^2-1}{8}\cdot\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}} \cot k\frac{2\pi}{N}\,\mathrm{tg}\,k\frac{M\pi}{N}$$

$$=\frac{N^2-1}{8}\cdot\frac{M}{N}-\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{k=\frac{N-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{M\pi}{N}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{N}} \qquad \text{(III)}$$

Von den vorhergehenden Formeln können wir jetzt Anwendung in der Lehre von den quadratischen Resten machen. Ist nämlich a eine beliebige Zahl, p eine Primzahl, so ist *), wenn wir uns des Legendreschen Zeichens bedienen,

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv(-1)^{\mu} \pmod p,$$

wo μ die Anzahl der Reste der Zahlen:

$$a,\ 2a,\ 3a \ldots \frac{p-1}{2}a,$$

nach dem modulus p, welcher $> \frac{1}{2}p$, bezeichnet.

Ob a quadratischer Rest oder Nichtrest ist, hängt bekanntlich nur davon ab, ob μ gerade oder ungerade ist, und unter dieser Voraussetzung kann man setzen:

$$\mu=G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{\left(\frac{p-1}{2}\right)a}{p}\right)=\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{a}{p}\right).$$

Die Zahlen a und p haben aber dieselben Eigenschaften wie die obigen M und N; und es ist desshalb:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{a}{p}\right)=\frac{p^2-1}{8}\cdot\frac{a}{p}-\frac{p-1}{4}-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}$$

$$=\frac{1}{2p}\left\{\frac{(a-2)p^2+(2p-a)}{4}-\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}\right\}=\mu.$$

Daher haben wir den merkwürdigen Ausdruck:

(IV.)

$$\left(\frac{a}{p}\right)\equiv(-1)^{T},\ \text{wo}\ T=\frac{1}{2p}\left\{(a-2)p^2+(2p-a)-\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\mathrm{tg}\,k\frac{a\pi}{p}}{\mathrm{tg}\,k\frac{2\pi}{p}}\right\}.$$

---

*) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Sect. IV.

Digitized by Google

Aus Formel III. können wir jetzt ohne grosse Mühe ein merkwürdiges Theorem herleiten, welches Herr **Eisenstein** in demselben Bande pag. 282. aufstellt.

Sind nämlich p und q zwei ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler, so haben wir

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)=\frac{(q-2)p^2+2p-q}{8p}-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}},$$

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{(p-2)q^2+2q-p}{8q}-\frac{1}{2q}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}};$$

und hieraus durch Addition

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{(q-2)p^2+2p-q}{8p}+\frac{(p-2)q^2+2q-p}{8q}$$

$$-\frac{1}{2p}\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}-\frac{1}{2q}\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}.$$

Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite der Gleichung lassen sich nun auf folgende Weise geben:

$$\frac{1}{8pq}\{2p^2q^2-2q^2p-2qp^2+2pq-q^2+2pq-p^2\}$$

$$=\frac{1}{8pq}\{2pq(p-1)(q-1)-(p-q)^2\}=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}-\frac{1}{8pq}(p-q)^2.$$

Daher ist:

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}-\frac{(p-q)^2}{8pq}$$

$$-\frac{1}{2pq}\left\{q\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}+p\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}\right\}.$$

Es ist aber hinlänglich bekannt, dass Summationen von der Form

$$\Sigma G\left(k\frac{q}{p}\right)$$

zuerst von **Gauss** zum Beweise des Reciprocitätsgesetzes für die

Digitized by Google

quadratischen Reste benutzt worden sind und dass seine Untersuchungen auf einem von dem obigen ganz verschiedenen Wege ergeben haben *):

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}} G\left(k\frac{q}{p}\right)+\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}} G\left(h\frac{p}{q}\right)=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

Führen wir diesen Werth in unsere letzte Formel ein, so ergibt sich:

$$q\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\frac{\operatorname{tg} k\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg} k\frac{2\pi}{p}}+p\sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}}\frac{\operatorname{tg} h\frac{p\pi}{q}}{\operatorname{tg} h\frac{2\pi}{q}}=-\tfrac{1}{4}(p-q)^2.$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{p}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{2q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{4\pi}{p}}+\frac{\operatorname{tg}\frac{3q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{6\pi}{p}}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p-1)\frac{q\pi}{p}}{\operatorname{tg}\frac{(p-1)\pi}{p}}$$

durch $F(q,p)$, so lässt sich diese sonderbare Eigenschaft der Function $F(q,p)$ mit zwei Variabeln, wo q und p irgend zwei ungerade Zahlen ohne gemeinschaftlichen Theiler bedeuten, auch kurz geben durch:

$$qF(q,p)+pF(p,q)=-\tfrac{1}{4}(p-q)^2.$$

XI.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Setzt man

$$\frac{(1-ax)(1-abx)(1-ab^2x)\ldots\text{ in inf.}}{(1-cx)(1-cbx)(1-cb^2x)\ldots\text{ in inf.}}=\varphi(x).$$

*) Ebendaselbst.

Digitized by Google

so ist

$$\varphi^{(r)}(0) = 1.2 \ldots. r \frac{(c-a)(c-ab)(c-ab^2)\ldots.(c-ab^{r-1})}{(1-b)(1-b^2)(1-b^3)\ldots.(1-b^r)}.$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{12^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{12^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{12^4} - \ldots.\right]$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{7}\left[1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{49} + \frac{1}{5}\left(\frac{3}{49}\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{3}{49}\right)^3 + \frac{1}{9}\left(\frac{3}{49}\right)^4 - \ldots.\right].$$

Man denke sich auf einer Ebene eine Senkrechte errichtet; um den Fusspunkt derselben als Mittelpunkt ziehe man in der Ebene eine Ellipse, deren Halbaxen a, b seien. Man nehme nun eine gerade Linie und in ihr zwei feste Endpunkte, deren Entfernung c sei (d. h. konstant ist); den einen Endpunkt lasse man auf der Ellipse sich bewegen, während der andere immer auf der Senkrechten bleibt: so ist die Gleichung der durch diese Bewegung erzeugten Oberfläche:

$$4(b^2x^2 + a^2y^2)[b^2(c^2-a^2)x^2 + a^2(c^2-b^2)y^2]^2$$
$$= a^2b^2[\{b^2(c^2-a^2)x^2 + a^2(c^2-b^2)y^2\}\{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\} - z^2(b^2x^2 + a^2y^2)]^2.$$

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x + \ldots. \text{ in inf.}$$

für $x > 0$ und $< \pi$.

Wenn man in allen Punkten einer Parabel Tangenten zieht und vom Brennpunkte auf eine jede eine Senkrechte fällt, so trifft eine jede dieser Senkrechten die zu ihr gehörige Tangente in einem Punkte, der in einer geraden Linie liegt, welche die Parabel an ihrer Spitze berührt.

Wenn man in dem Dreieck ABC in der Seite AC einen Punkt D annimmt, so dass $AD = \frac{1}{\alpha}AC$, und in BC einen Punkt E, so dass $BE = \frac{BC}{\alpha}$, ferner die Linien AE, BD zieht, so schneiden sich diese letztern rechtwinklich, wenn

$$AC^2 + BC^2 = (2\alpha^2 - 2\alpha + 1)AB^2.$$

Digitized by Google

Legt man durch einen senkrechten Zylinder mit kreisförmiger Basis eine Ebene schief gegen diese, so ist der Durchschnitt eine Ellipse. Soll nun diese Ellipse die Fläche p umschliessen, so hat man die genannte schiefe Ebene so zu legen:

Man ziehe in der Basis einen Durchmesser; an seinem einen Endpunkte errichte man eine Senkrechte auf die Basis, deren Länge $=\frac{2}{r\pi}\sqrt{p^2-r^4\pi^2}$, wenn r der Halbmesser der Basis ist. Den Endpunkt dieser Senkrechten verbinde man mit dem andern Endpunkte des Durchmessers, durch den man, in der Basis, eine Senkrechte auf den Durchmesser zieht. Legt man nun durch diese letztere Senkrechte und durch die so eben gezogene Linie (nach dem Endpunkte der ersten Senkrechten) eine Ebene, so schneidet diese den Zylinder in der verlangten Ellipse.

Es ist immer $\int_0^a \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$ unendlich gross, wenn $f(x)$ eine ganze Funktion von x ist.

Es ist $\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\partial z}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin((1-a)\frac{\pi}{3})}{\sin a\pi}$ für $a>0$ und <2.

Für $a=1$ folgt daraus $\int_0^\infty \frac{\partial z}{1+z+z^2}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, wie bekannt.

Ueber die Summe $\sum_{v=1}^{v=m}\sum_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r$.

Setzt man in

$$(ax+by)^r=a^rx^r+ra^{r-1}x^{r-1}by+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}x^{r-2}b^2y^2+\ldots..$$

für y die Werthe $x_1, x_2, \ldots. x_m$, so ergiebt sich durch Summirung:

$$\sum_{w=1}^{w=m}(ax+bx_w)^r=ma^rx^r+ra^{r-1}bx^{r-1}S_1+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2x^{r-2}S_2 + \ldots. + b^rS_r,$$

wenn man, wie gewöhnlich,

$$x_1^s+x_2^s+x_3^s+\ldots.+x_m^s=S_s$$

setzt.

Setzt man hierin abermals $x=x_1, x_2, \ldots. x_m$ und summirt, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$\sum_{v=1}^{v=m}\sum_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r = ma^rS_r + ra^{r-1}bS_1S_{r-1}$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2S_2S_{r-2}+\ldots.+rab^{r-1}S_1S_{r-1}+mb^rS_r.$$

Nimmt man die Summe im ersten Gliede so, dass man den Fall immer ausschliesst, in dem $v=w$ wird, so findet sich:

$$\sum_{v=1}^{v=m}\sum_{w=1}^{w=m}(ax_v+bx_w)^r=ma^rS_r+ra^{r-1}bS_1S_{r-1}$$

$$+\frac{r(r-1)}{1.2}a^{r-2}b^2S_2S_{r-2}+\ldots.+\frac{r(r-1)}{1.2}a^2b^{r-2}S_2S_{r-2}$$

$$+r\,a^rb^{r-1}S_1S_{r-1}+mb^rS_r-(a+b)^rS_r.$$

Aus dieser Gleichung folgt für $a=b=1$:

$$(x_1+x_2)^r+(x_1+x_3)^r+\ldots.+(x_1+x_m)^r+(x_2+x_3)^r+\ldots.+(x_2+x_m)^r$$

$$+(x_3+x_4)^r+\ldots..=(m-2^{r-1})S_r+rS_1S_{r-1}+\frac{r(r-1)}{1.2}S_2S_{r-2}+\ldots.$$

Der zweite Theil hört auf mit $\frac{1}{2}.\frac{r(r-1)\ldots..\left(\frac{r}{2}+1\right)}{1.2\ldots.\frac{r}{2}}(S_{\frac{r}{2}})^2$ oder $\frac{r(r-1)\ldots...\left(\frac{r+3}{2}\right)}{1.2\ldots.\left(\frac{r-1}{2}\right)}S_{\frac{r-1}{2}}S_{\frac{r+1}{2}}$, jenachdem r gerade oder ungerade ist.

Einen ähnlichen Satz leitet man ab für $a=-b=1$.

Bekanntlich kann man S_1, $S_2,\ldots.S_r$ durch die Koeffizienten der Gleichung

$$x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\ldots.+a_m=0,$$

wenn ihre Wurzeln x_1, $x_2,\ldots.,x_m$ sind, ausdrücken, vermittelst der Formeln:

$$S_1+a_1=0,$$
$$S_2+a_1S_1+2a_2=0,$$
$$S_3+a_1S_2+a_2S_1+3a_3=0,$$
$$\vdots$$
$$S_r+a_1S_{r-1}+a_2S_{r-2}+\ldots.+ra_r=0.$$

Ist $r>m$, so ist a_r und überhaupt alle Koeffizienten a_v, für die $v>m$, gleich Null zu setzen, und es wird die letzte der obigen Gleichungen:

Digitized by Google

$$S_r + a_1 S_{r-1} + a_2 S_{r-2} + \ldots + a_m S_{r-m} = 0.$$

Da die Gleichung

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0$$

auf

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m) = 0$$

hinausläuft, so sind also $a_1, \ldots a_m$ bekannt, mithin auch $S_1, \ldots S_r$, und somit kann die obige Doppelsumme berechnet werden.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Lässt sich auf elementarem Wege die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{1} m_1 - \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{3} m_3 - \ldots \pm \frac{1}{m} m_m,$$

worin m_1, $m_2, \ldots$ wie gewöhnlich die Binomialkoeffizienten bedeuten, nachweisen?

Eine der interessantesten Curven höherer Grade ist diejenige, welche durch die Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{y}\right)^2 = 1$$

charakterisirt wird. Sie besteht aus vier Zweigen und kann unter Umständen ganz in einem endlichen Raume enthalten sein. Die Fläche eines Quadranten von ihr ist

$$\frac{ab\pi}{4}\left(1 - \frac{2\alpha}{a} - \frac{2\beta}{b}\right), \text{ für } \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} < \frac{1}{2}$$

und Null im Gegenfalle. Man wünscht eine Diskussion jener Gleichung und Begründung der angeführten Quadratur.

Eine Curve sei auf rechtwinkliche Coordinaten bezogen *), $OM = x$, $MP = y$; im Punkte P sei an dieselbe eine Tangente

---

*) Die entsprechende Figur wird man sich sehr leicht selbst entwerfen können.

ST gelegt, welche die Abscissenachse in *S* schneiden möge. Zwischen den beiden Winkeln $MOP=\omega$ und $MSP=\sigma$ wird nun immer eine gewisse Relation statt finden, die für jede Curve eine besondere ist; kennt man aber umgekehrt diese Relation, so muss sich daraus die Gleichung der Curve bestimmen lassen; man soll nun eine allgemeine Methode angeben, mittelst deren aus der Gleihung

$$\sigma=f(\omega)$$

jederzeit die unbekannte Gleichung der Curve abgeleitet werden kann. Für $f(\omega)=\frac{1}{2}\omega$ findet man z. B.

$$y^2-2ry=x^2,$$

wobei r eine willkührliche Constante bezeichnet, als Gleichung der Curve, und die letztere ist demnach ein Kreis, wie sich vorher sehen liess.

XII.

Miscellen.

Steinheil's Passagen-Prisma.

(Aus C. L. v. Littrow's Kalender für alle Stände 1847.)

Plössl hat dem Passagen-Prisma die hier mit den halben Dimensionen der Wirklichkeit ersichtliche Gestalt gegeben. (Siehe Taf. II. Fig. 6.)

Das Prisma *a* liegt mit seinen Kanten für mittlere Breiten nahezu der Weltaxe parallel, und dessen Reflexionsfläche steht im Meridiane oder demjenigen Vertikalkreise, in welchem man zu beobachten beabsichtigt. Das drei- bis viermal vergrössernde Fernrohr *b* bewegt sich mittelst des Bügels *c* in der Reflexionsebene des Prisma auf und ab. Zugleich ist diese Reflexionsebene parallel zur Säule *d*, welche wieder senkrecht auf der oberen Fläche des Gestelles *e* befestigt wird, so dass das Horizontalstellen dieser Fläche *e* sofort auch dem Prisma die richtige Lage in einer Richtung ertheilt; zu diesem Behufe ist das eine der beiden Füsschen *f* auf der Ocularseite des Instrumentes zum Höher- und Niederschrauben eingerichtet. In der anderen, auf jene erste perpendikulären Richtung wird das Instrument zuerst durch Verschieben auf den Füsschen *f* rectificirt, und, wenn auf diese Art die gewünschte Lage bereits beiläufig hergestellt ist, werden diese Füsschen in das dazu bestimmte Piedestal unveränderlich eingelassen oder sonst fixirt, und die nun noch nöthige Correction mittelst der Schräubchen *g*, die einander entgegen wirken, bewerkstelligt. Die Bilder sind bei der Vollkommenheit, durch welche sich alle Arbeiten des Herrn Plössl auszeichnen, ausserordentlich rein, und ihre Berührung mit grosser Sicherheit zu beobachten. Der Preis des Instrumentchens ist der des Dipleidoskopes: 25 fl. C. M.

Digitized by Google

XIII.

Ueber das Elektron der Alten und die praktische Bedeutung alterthümlicher Naturwissenschaft, namentlich der symbolischen Hieroglyphe, für die neuere Zeit.

Von

Herrn Professor Dr. J. S. C. Schweigger

an der Universität zu Halle.

Fortsetzung von Band IX. S. 121—148.

III. Ueber die praktische Bedeutung des bisher Dargelegten.

Wer das Mitgetheilte mit Aufmerksamkeit gelesen hat, sieht sogleich, dass es sich wirklich hier nicht blos handelte vom Elektron der Alten. Das Dargelegte ist vielmehr ganz geeignet mit Beziehung auf die Mysterien und die damit zusammenhängende Kunst und Poesie des Alterthums, zu deren Musterbildern fortwährend unsere Schulen aufblicken, neue Gesichtspunkte darzubieten, welche sehr verschieden sind von den bisher allein geltend gewordenen Ansichten. Denn wir sahen (Note 19), dass wenigstens einige Mysterien (worüber bei den samothracischen nur eine Stimme im Alterthum) offenbar von naturwissenschaftlicher Bedeutung waren und mit symbolischen Hieroglyphen vorhistorischer Zeit (Anm. zu II. 3. und Note 23) zusammenhingen. Diese symbolischen Hieroglyphen (analog der geometrischen Zeichensprache) bieten durch ihren streng wissenschaftlichen Charakter einen Faden der Ariadne dar, welcher mit Sicherheit leitet durch das mysteriöse Fabellabyrinth. Dagegen, wenn man bisher bei allen alterthümlichen Studien allein sich verliess auf die schriftlichen Ueberlieferungen, und sogar, im Sinne der grammatischen Exegese, wörtlich auffassen zu müssen glaubte, was räthselhaft (einem Ausdrucke Strabo's gemäss) gesprochen war: so mussten wir im Gegentheil uns überzeugen (Note 3. 6. 12. 23 und 24), dass diese schriftlichen Ueberlieferungen in allen mysteriösen Din-

Digitized by Google

gen (denen, wie allgemein zugegeben wird, die alterthümliche Kunst und Poesie sich anschloss) gar keine Erkenntnissquelle sind. Was von dem in den Mysterienkreis hineingezogenen Elektron und von der zur Verschleierung der Art seines Vorkommens ihm angereihten Fabelmasse gesagt wurde, das vermehrte blos die Beweise für diesen Satz, der schon früher durch eine Reihe von Thatsachen nachgewiesen war in meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen, welche umständlich handelt vom Verhältnisse naturwissenschaftlicher Mysterien zur Litteratur des Alterthumes. Je durchgreifender aber die Bedeutung ist jener bisher zu wenig beachteten alterthümlichen, von den Mysterien ausgegangenen Beschränkung der Schriftsprache, desto mehr ist es auffallend, dass bisher keine einzige unserer Litteraturzeitungen, überhaupt keine Zeitschrift, so gross ihre Zahl, sich eingelassen auf Prüfung der Sache. Daher mag es nun gut sein, einige Worte von dem fortdauernden Einflusse zu sprechen, welchen jene Mysterien des Alterthums mit ihrer Hieroglyphensprache (ich meine nicht die phonetische, welcher allein man gewohnt ist Aufmerksamkeit zu schenken) noch auf die neuere und neueste Zeit haben. Und dazu fordert mich der Charakter der vorliegenden, die höhern Lehranstalten und namentlich die Bedürfnisse der gelehrten philologischen Schulen unsers Vaterlandes zunächst ins Auge fassenden mathematisch physikalischen Zeitschrift noch ganz besonders auf.

1. Nur einen Blick darf man werfen auf die Geschichte der Mathematik, um sich zu überzeugen, dass Plato und seine Schule auch in mathematischer Beziehung einen bedeutenden Ruf habe, und zwar durch Lehren, wovon nichts vorkommt in den Platonischen Schriften, welche vielmehr zu denen gehörten, worüber er, nach seiner ausdrücklichen Erklärung, nie schreiben wollte, eben weil sie akroamatisch (nach dem Ausdrucke der Mysterien), d. h. nur zur mündlichen Fortpflanzung bestimmt waren; und worauf sich also offenbar Plato's so viel besprochene *ἄγραφα δόγματα* bezogen, deren Aristoteles in seiner Physik erwähnt, und zwar da, wo er vom Raum redet. Eben mit solchen akroamatischen Lehren hing diese ganze Physik des Aristoteles zusammen, von welcher er selbst sagt, dass sie eine herausgegebene und zugleich nicht herausgegebene, in absichtliches Dunkel gehüllte, nur seinen Zuhörern verständliche Schrift sei. Und da auch die Metaphysik des Aristoteles (der Physik sich anschliessend) einen ähnlichen Charakter hat: so muss es mit Wehmuth erfüllen, zu sehen, wie eine neuere Philosophie die Aristotelische dunkle Schreibart nachahmt, zu welcher der griechische Philosoph, weil er lediglich für Mysterienkundige auf eine nur andeutende Weise schreiben wollte und durfte, genöthigt war durch den Druck der Zeit. — Man sieht nun schon, dass die Sache bedeutsam wird gerade für unsere in mehr als einer Beziehung durch einen zweideutigen Charakter sich auszeichnende Zeitperiode. Und daran reihte sich in jener Denkschrift folgende, zunächst für eine naturwissenschaftliche Zeitschrift geeignete Betrachtung: „Im Alterthume trat jener mysteriösen Schreibart über physikalische Dinge, deren die ganze Pythagoreische Schule und deren auch Plato und Aristoteles sich bedienten, die den Mysterien verhasste

Digitized by Google

Epikureische Schule entgegen mit ihrem atomistischen System, in der Absicht, die bedeutendsten in die Mysterien übergegangenen Naturwahrheiten mit den alltäglichsten Dingen zu vermengen und sie durch eine plumpe mechanische Auffassungsweise zu profaniren. Unverkennbar ist z. B. das Bestreben des Lucrez, den selbst in ägyptischen Tempeln (man lese Claudian's Idylle auf den Magnet) eine so bedeutende Rolle spielenden Magnet herabzuziehen und seine wundervollen Wirkungen, deren Bedeutsamkeit er gar wohl fühlte (wie seine schönen auf die Samothracischen eisernen Ringe sich beziehenden Verse beweisen), anzureihen an die trivialsten Dinge. Ja, sein Hass gegen die Tyrannei der Mysterien ging so weit, dass er ihn, durch leidenschaftliche Verblendung verleitet, selbst auf die damit zusammenhängende Astronomie übertrug, und im Gegensatze der chaldäischen Lehren lieber aus atomistischen Feuertheilchen täglich eine neue Sonne und einen neuen Mond an verschiedenen Stellen des Himmels wollte zusammenfliessen lassen. — Auf diesem, die alten Mysterien bekämpfenden Standpunkte verdient Entschuldigung wenigstens die arge Geistlosigkeit des atomistischen Systems. Was soll man aber dazu sagen, wenn neuere naturwissenschaftliche Schulen, wenn namentlich unsere wunderlichen Chemiker damit sogar vornehm thun?"

Dergleichen Dinge aber will man nicht gern zur Sprache kommen lassen, weil daran, mit Beziehung auf neuere Chemie, noch ein viel schärferer Tadel der Impietät [25]) gegen den Begründer

---

[25]) Diese geht so weit, dass man selbst die Geschichte zu entstellen versucht. Einem Ausländer allein, wie Dumas (der übrigens als ein geistreicher Mann das atomistische System verhöhnt) kann es zur Entschuldigung gereichen, wenn er irregeleitet in seiner vortrefflichen Philosophie der Chemie, S. 181. und 182., in der Art sich über Richter ausdrückt: „Richter, ein Chemiker zu Berlin, warf dadurch, dass er ausgemachte Facta mit zahlreichen theoretischen Irrthümern vermischte, viel Dunkel auf die Fragen, welche Wenzel aufzuklären begonnen hatte. Man kann das Hauptresultat seiner Untersuchungen in wenig Worte zusammenfassen: es ist dasselbe, zu dem Wenzel gelangt war." — So lange Wenzel und Richter lebten, ist es keinem Menschen eingefallen zu behaupten, dass ersterer nur eine Ahnung der Richterschen stöchiometrischen Gesetze gehabt habe; am wenigsten wäre solches dem ehrlichen und gewissenhaften Wenzel selbst eingefallen. Was darüber zu sagen zur Rechtfertigung Richter's, hat schon Hess auf eine der Wahrheit getreue Weise ausgesprochen in einer ganz zweckmässig (mit Beziehung auf die angeführte Philosophie der Chemie von Dumas) französisch geschriebenen Abhandlung: Sur les travaux de Jérémie Benjamin Richter par G. H. Hess, discours prononcé à la séance publique de l'Academie des Sciences de St. Petersbourg le 30. Dec. 1840, woraus, während es sich um Ehrenrettung eines Mannes wie Richter handelte, doch nur in einer einzigen deutschen Zeitschrift, im Journ. f. prakt. Chem. 1841. vol. 24. p. 420—438, ein Auszug mitgetheilt ist, der nicht einmal berücksichtigt wurde von neuerdings bei uns erschienenen Lehrbüchern der Geschichte der Chemie und Stöchiometrie, worin die von Hess widerlegten Unwahrheiten wiederholt sind. Aber noch vieles ist zur Ehre Richter's dem beizufügen, was Hess auf eine höchst achtbare Weise ausgesprochen hat. Die verborgenen und, wie schon Wollaston hervorhob, mit den älteren chemischen Analysen unvereinbaren und daher von niemanden auch nur geahneten Wahrheiten, welche dieser bedeu-

Digitized by Google

der Stöchiometrie, gegen den eben so gewissenhaften Experimentator als wahren Naturphilosophen, gegen Richter sich anschliesst, welcher, während die Pythagoreer (wie es scheint vorhistorischer Ueberlieferung gemäss) blos in dunkeln Ausdrücken von der Correspondenz der Körper- und Zahlen-Welt sprachen, eine solche Correspondenz wirklich streng nachgewiesen; dabei auch schon Reihen aufzufinden bemüht (wie man sie immer voraussetzen muss, wo von Naturzahlen die Rede ist) ohne bei seiner streng mathematischen Behandlung der Sache jenes atomistischen Systems zu bedürfen, welches, wie gesagt, im Alterthume zu entschuldigen, in neuerer Zeit aber blos eine Erfindung der Eitelkeit war (siehe Journ. f. Ch. u. Phys. B. 52. S. 69. Note).

2. Aber noch einflussreichere Dinge auf Leben und Wissenschaft boten sich dar bei Gelegenheit meiner ersten kurzen Mittheilungen über Elektron im Journal für praktische Chemie. Buttmann nämlich in seiner auf den Bernstein sich beziehenden gelehrten Abhandlung (im zweiten Theile seines Mythologus) sagt, um die Sonderbarkeit zu erklären, wie eine Metallmischung aus Gold und Silber im Alterthume denselben Namen erhalten konnte, welchen man dem Bernstein gab, ganz im Sinne des vorhin besprochenen grammatisch exegetischen Princips: „Der Bernstein und das ihm ähnlich glänzende Metall können, so widersinnig uns auch das klingen mag, für einerlei gegolten haben. Nämlich in jener Zeit einfacher Erfahrungskenntnisse konnten Dinge für einerlei gelten, die in gewissen, für die Sinne und den Gebrauch wesentlicheren Eigenschaften übereinkamen, während sie in andern, die dann für Nebenumstände galten, sehr verschieden sind.“ Wie weit Buttmann mit Beziehung auf die hier bezeichneten „Nebenumstände“ geht, zeigt die dem vorigen Abschnitte vorliegender Abhandlung angereihte Note 21. — Er wundert sich selbst darüber, dass ein, was er mit Recht hervorhebt, „sehr sachkundiger Mann“, wie Pausanias (dessen ganz klare Stelle über Elektron er missdeutet), habe festhalten können an Annahmen, die er als „uns widersinnig klingende“ bezeichnet. Wäre es möglich, dass ein Buttmann in einer wirk-

---

tende Arcanist an der Berliner Porzellanfabrik (was er in andrer Beziehung selbst für die Akademie der Hauptstadt war, worin er lebte) ausgesprochen, wurden ignorirt fast während seiner ganzen Lebensperiode. Um so grösser ist die Impietät, wenn sein hohes Verdienst verkannt, oder auf eine ungerechte Weise geschmälert wird sogar nach seinem Tode. Vielmehr sollte selbst das, was der einsam Stehende wohl geahnet und begonnen, aber unvollendet gelassen, gehörig gewürdigt werden. Und dazu gehört namentlich der Zusammenhang der Chemie mit kosmischen Beziehungen, indem Richter die Reihe des Abstandes der Planeten von der Sonne als einen Ausdruck der Wahlanziehung auffasste, eben darum ähnliche Reihengesetze der Wahlanziehung unter irdischen Körpern aufzufinden, und dadurch selbst neue Forschungen in gewissen Kreisen herbeizuführen bemüht. Namentlich in unsern Tagen, wo jenes Reihengesetz unter den Planeten (das uns allerdings an die in chemischen Zahlenreihen so oft vorkommenden Multipla mit zwei erinnert) uns über den Uranus hinausgeführt hat, geziemt es sich, solches zu erwähnen, was ganz in Vergessenheit gekommen, aber schon als eine der geistreichsten Ideen bezeichnet wurde im Journ. d. Chem. u. Phys. 1823. B. 39. S. 232. Anm.

Digitized by Google

lich mit grosser Sorgfalt und Gelehrsamkeit geschriebenen Abhandlung uns solche Dinge sagen könnte, wenn nicht diese Befreundung mit dem Widersinnigen einigermassen wenigstens der Tendenz entspräche einer gewissen Art philologischer Vorbildung? Denn ganz speciell gab die gewöhnliche Ansicht der Mythologie Veranlassung, dass man die edelsten Geister des Alterthums befangen glaubte in lauter Unsinn, und gerade diese Befangenheit als den Charakter bezeichnete der naiven Naturanschauung jener als Vorbild für alle Zeiten geltenden alten Poesie. So z. B. enthalten die so zahlreichen Stellen der Dichter von den Dioskuren nach der gewöhnlichen (keine Notiz von ihrem Zusammenhange mit symbolischen Hieroglyphen nehmenden) Auffassungsweise derselben, nichts als Widersinnigkeiten, welche man dennoch lange genug als klassische bewundert und zur Einimpfung einer ähnlichen klassischen Bildung benutzt. Solches ist durch eine Reihe von Beispielen nachgewiesen in einem ganzen Capitel meiner Einleitung in die Mythologie auf dem Standpunkte der Naturwissenschaft S. 286—326, und dergleichen Beispiele kann ich leicht um das Zehnfache vermehren, um darzuthun, welche Widersinnigkeiten entstehn, wenn sich die Philologie von der Naturwissenschaft trennt. Selbst die vorhergehende Abhandlung über das Elektron der Alten vermehrt die Beweise dafür. Und doch ist leider diese Abtrennung der Philologie von der Naturwissenschaft neuerdings zur allgemeinen Sitte geworden. — Wirklich aber war bei der speciell in einzelnen Zeitperioden sich geltend machenden gelehrten Bildung die vorherrschend werdende Kälte und Abneigung gegen Naturwissenschaft stets das charakteristische Merkmal obscurantischer Zeiten. Anerkannt auch giebt es eine Auffassungsweise der Mythologie, welche mit dem Obscurantismus Hand in Hand geht (das Heidenthum christianisirend und das Christenthum ethnisirend), und welcher eben darum eine rationalistische, d. h. wissenschaftliche, an streng physikalische Hieroglyphen sich anschliessende Betrachtungsweise der Mythologie besonders verhasst sein muss.

Zeitgemäss würde es daher sein, wenn nun endlich einmal zunächst wenigstens die Physiker und dann auch die Philologen mit der alten symbolischen (d. h. streng physikalischen) Hieroglyphe sich befreunden möchten, nachdem man zwanzig Jahre lang die Sache (welche man mit Gründen hätte bekämpfen müssen, wenn sie gefährlich schien für den Ruhm der neuern Zeit) nicht einmal zur Prüfung gelangen lassen wollte. Nur das Studium der phonetischen Hieroglyphe schien Aufmerksamkeit, Unterstützung, Förderung zu verdienen, obwohl diese phonetische Hieroglyphe, ihrer Natur nach, ungeeignet ist zur Darlegung eines wissenschaftlichen Satzes, dergleichen man auch darin noch nicht aufgefunden hat. Vielmehr liegt offenbar etwas erkünsteltes in einer Hieroglyphe, welcher eine Wortsprache zur Grundlage dient, und deren Kunst allein in schwerfälliger Bezeichnung von Buchstaben besteht. Dagegen konnten wir in einer lediglich auf die Bedeutung des Wortes electrum sich beziehenden Abhandlung selbst philologisch eine symbolische Hieroglyphe benutzen. Denn der auf dem gewöhnlichen Standpunkte der Philologie ganz widersinnig scheinende Satz: electrum appellatum quoniam Sol voca-

Digitized by Google

tus sit **elector** (welchen Plinius recht absichtlich hervorhebt mit Beziehung auf eine Reihe namhaft gemachter und als die vorzüglichsten bezeichneten Dichter des Alterthums), dieser Satz konnte in seiner naturwissenschaftlichen Bedeutsamkeit verständlich gemacht werden durch eine alte sinnvolle symbolische Hieroglyphe, in deren Geist jene Dichter sich ausdrückten (II. 6. und 3. Anm.). So weit aber ging in den philologischen Schulen die Befreundung mit jenem Widersinnigen, wovon **Buttmann** redet, und welchem allerdings die phonetische Hieroglyphe sich nahe genug anschliesst, dass man geradezu die Hingebung an das Traditionelle und die kindlich gläubige Nacherzählung alter sinnloser Fabeln als den Charakter der phantasiereichsten, erhabensten Poesie bezeichnete. Diese Ansicht empfahl sich durch ihre Popularität und konnte daher leicht allgemeinen Beifall finden. Ja, sie fand ihn in so hohem Grade, dass sie wesentlich mit beitrug zur Herbeiführung der Wirren unserer Zeit. — Denn nur allzu willkommen ist es der Eitelkeit, geistreich und poetisch sich anzustellen bei dem Aussprechen von Unsinn, womit man vornehmthuend sich dem classischen Alterthum anzuschliessen glaubt. Aus dem in vorhergehender Abhandlung über Elektron Dargelegten geht aber vielmehr hervor, dass die alterthümlichen Schriftsteller mit der Tyrannei der Mysterien zu kämpfen hatten, welche (wie wir solches noch heut zu Tage bei der Astronomie der Brahminen Indiens vor Augen haben) die bedeutendsten Dinge blos akroamatisch, d. h. mündlich den Eingeweihten mittheilten mit Ausschluss der Schriftsprache, damit sie ja nicht volksthümlich werden möchten [26]). Schon darin also musste eine Quelle der Begeisterung liegen, in der Poesie ein Mittel zu haben, im Sinne symbolischer Hieroglyphen schreiben und die Wahrheit bei Erzählung einer Fabel durchblicken lassen zu können. Nicht gläubige Nachbeter alter heiliger Sagen waren daher die vorzüglichsten Dichter des Alterthums; sie waren vielmehr, gleich dem seiner ganzen Natur nach poetischen **Plato**, welchem aber selbst die Kirchenväter christliche Denkweise zuschreiben, **geistreiche Protestanten gegen das Heidenthum**. Darüber wäre sehr viel zu sagen, besonders um den speciellen, höchst beachtungswerthen Grund zu erläutern, warum den Samothracischen naturwissenschaftlichen Mysterien sich die vorzüglichsten alten Dichter angeschlossen, was mich jedoch hier viel zu weit führen würde (vergl. **Note** 28).

3. Man sieht nun aber, dass der Kampf gegen die heidnischen Mysterien (worin ein herrlicher Ruhm des Christenthums liegt, den allein Naturforscher gehörig zu würdigen vermögen) in der That noch nicht beendigt ist, indem diese Mysterien noch jetzt eben dadurch, dass ihr Fabelwesen die nun vorherrschende Ansicht der alterthümlichen Poesie und Kunst herbeigeführt, von grösserem Einflusse sind auf die neuere Zeit als man gewöhnlich

---

[26]) Man denke an den entsetzlichen Ausdruck obscurantischer Geistesdespotie, welcher selbst in dem kleinen durch Herausgabe der Physik des Aristoteles veranlassten Brief eines **Alexander** liegt, wovon die Rede war in der **Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen.** S. 14. 15. 46.

Digitized by Google

sich vorstellt. Eine andere und bessere Ansicht der Kunst und Poesie des Alterthums kann wirklich nur durch die symbolische, d. h. naturwissenschaftliche Hieroglyphe der eben genannten Samothracischen Mysterien (s. Note 14 und 28) gewonnen werden. Und darin liegt ein bedeutender Aufruf, auf Mittel zu denken, die Philologen und Theologen wieder in ähnliches Interesse für Naturwissenschaft zu ziehn, wie es allgemein verbreitet war in der Periode freier Studien, welche in der letzten Hälfte des vorhergehenden und noch zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts bestand, wovon vorhin in der auf Gesner sich beziehenden Note 9. die Rede gewesen. Denn diese allgemeine Hinrichtung der Aufmerksamkeit auf die fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur drängte zurück die für Geist, Herz und Gemüth gleich verderblichen theologischen Streithändel und trug eben dadurch wesentlich bei zur Anregung wahrhaft poetischer Begeisterung und Hervorrufung des schönsten Zeitalters unserer deutschen Litteratur.

Anmerkung. Um hieran nebenbei einige ganz praktische, unmittelbar ins Leben eingreifende Bemerkungen (wozu mich der Geist vorliegender Zeitschrift besonders aufruft) anzureihen, schliesse ich mich einer Stelle an, womit mein vormaliger, nun nach Dorpat abgegangener achtungswerther College, Herr Professor Kämtz, die kurze Geschichte der Physik schliesst, welche er als Anhang beifügte seinem im Jahr 1839 erschienenen Lehrbuche der Physik. Es heisst daselbst: „England machte den Anfang mit Belehrung der gewerbtreibenden Klassen; erst später folgten andere Länder. Es entstand ein edler Wetteifer, sogenannte Gewerbschulen zu stiften, deren Früchte sich jetzt schon vielfach zu erkennen geben. Während jedoch die Kenntnisse des Volks auf diese Art erweitert werden, zeigt sich auf vielen deutschen Universitäten gerade das Gegentheil. Denn früher gehörte es zur allgemeinen Bildung, dass ein jeder Studirende an den Vorlesungen über einige Theile der Naturwissenschaft Theil nahm; jetzt bekümmern sich die Theologen und Juristen darum fast gar nicht, und die Mediciner nur zur höchsten Nothdurft. Wohin das führe, mag die Zukunft lehren.“ — Diese höchst räthselhafte, hier zur Sprache gebrachte, für unsere Zeit ganz charakteristische Erscheinung hat besonders ihren Grund in der Anticipation des naturwissenschaftlichen Unterrichts in den beiden höhern Klassen gelehrter Schulen. Und diess verdient hervorgehoben zu werden in einer mit Rücksicht auf diese höheren Unterrichtsanstalten herausgegebenen mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschrift. Denn obwohl bei der Prüfung von Candidaten für das mathematische Lehrfach an Gymnasien specielle, über den mechanischen Theil hinausgehende Kenntnisse der Naturwissenschaft darum nicht verlangt werden, weil älteren, sehr zweckmässigen Bestimmungen gemäss, der gelehrte Schulunterricht, soweit er auf Physik sich bezieht, stets einen mathematischen Charakter haben soll: so hat man doch besonders in den letzten zwölf Jahren, gleichsam um mit den Realschulen zu wetteifern, sich in den höhern Klassen der Gymnasien das Ziel gesetzt, den ganzen Kreis der Physik umfassen zu wollen durch Mittheilung der sogenannten Haupt-

Digitized by Google

resultate[27]). Daher kommen die jungen Studirenden auf die Universität gewöhnlich mit dem Zeugnisse, „bekannt zu sein mit den Hauptlehren der Physik", nehmen diesen Ausdruck in jugendlicher Eitelkeit viel ernster als er gemeint ist, und glauben die Naturwissenschaft, gleich der Philologie, der Hauptsache nach, schon abgemacht zu haben auf Schulen. Erfüllt von dieser traurigen Eitelkeit wenden sie ihre Blicke ab von der fortdauernden Offenbarung Gottes in der Natur, was doppelt zu beklagen in einer Zeit theologischer, durch dergleichen Eitelkeit zum Theil herbeigeführter Wirren. Diese fortdauernden Offenbarungen Gottes in der Natur geben namentlich der Lehre von Licht und Wärme, Elektricität und Magnesismus einen eigenthümlichen, im edelsten Sinne geheimnissvollen Charakter. Darum wollen diese im raschen Fortschritte sich beständig weiter entwickelnden Lehren im strengen Zusammenhange (nicht aphoristisch, wie es allein auf Schulen möglich), sondern mit der Tendenz vorgetragen sein, den Forschungsgeist zu wecken, wodurch gerade diese Abschnitte der Physik so wichtig werden für den jungen Mediciner. Blos einige Sätze daraus, sogenannte Hauptresultate, schulmässig eingelernt zu haben macht eitel und hemmt den Forschungsgeist. — Bei Real- oder Gewerbschulen, an denen Mathematik denselben Rang behaupten soll, wie die Latinität auf gelehrten Schulen, ist man schon darum vorzugsweise auf mathematische Physik hingewiesen. Ausserdem kommt noch dazu das technische Element, worin eine höchst wichtige Quelle der schönsten neuen Entdeckungen liegt, während eben darum dieses technische Element beständig den Forschungsgeist weckt. Darum müssen, wenn die Naturwissenschaft glücklich fortschreiten soll, Techniker und Theoretiker sich gegenseitig die Hand bieten. Im höchsten Grad einflussreich sind aus diesem Grunde die sogenannten Institutions, d. h. naturwissenschaftliche Bürgergesellschaften, welche den geistigen Mittelpunkt der Gewerbthätigkeit Englands bilden. Der Royal Institution verdanken wir, abgesehn von ihrem technischen Einfluss, auch einen Davy, einen Faraday, welche sonst wahrscheinlich nur beschränktere Kreise der Wirksamkeit würden gefunden haben. Was auf diesem Wege zu leisten sei, hat der den Senkenbergischen Stiftungen sich anschliessende, von den Aerzten in Frankfurt a. M. begründete physikalische Verein gezeigt, welcher unserm erfindungsreichen und mannigfach auf das technische Leben einflussreichen Professor Dr. Böttger einen schönen Wirkungskreis eröffnete. Möchten die Lehrer an Gymnasien und Realschulen, in Verbindung mit den Aerzten und Pharmaceuten der Stadt, ähnliche Gesellschaften recht zahlreich begründen helfen. Denn für Erwachsene, die mit gereiftem Geist und mit technischen Zwecken im Auge kommen, sind naturwissenschaftliche, zur Erweckung

---

[27]) Dagegen habe ich, selbst angestellt als Professor der Mathematik und Physik am Gymnasium in Bayreuth, im Jahr 1808 ein Programm geschrieben, worin dasselbe, was ich hier sage, noch aus andern Gesichtspunkten entwickelt und dargelegt wurde, während es sich nur allzusehr bewährt hat in neuerer Zeit.

Digitized by Google

des Forschungsgeistes bestimmte Vorträge vorzugsweise geeignet. Dies ist der Gesichtspunkt, der allgemein in England anerkannt sich herrlich bewährt. Wir in Deutschland haben, ausser der auf Belebung und Erweiterung der Technik sich beziehenden Veranlassung, noch eine besondere ärztliche zur Begründung solcher naturwissenschaftlicher Bürgergesellschaften, um nicht auch in der Homöopathie (welche naturwissenschaftlich aufgefasst zu einem Studium des polaren Gegensatzes der Krankheiten hinführen müsste) dem aller Naturwissenschaft feindlichen, herrschend gewordenen falschen Mysticismus sogleich gewonnenes Spiel zu geben. Ein grosser Aufruf für verständige Aerzte und Pharmaceuten, sowie für Lehrer an Gymnasien und Realschulen, dem von Freunden der Naturwissenschaft in Frankfurt a. M. gegebenen rühmlichen Beispiele nachzufolgen.

4. Noch eine auf die praktische Bedeutung der in vorliegender Abhandlung zur Sprache gebrachten Gegenstände sich beziehende Bemerkung will ich anreihen. Die Technik ist stets Hand in Hand gegangen mit schöner Kunst, und eben dadurch erst gehoben worden. Entschieden aber haben die Mysterien des Alterthums einen grossen Einfluss gehabt auf schöne Kunst, welche ihren Haltpunkt fand an der in symbolischer Hieroglyphe verborgenen Wahrheit. Und da es sich bei diesen symbolischen Hieroglyphen von einer naturwissenschaftlichen Zeichensprache handelt, welche (was darzuthun die Haupttendenz ist meiner Einleitung in die Mythologie) wir noch jetzt nicht entbehren können, weil sie durch Naturnothwendigkeit gegeben, wer wollte dieser streng wissenschaftlichen Hieroglyphensprache die Fähigkeit absprechen, sich zeitgemäss noch weiter zu entwickeln und auszubilden? Man sieht also, dass dieselbe auch noch in neuerer Zeit einflussreich werden kann auf zeichnende und bildende Kunst. Die gewöhnliche Behandlung der Mythologie hat der neueren Kunst mehr geschadet als genützt, indem sie keine festen naturgemässen Anhaltpunkte darbot, deren die so leicht sich verirrende dichterische Phantasie vorzugsweise bedarf. Doppelt wichtig muss es uns also scheinen, das grössere gebildete Publicum mit denjenigen Theilen der Naturwissenschaft zu befreunden, durch welche wir zu einer physikalischen Zeichensprache darum hingeführt werden, weil wir derselben zur Verständigung schlechterdings bedürfen. Denn diese unentbehrliche Zeichensprache ist es eben, welche mit der alterthümlichen symbolischen Hieroglyphe zusammenstimmt. Wenn nun also in den Oberklassen auf gelehrten philologischen Schulen schlechterdings Physik im ganzen Umfange nebenbei vorgetragen und sogar zum Gegenstande der Einlernerei (des Examinationswesens) gemacht werden soll: so kann jene symbolische Hieroglyphe wesentlich dazu mitwirken, den gewöhnlich isolirt stehenden Lehrer der Mathematik und Physik auf Gymnasien mit den Philologen zu befreunden und nach und nach den herrschend gewordenen Sinn zu verdrängen, vorzugsweise nur in grammatischer und historischer [28]) Beziehung die Schriften des

[28]) Aber von welthistorischer Bedeutung sind die so einflussreichen, jedoch die Schriftsprache ausschliessenden Mysterien. Und zu diesen Myste-

Digitized by Google

Alterthums lesen zu wollen. In mehr als einer Hinsicht muss es uns also wichtig scheinen, zunächst wenigstens die Physiker ins Interesse zu ziehn für symbolische Hieroglyphik. Und schon in der vorhergehenden Abhandlung, wozu hier Nachträge zu liefern sind, habe ich den Weg angegeben, wie solches gelingen könne, und werde diesen nun weiter verfolgen.

IV. Ueber ein verwickeltes, nur durch die eben bezeichnete symbolische Bildersprache mit Klarheit aufzufassendes elektromagnetisches Phänomen.

In der älteren Abhandlung, woran diese neuere sich anschliesst, machte ich (im Journ. für prakt. Chemie. B 34. S. 416.) auf ein Phänomen aufmerksam, wodurch es vielleicht nun gelingen könnte, endlich einmal (nach zwanzig Jahren) die Aufmerksamkeit, welche einseitig blos der phonetischen Hieroglyphe zugewandt, auch hinzulenken auf die dem Inhalte nach viel interessantere symbolische Hieroglyphe. Es handelt sich von einem seit dem ersten Decennio dieses Jahrhunderts wahrgenommenen Phänomen, welches dennoch fortwährend verkannt und gemissdeutet wird, weil man die symbolische Hieroglyphe, d. h. die physikalische Zeichensprache verschmäht, wodurch es allein (wie schon im Jahrbuche der Chemie und Physik von 1826 gezeigt wurde) in seiner hohen Gesetzmässigkeit und wundervollen Schönheit aufzufassen ist. Mit so grösserem Dank habe ich es anzuerkennen, dass einer der vorzüglichsten Mitarbeiter an dem nun vollendeten grossen physikalischen Wörterbuche [29]), der

---

rien gehörten die auch bei Griechen und Römern einheimischen Menschenopfer, wie Lactantius (de falsa religione lib. I. cap. 31.) solches geradezu ausspricht, wodurch man sogleich versteht, warum so sparsam einzelne diese Menschenopfer betreffende Notizen nach und nach erst durchgedrungen sind. Es ist sehr dankenswerth, dass v. Lasaulx (welcher in der Weltgeschichte die gesta dei per homines sieht und in so fern das Heidenthum mit Beziehung auf das Christenthum gleichsam typologisch auffasst) mit grosser Gelehrsamkeit diese zerstreuten Notizen gesammelt in seiner Abhandlung über die Sühnopfer der Griechen und Römer und ihr Verhältniss zu dem Einen auf Golgotha. Würzburg 1841. Leicht hätte er, da er auch von Aegypten sprach, wo der Sage nach Herkules die Menschenopfer abstellte, aufmerksam werden können, dass nicht Herkules, sondern die Mysterien des Herakles (um einen Ausdruck des Lydus zu gebrauchen) gemeint seien. Eben so ist von den Orphischen Mysterien zu verstehen, was in ähnlicher Beziehung dem Orpheus nachgerühmt wird. Dasselbe lässt sich von den samothracischen (auf Herkules und die Dioskuren sich beziehenden) naturwissenschaftlichen Mysterien nachweisen, selbst hinsichtlich auf Rom, wo der Vestalische Cultus mit ihnen zusammenhing. Grund genug, um Dichter zu veranlassen, sich diesen edleren Mysterien anzuschliessen. Wir erblicken bei diesen samothracischen Mysterien schon in der allerältesten Zeit die Naturwissenschaft im Kampfe mit dem Obscurantismus, welcher auch in neuerer Zeit (man denke an die Autodafes und an die Hexenprozesse) Menschenopfer genug herbeigeführt. — Vergl. Note 26. und 14.

[29]) Dieses physikalische Wörterbuch blieb nämlich ganz streng bis zum Schlusse des Werkes dem B. 34. S. 413. des Journals für praktische Chemie erwähnten Princip getreu, nichts aufkommen zu lassen,

Digitized by Google

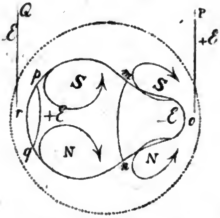
ehrwürdige Pfaff (B. 8. S. 78.) wenigstens die Abbildungen mittheilte, welche ich unter Beschreibung der elektromagnetischen Bezeichnungen von diesem Phänomen im Jahrb. d. Ch. und Ph. 1826. B. 3. (d. g. R. B. 48) Taf. I. Fig. 13—15. und 1828. B. 3. (d. g. R. B. 54.) Taf. I. Fig. 4. gegeben hatte. Besonders die in letzterer Zeichnung zuerst gesetzmässig dargestellten vier Wirbeldrehungen scheinen auf jenen scharfsinnigen und gründlichen Physiker, welcher schon früher aus diesen Erscheinungen ein besonderes Studium gemacht, am günstigsten gewirkt zu haben, um ihn geneigt zu machen, zu meiner Ansicht überzutreten. Und gewiss, er würde die unklare Idee von „galvanisch-elektrischen Strömungen als Ursache merkwürdiger Bewegungen im Quecksilber und verschiedenen Flüssigkeiten" gänzlich aufgegeben haben, wenn ihm schon die vier gesetzmässig sich drehenden Quecksilbermagnete bekannt gewesen wären, worüber erst in demselben Jahr, in welchem jener achte Band des physikalischen Wörterbuches erschienen, eine Verständigung möglich gemacht wurde durch die auf Taf. 2. Fig. 8. meiner

---

was sich auf Urgeschichte der Physik bezieht. Darum wurde auch keine Notiz genommen von einer obwohl zur Verständigung (wenn nicht Unklarheit der Darstellung auch in der Physik, wie in einigen anderen Disciplinen, zum Princip erhoben werden soll) absolut unentbehrlichen physikalischen Zeichensprache, welcher man jedoch abhold zu sein schien, weil sie an die alte symbolische Hieroglyphe erinnerte. Und dasselbe Princip stillschweigender Beseitigung wurde ausgedehnt auf alles Naturwissenschaftliche, was mitgetheilt ist in meiner, eben jener symbolischen Hieroglyphik sich anschliessenden Einleitung in die Mythologie auf d. Standp. der Naturw. — Dennoch musste dasselbe physikalische Wörterbuch der astronomischen Zeichensprache einen besondern Artikel widmen, obwohl sie mit einer mythologischen Bilderwelt zusammenhängt. Welcher Grund war nun vorhanden, die physikalische Zeichensprache blos darum zu proscribiren, d. h. jeder Erwähnung unwerth zu halten, weil sie gleichfalls an Mythologie erinnert, da sie doch unabhängig von derselben hervorgeht aus der Natur der Sache? Nebenbei sei mir hier noch folgende Bemerkung erlaubt. Jenes Princip des Ignorirens wurde auch übergetragen auf meine Abhandlung über die Natur der (mit magnetischem Polarlichte leuchtenden) Sonne, welche blos Thatsachen zusammenstellte, deren Bedeutsamkeit im hohen Grade vermehrt wird durch die neuesten Fortschritte der Physik; — und dasselbe Schicksal traf die damit zusammenhängende ältere Abhandlung über Weltmagnetismus. Neuerdings haben aber einem damals (im Jahre 1814) unbeachtet gebliebenen, eben in dieser Abhandlung ausgesprochenen Satze „über die Natur des Saturnusringes" die Sternschnuppenschwärme, wie es scheint, allgemeine Anerkennung verschafft. Es wurde nämlich dieser Saturnusring als ein keineswegs isolirt stehender Asteroiden oder Meteormassenring aufgefasst. Zeitgemäss also möchte nun die Prüfung der umständlich im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1814. B. 10. S. 24. 28. 71. 82. und B. 12. S. 418. 419. dargelegten Gründe sein, welche schon vor 32 Jahren auf diese Ansicht des Saturnusringes hinleiteten. An Chladni's Schrift über Feuermeteore S. 398—402. schloss der specielle Weg der Prüfung sich an, welcher bezeichnet ist in der Abhandlung über Urgeschichte der Physik (B. 37. S. 325. desselben Journ.). Und da die magnetischen Variationsbeobachtungen so grosse Ausdehnung rings um den Erdkreis gewonnen haben: so würden wohl die damals gewünschten regelmässigen Sonnenbeobachtungen in angemessener Ausdehnung sich nebenbei nun anreihen lassen.

Digitized by Google

Einl. in d. Mythol. mitgetheilte, zur klaren Auffassung der gesetzmässigen Drehungen dieser vier Quecksilbermagnete schlechterdings unentbehrliche symbolische Hieroglyphe. Da diese vierfachen Wirbeldrehungen (wie ich schon im Jahr 1826 hervorhob) als das Grundphänomen bei jenen so mannigfachen und verwickelten Erscheinungen, von welchen es sich hier handelt, zu betrachten sind, und Stöhrer's aus drei magnetischen Magazinen zusammengesetzter elektromagnetischer Apparat in so hohem Grade geeignet ist, auf die bequemste Weise diese vierfachen Wirbel in schönster Ausbildung darzustellen: so will ich die eben erwähnte Zeichnung dieses Grundphänomens darum hieher setzen, weil es sehr wenige noch zu kennen scheinen, indem nicht in einem einzigen Lehrbuche der Physik davon die Rede ist, oder die Abbildung gegeben wird.



An diese Abbildung [30]) reiht sich nun folgende experimentelle Bemerkung. Denn darauf kommt es zunächst an, dass das Phänomen von experimenteller Seite gehörig bekannt werde.

1. Ich setze voraus, dass man vollkommen gereinigtes Quecksilber anwende, welches zuvor noch eine Zeit lang unter verdünnter Salpetersäure gestanden. Wird nun dieses von der Salpetersäure (wie gewöhnlich vermittelst eines Trichters) getrennte Quecksilber mit gemeinem kohlensauren Kali übergossen, und werden in diese Kalilösung die Platinpolardrähte getaucht, ohne das Quecksilber vorher berührt zu haben, so werden gewöhnlich (bei dem Gebrauche der langen Drahtleitung in Stöhrer's magnetoelektrischem Apparate) sogleich die vier Wirbel sich darstellen, welche man am besten sichtbar macht, indem man von einem

---

[30]) Die Abbildung erklärt sich leicht von selbst. Die punktirte Linie bezeichnet die Gränze der in ganz dünner Lage aufgegossenen kohlensauren Kalilösung, worein die Platindrähte *P* und *Q* tauchen ohne das Quecksilber zu berühren, welches bei der Eintauchung die Gestalt *omprqno* annimmt. Elektromagnetischen Gesetzen gemäss ist nämlich *NN* die nordmagnetische, *SS* die südmagnetische Quecksilber-Oberfläche, während an der unteren Fläche der entgegengesetzte Magnetismus auftritt. Daraus entstehn, indem sich das Quecksilber in eine —*E* Zone *omno* und eine +*E* Zone *mprqnm* theilt, vier sich gesetzmässig drehende Quecksilbermagnete. Die angedeutete Oxydanhäufung um *pqr* ist, ebenso wie die Zonengrenze *mn*, theils veränderlich, theils mehr oder weniger in die Augen fallend; so wie auch die Wirbel in der kohlensauren Kalilösung an der —*E* Zone, nach Umständen zur Seite sich halten, oder in die Zone hinein rücken.

Digitized by Google

Stückchen Schwefel (oder Kohle, oder von beiden zugleich) kleine Staubtheilchen darauf abschabt. Wendet man Stöhrer's grössere Maschine an (mit drei Magneten, von denen jeder aus sechs Lamellen zusammengesetzt): so kann es nöthig werden, dass man wenigstens zwei Magnete mit dem Anker schliessen, auch die Raschheit der Bewegung mässigen muss, um die vier Wirbeldrehungen, wie sie hier gezeichnet, recht ausgebildet und schön darzustellen. — Man sieht daraus, dass Stöhrer's magnetoelektrischer Apparat viel kräftiger wirkt als die Voltaische Säule, womit Pfaff arbeitete im Jahr 1826, weil dieser (nach d. Jahrb. d. Ch. u. Ph. B. 48. S. 202. und 227.) unter den eben angezeigten Bedingungen, nach seinem Ausdrucke, „in der Flüssigkeit keine Spur von Strömung bemerken" konnte. Da ich in demselben Jahre, wo Pfaff seine Versuche publicirte, mit einer viel stärkern Voltaischen Säule diese Versuche angestellt, so erinnerte ich schon damals (a. a. O. S. 331): „nicht selten sieht man, wenn man Quecksilber zwischen Flüssigkeiten elektrisirt (welches sich dabei in zwei Zonen theilt), an beiden Zonen entgegengesetzte elektromagnetische Drehungen auftreten, woraus eben die entgegengesetzten Ströme hervorgehn, wovon Herschel redet. Dieser Fall des Gleichgewichts aber ist, wie leicht begreiflich, seltener als der, wo die eine Art der Drehung die andere überwiegt, ja ganz in sich verschlingt und unwahrnehmbar macht, wenn nämlich entweder die positive oder die negative Zone des Quecksilbers vorherrschend geworden ist durch die Natur der leitenden Flüssigkeiten, oder durch andere (nun sogleich darzulegende) Umstände begünstigt". — Ebenso bemerkte ich auch schon in einem Nachschreiben zu Nobili's Abhandlung über dieses merkwürdige, auch von diesem ausgezeichneten Physiker gänzlich verkannte Phänomen (Jahrb. d. Ch. u. Ph. B. 54. S. 66.), dass, um die vier Wirbel zu sehen, alles von der Natur und der Stärke des elektromagnetischen Apparates abhänge, dass ich sie bei Anwendung des schwefelsauren Natrons oder schwefelsauren Kalis u. s. w., aber besonders schön und lang ausdauernd bei einer Lösung von gemeinem kohlensauren Kali gesehn habe. Zugleich gab ich dann die vorstehende Abbildung dieser vierfachen Wirbeldrehungen. Um so erfreulicher war es für mich, dass Stöhrer's magnetoelektrische Maschine so vorzugsweise geeignet ist, gerade das schönste elektromagnetische Phänomen auf die leichteste und bequemste Art darzustellen, eben weil man dabei so ganz in seiner Gewalt den elektrischen Strom hat, auf dessen angemessene Kraft es ankommt, wenn die positive und negative Zone des Quecksilbers sich das Gleichgewicht halten soll. Hat dieses alle elektromagnetische Drehungen in sich vereinende Phänomen sich nur endlich Eingang in unsere Lehrbücher der Physik verschafft: so wird auch die zur Erläuterung desselben unentbehrliche elektromagnetische Zeichensprache unmöglich länger verschmäht werden können, sondern unwillkürlich sich anschliessen.

2. Wir haben bisher vorausgesetzt, das reinste mit einer dünnen Schicht kohlensauren Kalis bedeckte Quecksilber sei bei dem Durchgange des elektrischen Stromes weder vom positiven noch vom negativen Platinadrahte berührt worden. Wird aber der negative Platinadraht in dasselbe eingetaucht, so ist eben dadurch

Digitized by Google

die ganze Masse des Quecksilbers negativ elektrisirt, und es werden also die für die negative Zone *onmo* in unserer Figur gezeichneten Wirbeldrehungen nun sich über die ganze Quecksilberfläche verbreiten. Zieht man nach einiger Zeit den Platinadraht aus dem Quecksilber zurück: so werden dieselben negativen Drehungen wenigstens noch eine Zeit lang, ja zuweilen bis zur Ermüdung lang sich über die ganze Fläche des Quecksilbers ausdehnen. Die negative Ladung dauert also fort. Und diess war das einzige Phänomen, welches Pfaff bei der Voltaischen Säule, die er anwandte, wahrnehmen konnte, abgesehn von den Modificationen, welche durch Anwendung anderer Flüssigkeiten, als des kohlensauren Kali, herbeigeführt werden. An jene negative Ladung aber lässt, wie nachgewiesen wurde (im Journ. für prakt. Chemie B. 34. S. 415. ff.), eine interessante Umdrehung der Wirbelbewegungen sich anreihen, wodurch die Bedeutsamkeit der elektrischen Ladung, auf welche zuerst Ritter die Aufmerksamkeit hingelenkt, in leichtester und schönster Weise dargethan werden kann. Man möchte sich wundern, dass dieses schöne Ladungsphänomen nicht längst beobachtet wurde. Aber selbst die lebhaften Zuckungen des Quecksilbers, welche General von Hellwig bald nach Construction der Säule Volta's beobachtet (wie sie umständlich im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1826. B. 48. S. 341. beschrieben und nun leicht ableitungsfähig sind aus den Drehungen der vorhin in Note 30. erwähnten Quecksilbermagnete) diese lebhaften Bewegungen der ganzen Quecksilbermasse mussten nicht selten den gehörigen Grad der Ladung der Quecksilberoberfläche unmöglich machen. Bei Stöhrer's Maschine ist es leicht, durch Anlegung der Anker an die Magnete, oder langsamere Drehung, die Heftigkeit der Quecksilberbewegungen zu vermindern. Dennoch würde sich dieses überraschende Ladungsphänomen schon längst auch bei dem Gebrauche der gewöhnlichen Voltaischen Säule dargestellt[31]) haben, wenn man sich dazu eingerichtet hätte, sogleich nach Aufhebung der primitiven Kette die secundäre schliessen zu können. Zu diesem Zweck ist es blos nöthig, Quecksilbergefässe einzuschieben, wozu am besten etwas grössere Korkstöpsel geeignet, in denen man mit Quecksilber gefüllte

---

[31]) Wirklich ist die Ladungskette als im fortdauernden Kampfe mit der primitiven Kette anzusehen (was, wohl erwogen, allein schon den wunderlichen Streit der Contact-Theorie mit der chemischen Theorie bei der Voltaischen Säule hätte beseitigen müssen, wovon umständlicher die Rede war in meiner Einl. in d. Mythol. S. 277—279.); und als Ausdruck dieses Kampfes, bei dem sogar momentan die secundäre Kette siegen kann, ist wahrscheinlich ein bei jenen elektromagnetischen Drehungen sich darstellendes Phänomen zu betrachten, welches im Jahrb. d. Ch. u. Ph. 1828. B. 3. oder d. g. R. B. 54. S. 68. Note mit folgenden Worten von mir bezeichnet wurde: „Man sieht zuweilen unter gewissen Bedingungen (besonders sah ich diess sehr schön bei dem Gebrauche des schwefelsauren Kali) in gesetzmässigen kürzeren oder längeren Perioden die ganze Quecksilbermasse sich umwälzen, nachdem die positive Zone ganz vorgerückt ist und die negative verdrängt hat, während nach der Umwälzung diese negative Zone wieder zum Vorschein kommt. Solche Erscheinungen gaben wohl Veranlassung, dass Herschel und Nobili Alles blos von Bewegung des Quecksilbers ableiten wollten, wodurch das Wasser lediglich mit fortgerissen werde."

Digitized by Google

Vertiefungen anbringt, weil der Kork bequem zugleich zur Haltung der eingesteckten Leitungsdrähte dienen kann. Jedoch diese specielle Einrichtung, um nach Unterbrechung des elektrischen Stromes sogleich die secundäre Kette schliessen zu können (wozu auch blos der Gebrauch von Drahtschnuren, statt der gewöhnlichen Schliessungsdrähte, hätte hülfreich werden können), diese specielle Einrichtung hatte man versäumt. Wirklich konnte ich aber mit Stöhrer's magnetoelektrischer Maschine den nöthigen Grad der negativen Ladung der Quecksilberoberfläche schneller hervorbringen, als mit drei (nach einigem Gebrauche zu anderen Zwecken immer noch sehr lebhafte Funken und lebhafte Wasserzersetzung bewirkenden) Kohlencylindern von Bunsen. Denn länger als ich erwartet hatte, musste ich mit dieser kleinen Kohlenbatterie das Quecksilber negativ elektrisiren, bevor das beschriebene schöne Ladungsphänomen, welches durch umgekehrte Wirbeldrehung sich darstellt, auf eine deutliche und lebhafte Weise hervortrat. Allerdings auch mit Stöhrer's magnetoelektrischer Maschine wird man diese umgekehrten Wirbeldrehungen nicht sogleich sehn, wenn man zuvor das Quecksilber positiv elektrisirt hat und dann nach Zurückziehung des positiven Drahtes den negativen nur kurze Zeit einwirken liess. Denn offenbar eine gewisse Stärke der negativen Ladung (wobei, wie schon früher erwähnt, auch der Kaliumgehalt des im kohlensauren Kali negativ elektrisirten Quecksilbers in Betracht kommen kann) ist nothwendig zum ersten Auftreten der Erscheinung, die aber, wenn sie einmal eingetreten, sich leicht wiederholt, so dass alsdann, wie gleichfalls schon von mir hervorgehoben wurde, die entgegengesetzten Wirbeldrehungen der Ladungskette zwei bis drei Minuten lang fortdauern können, wenn das Quecksilber auch nur etwa zehn Secunden lang elektrisirt wurde.

3. Mit solchem negativ geladenen Quecksilber wird man aber nicht sogleich die vier Wirbeldrehungen hervorbringen können. Erst wenn man dieses negativ geladene Quecksilber eine Zeit lang zwischen gemeiner kohlensaurer Kalilauge elektrisirt hat, wird dem negativen Platindrahte gegenüber die positive Zone mit den ihr entsprechenden Wirbeln wieder zum Vorschein kommen (früher oder später in Abhängigkeit von der Stärke des elektrischen Stroms); während dann diese Wirbel sich immer weiter und weiter ausdehnen. Um schneller zum Ziele zu gelangen, vermindert man die zu starke negative Ladung des Quecksilbers durch positive Ladung von so kurzer (nur auf wenige Secunden beschränkter) Dauer, dass noch keine Oxydation des Quecksilbers eintritt. Man wird sich dabei leicht überzeugen, dass es auf eine Art von Abstimmung ankommt, damit weder die Ausdehnung der positiven Zone, noch die der negativen zu gross sei, sondern beide sich mehr oder weniger das Gleichgewicht halten, wie z. B. vorstehende Zeichnung es zeigt, welche, wie gesagt, auf die Auflösung des gemeinen kohlensauren Kali sich bezieht. Denn höchst mannigfach und verwickelt kann die Erscheinung durch Anwendung verschiedener Flüssigkeiten gemacht werden. Umständlich sind die Gesetze, denen gemäss sie bei verschiedenen sauren, oder alkalischen, oder salzigen Auflösungen erfolgt, schon im Jahr 1826 in jener vorhin angeführten Abhandlung von mir entwickelt worden. Aber davon will ich eben so wenig etwas wiederholen, als ich

Digitized by Google

von Erklärung des durch obige Abbildung dargestellten Grundphänomens etwas sagen kann, ohne Hülfe der physikalischen Zeichensprache, d. h. der symbolischen Hieroglyphensprache, wodurch ich in der Mythol. a. d. Standp. d. Naturw. S. 281. eben so kurz als klar jenes Grundphänomen erläuterte, welches allerdings in den Drehungen der vier sich ausbildenden Quecksilbermagnete besteht. Diese vier Quecksilbermagnete sind es, welche nicht sowohl die darüber ausgegossene Flüssigkeit mit sich fortreissen, als vielmehr die (wie nachgewiesen a. a. O.) nach analogem elektromagnetischen Gesetz erfolgenden gleichartigen Wirbeldrehungen dieser Flüssigkeit erleichtern und befördern, und zwar, wie man leicht sieht, nothwendig in dem Grade fördern, dass unmöglich aussen (nach Herschel's Weise) hingehaltene Magnete irgend eine wahrnehmbare Modification in den Drehungen herbeiführen können, selbst abgesehn davon, dass den vier, theils mit dem Nordpol, theils mit dem Südpol an der Oberfläche sich drehenden, und zwar mit jedem Pole theils rechts, theils links sich drehenden Quecksilbermagneten, wo nicht vier, doch wenigstens zwei Stahlmagnete entgegenzuhalten wären, um denkbarer Weise eine Modification in den Drehungen herbeizuführen. Ich sage „denkbarer Weise"; denn praktisch unausführbar bliebe der Versuch schon darum, weil die so nahe gehaltenen entgegengesetzten Pole der Stahlmagnete sich im höchsten Grade schwächen würden, was nicht der Fall ist bei den immer mit neuer Kraft aufblitzenden Polen der Quecksilbermagnete.

Anmerkung. Zufälligerweise befinde ich mich in der Lage, über eine Anzahl Exemplare des Jahrbuchs d. Chemie u. Physik für 1826 [32])

---

[32]) Dasselbe bildet mit dem eben bezeichneten Titel und mit besonderm Register versehen ein für sich bestehendes Ganze von drei (acht Kupfertafeln enthaltenden) Bänden, welche noch jetzt im herabgesetzten Ladenpreise sechs Thaler kosten. In der Art in sich abgeschlossen erschienen damals einige Jahrgänge des Journals für Ch. u. Ph. als eine Zeitschrift des im Leibnitzischen Sinne gestifteten Vereins zur Verbreitung von Naturkenntniss und höherer Wahrheit. Zugleich zeigt jenes Journal d. Ch. u. Ph. für 1826. B. 2. S. 132—135., auf welche höchst achtbare Weise sich die kaiserliche Akademie der Wissenschaften zu Petersburg für jenen Verein interessirte, indem sie beschloss, den von Petersburg aus nach Peking von Zeit zu Zeit abgehenden theologischen Missionen im Leibnitzischen Geiste naturwissenschaftlich gebildete Männer anzureihen, wie solches seit der Zeit wirklich geschah mit Gewinn für mannigfache wissenschaftliche und andere gute Zwecke. Der erste Schritt ist also geschehen zu einer wissenschaftlichen Propaganda, wozu Seetzen von Aegypten aus alle Europäischen und Amerikanischen Akademien aufrief (s. Litt. Bl. d. Hamb. Börsenh. v. 13. Mai 1840 oder Allg. Anz. d. Deutsch. vom 20. und 21. Mai 1840). Im gleichen Leibnitzischen Geiste wurde neuerdings eine Medical Missionary Society of Edinburgh begründet, während (nach Froriep's Notizen, April 1845. B. 34. S. 122.) diese medicinische Missionsgesellschaft in Edinburgh den Zweck hat, „in Beziehung auf medicinische Missionen Kenntnisse zu verbreiten, ähnliche Institutionen zu unterstützen und die theologischen Missionen mit ärztlichen Agenten zu versorgen, soweit die disponibeln Geldmittel es verstatten." In meiner Denkschrift zur Säcularfeier der Univ. Erlangen findet sich einleitungsweise die, wie es scheint, wenig bekannt gewordene Notiz, dass die Berliner Universität

Digitized by Google

disponiren zu können, worin zuerst jene eben erwähnte **physikalische Zeichensprache**, *entwickelt aus der Natur der Sache, dargelegt wurde. Und unmittelbar führte diese Symbolsprache dann hin zur gesetzmässigen Auffassung* **jenes verwickelten, alle Arten elektromagnetischer Drehungen in sich vereinenden Phänomens**, *wovon so eben die Rede war. Abgesehn aber von allen in demselben Jahrgange 1826 mitgetheilten dieser Zeitschrift eigenthümlichen physikalischen Abhandlungen, ist ohnehin es bekannt genug, dass wohl Compendien veraltern, nicht aber die Zeitschriften, worin die Originalab-*

---

das Vermögen jenes am Grabe meines Bruders zur Begründung naturwissenschaftlicher Pflanzschulen im Leibnitzischen Sinne gestifteten Vereins übernommen habe, und die Universitätsquästur in Berlin bereit sei, Beiträge zur Vermehrung des kleinen Stiftungscapitals anzunehmen, um späterhin ein Reisestipendium anreihen zu können. (Vergl. Hitzig's Annalen etc. fortg. von Schletter, B. 35. S. 176—179, wo ein in letzterer Beziehung sehr beachtungswerthes Actenstück mitgetheilt.) Zu Göttingens Ruhm aber gereicht es, dass wirklich ein Reisestipendium für Naturforscher dort begründet und, nach Blumenbach's Namen genannt, mit der Universität in Verbindung gebracht wurde. Uebrigens stammt die grossartigste Stiftung der Art schon aus der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, angereiht der Oxforder Universität. Denn die Radcliffe's Travelling Fellowships sind für zwei von der Universität Oxford auszuwählende, mit Natur- und Heilkunde vertraute junge Gelehrte bestimmt. Jeder von ihnen erhält jährlich 300 Pfd. Sterl., und zwar zehn Jahre lang, unter der Bedingung, wenigstens fünf Jahre in einem fremden Lande jenseits der See zu verweilen, wodurch offenbar die Anlegung naturwissenschaftlicher Pflanzschulen eingeleitet ist. Auch an der Universität Cambridge sind seit dem Jahr 1767 zwei Reisestipendien begründet, jedes zu 100 Pfd. Sterl. jährlich, welche drei Jahre lang bewilligt werden unter der ausdrücklichen Verpflichtung, mit der Universität durch Reiseberichte in Verbindung zu bleiben. — Ohnehin binden mehrere englische Fellowships (die überhaupt vergleichbar den in Leipzig sogenannten Collegiaturen) nicht geradezu an den Aufenthalt auf der Universität, und können sonach als Reisestipendien benutzt werden. Offenbar also würde es gut sein, auch den deutschen Universitäten (nach manchen betrübenden Ereignissen) wieder einen neuen geistigen Aufschwung zu geben durch Anreihung von Reisestipendien mannigfacher Art. Solches wäre angemessen unserer Zeit, zu deren grösstem Ruhm es gehört, die Verbindung der Menschen durch Dampfschiffe und Eisenbahnen mehr gefördert zu haben, als die Vorzeit solches nur zu ahnen vermocht. — Da über diese und verwandte Gegenstände mancherlei zur Sprache gebracht im Jahrbuche d. Ch. u. Ph. für 1826, namentlich auch in einem auf obengenannten Verein sich beziehenden Anhange zu demselben: so kann die Vertheilung von 100—150 Exemplaren dieses Jahrbuchs an öffentliche Bibliotheken vielleicht auf mehr als eine Weise dazu beitragen, mich mit gleichgesinnten Männern in Verbindung zu bringen, welche sich für Wahrheiten interessiren, die ich um so weniger blos stillschweigend möchte beseitigen lassen, je beachtungswerther sie mir scheinen gerade in der gegenwärtigen Zeit. Wenigstens dazu, dass sie endlich zur Sprache kommen und zur Prüfung gelangen mögen; wünsche ich am Schlusse meines Lebens noch etwas beigetragen zu haben (vergl. die ältere Abhandlung, woran die gegenwärtige sich anschliesst, im Journ. für prakt. Chemie B. 34. S. 414. Note 3.). — Für dieselbe Sache, wovon hier die Rede ist, bieten noch ganz andere, höchst beachtungswerthe Gesichtspunkte sich dar bei näherer Betrachtung der in der Recension von Schubert's Spiegel der Natur in der Allgem. Litt. Zeit. 1816. Mai. No. 99. und 100. zusammengestellten Thatsachen.

Digitized by Google

handlungen sich befinden, worauf jene sich beziehn. Unter diesen Umständen scheint es mir zweckmässig, dem gemäss, was im dritten *Abschnitte vorliegender Abhandlung zur Sprache kam, jene eben erwähnten Exemplare des Jahrb. d. Ch. u. Ph. als ein Geschenk zu vertheilen an Bibliotheken für Gymnasien, oder Realschulen, oder naturwissenschaftliche Vereine, wie sie vorhin mit Beziehung auf das nachahmungswerthe Beispiel der Institutions Englands erwähnt wurden, und zu deren zahlreicher Entstehung auch bei uns es mir sehr lieb sein würde, etwas beitragen zu können. Zum Zwecke der angebotenen Vertheilung von 100—150 Exemplaren jenes Jahrbuchs ist es blos nöthig, dass die Vorsteher solcher Anstalten, welche irgendwo in unserm deutschen Vaterlande geneigt sind, von diesem Anerbieten Gebrauch zu machen, mir den Weg der Zusendung in portofreien Briefen bezeichnen. Zugleich aber ist von der mit der Anstalt in Verbindung stehenden Buchhandlung eine unserer Buchhandlungen hier in Halle durch einige beiliegende Zeilen zu beauftragen, dass sie die Verpackung und Uebersendung besorgen möge. — Ein erfreuliches Zeichen der Zeit ist der „unter Leitung Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen Maximilian von Baiern stehende Verein zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse durch gemeinfassliche Schriften“, wodurch so eben eine neue Ausgabe von Runge's Grundriss der Chemie (wie der Titel des Buches solches ausspricht) veranlasst wurde. Hoffentlich werden im Bunde mit diesem wohlthätigen Vereine angemessene Regenerationen der alten Stadtbibliotheken und andere auf Technologie und Naturwissenschaft sich beziehende städtische Sammlungen wirken, wie sie ohnehin zum Gedeihen der sogenannten polytechnischen Gesellschaften unentbehrlich sind. Ein neuer Aufruf liegt zugleich darin, wenigstens die an Gymnasien und Realschulen schon vorhandenen Sammlungen zu benützen im Geiste jener oben erwähnten nicht blos das Bedürfniss der Jugend, sondern vorzugsweise der Erwachsenen ins Auge fassenden Institutions Englands. Und in dieser Beziehung kann in unserm Vaterlande als Vorbild dienen der von den Aerzten in Frankfurt am Main begründete physikalische Verein, von welchem vorhin (Anmerkung zu III. 3.) die Rede war. Da ich stets zur Förderung solcher Zwecke in meinem engern Kreise zu wirken bemüht war; so würde es mir erfreulich sein, im Geiste des obigen Vereins zur Beförderung derselben Zwecke auf dem soeben bezeichneten Wege mitwirken zu können.*

Anhang.

Die vorliegende Abhandlung war, wie schon in der Einleitung gesagt, ursprünglich als Nachtrag geschrieben zu der „über Platina, Altes und Neues“, welche im Journ. für prakt. Chem. B. 34. S. 385—420. erschienen. Unter dem Titel „nachträgliche Bemerkungen über Platina, Elektron und verwandte Gegenstände“ sollte sie in demselben Journal publicirt, oder wenigstens als Anhang zu demselben ausgegeben werden, als eine Beilage und zwar, wenn es nöthig schiene (weil allerdings darin nicht populäre, vielmehr heterodoxe, seit zwanzig Jahren von jeder unbefangenen Prüfung ausgeschlossene Wahrheiten aufs neue zur Sprache kommen sollten) als eine auf Kosten des Verfassers zu druckende Beilage. Da solches nicht zu erreichen gewesen: so erhielt im Geiste des vorliegenden, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren

Unterrichtsanstalten herausgegebenen Archivs für Mathematik und Physik die Abhandlung nicht blos eine ihren Inhalt schärfer bezeichnende Ueberschrift, sondern es wurde auch der dritte Abschnitt durch einige Zusätze erweitert. Denn nun geziemte es sich, noch andere praktische Gegenstände zur Sprache zu bringen als blos praktisch chemische, worauf der vierte die wundervollen galvanischen Figuren Erman's (durch Nachweisung ihrer gleichbleibenden gesetzlichen Darstellung) wieder in ihre Rechte einsetzende, und noch mehr der fünfte Abschnitt dieser Abhandlung sich bezog, worin einzig und allein praktisch chemische Gegenstände zur Sprache kamen unter der Ueberschrift: „über die praktische Bedeutung der hydroelektrischen Ladung." So eng sich derselbe den vorhin zur Sprache gebrachten schönen Ladungsphänomenen anschliesst: so geht er doch zu sehr auf Einzelnheiten bei Construction elektrischer Batterien ein, als dass er zu der enger begrenzenden Ueberschrift, welche nun die vorliegende Abhandlung erhalten hatte, noch passen könnte. Daher spare ich, was zur früheren Publication bestimmt war, für eine spätere auf, und reihe unter dem Titel eines Anhangs nur Zeitgemässes an, dessen Publication nicht allzulange zu verschieben ist.

I.

1. Nachdem nämlich die vorliegende Abhandlung schon ihre neue Bestimmung erhalten hatte: so hat sich die praktisch chemische Bedeutung dessen, was ich über hydroelektrische Ladung im Journ. f. prakt. Chem. zu publiciren angefangen, und darin auch weiter fortzusetzen beabsichtigt hatte, erst recht herausgestellt. Durch einen eigenthümlichen Zufall waren nämlich selbst Versuche in Vergessenheit gekommen, welche Volta gemeinschaftlich mit Brugnatelli über sogenannte thermoxydirte Kohle angestellt, und Brugnatelli in einer an Gehlen (s. dessen Journ. d. Chem. u. Phys. 1806. B. 2. S. 553—563.) gesandten kleinen Abhandlung mitgetheilt hatte. Diese thermoxydirte Kohle war den Versuchen Volta's gemäss das erste hoch über den edlen Metallen stehende Glied am negativen Pol seiner Säule; ihr schloss zunächst thermoxydirtes Gold sich an. Viel tiefer steht, durch mehrere fehlende Glieder getrennt, krystallisirtes schwarzes Manganoxyd, dem sich alsdann Graphit, gemeine Kohle, Gold, Silber, Platin, Kupfer der Reihe nach anschliessen. Den Ausdruck „thermoxydirt" wählte Brugnatelli gemäss einer theoretischen Ansicht von der Verbindung des Wärmestoffes mit Oxygen in der rauchenden Salpetersäure, und beachtungswerth ist besonders folgende von ihm gemachte Beobachtung: „Setzt man mit Salpetersäure befeuchtete Kohle dem Sonnenlicht aus, so entwickelt sie oxydirtes Stickgas und bleibt zuletzt völlig geschmacklos zurück, wobei sie sich vortrefflich thermoxydirt." — Diesen Versuch Brugnatelli's wiederholte ich sogleich im Jahr 1806; und noch jetzt besitze ich aus jener Zeit solche sogenannte thermoxydirte (d. h. elektrisch geladene) Kohle, die als negativer Leiter mit Zink combinirt sehr kräftig wirkt. Mein Freund Seebeck, dem ich im Jahr 1807 solche Kohle mitgetheilt hatte, hob sie wegen ihrer vortrefflichen

Digitized by Google

Wirksamkeit bis zum Jahr 1822 auf, wo er sie in thermomagnetischer Beziehung prüfte; und sie zeigte sich, wie er in seiner Abhandlung über Thermomagnetismus hervorhebt, unter allen von ihm geprüften Kohlenarten einzig und allein wirksam, namentlich mit Kupfer, Silber, Zink. Ich führe diess an, damit man sehe, wie ausdauernd die elektrische Ladung bei dieser Kohle ist. Denn dass die sogenannte thermoxydirte Kohle als eine elektrisch geladene Kohle zu betrachten sei, geht daraus hervor, dass sie auch durch positive Elektrisirung an der Voltaischen Säule gewonnen wird. Schon Volta und Brugnatelli machten auf ihre ausdauernde Wirksamkeit aufmerksam, während die hydrogenirte (am negativen Pole der Säule erhaltene) Kohle nur von sehr kurzer Dauer ist. Daran schlossen sich nun in jenem letzten, auf die „praktische Bedeutung der hydroelektrischen Ladung" sich beziehenden Abschnitte meiner Abhandlung mannigfache Betrachtungen an, namentlich mit Beziehung auf Bunsen's Kohlenbatterie und Grove's Platinakette. Man kann nämlich, wie ich zeigte, das Experimentiren mit Bunsen's Kohlenbatterie viel bequemer machen, besonders wo es auf den Gebrauch einer grössern Anzahl von Gliedern ankommt, wenn man die Kohle zuvor nach Brugnatelli's Weise thermoxydirt. Auch auf die gewöhnliche Voltaische Säule kann man diese Art der Ladung anwenden. So genügen z. B., um die in Abschnitt IV. vorliegender Abhandlung mitgetheilten elektromagnetischen Drehungen des Quecksilbers (in Ermangelung von Stöhrer's magnetoelektrischem Apparat) sehr schön zu sehn, allein zehn Glieder einer Säule aus runden zusammengelötheten Zink- und Kupfer Platten von etwa 5–6 Zoll im Durchmesser mit zwischengelegten in mässig schwefelsaurem Wasser getränkten Pappen, wenn man die Zinkflächen Tags zuvor mit Aetzkalilauge benetzt hat, welche darauf eintrocknen mag, unmittelbar aber vor dem Aufbau der Säule mit einer in starkes Scheidewasser getauchten Feder über die Kupferflächen hinstreicht, welche dadurch zugleich metallisch glänzend und elektrisch geladen werden. Gewiss würde rauchende Salpetersäure mit Schwefelsäure gemischt (deren eigenthümliches Verhalten zu Kupfer am positiven Pole der Säule schon die Aufmerksamkeit erregt hat [33])) noch kräftiger wirken, um Kupfer durch elektrische Ladung zu dem Rang eines viel edleren Metalls zu erheben, während Zink durch Befeuchtung mit Aetzkalilauge zum Rang eines noch unedleren Metalls in der galvanischen Kette herabgebracht wird.

2. Die Erinnerung aber an die neuen elektrochemischen Eigenschaften, welche Brugnatelli der Kohle durch Salpetersäure mitgetheilt, mussten ganz besonderes Interesse gewinnen, nachdem die neuen Eigenschaften bekannt wurden, welche die Baumwolle durch rauchende Salpetersäure (oder noch besser durch mit concentrirter Schwefelsäure gemischte rauchende Salpetersäure) erhält. Und so wie die thermoxydirte Kohle sich dem Ansehn nach nicht von gewöhnlicher Kohle unterscheidet: so ist auch die

---

[33]) Vgl. Grove's Beobachtung im Phil. Mag. Ser. III. Vol. XV. p. 292. übers. in Poggendorff's Annalen d. Phys. u. Chem. B. 49. S. 600.

Digitized by Google

thermoxydirte Baumwolle (oder Schiessbaumwolle) dem Ansehn nach von gewöhnlicher Baumwolle nicht zu unterscheiden. Während nun diese Schiessbaumwolle vollständig abbrennt in der Flinte, besteht der Hauptfehler unsers Schiesspulvers darin, dass es nicht vollständig abbrennt, sondern bei dem Schiessen zum Theil unverbrannt herausgeworfen wird. Dieser Fehler liesse sich also vielleicht durch Anwendung der thermoxydirten statt der gemeinen Kohle bei der Bereitung des Schiesspulvers beseitigen. Die lange Ausdauer jener thermoxydirten oder elektrisch geladenen Kohle (wie Stücke zeigen, die ich vierzig Jahre lang aufhob) käme dabei besonders in Betrachtung, so wie der Umstand, dass diese thermoxydirte Kohle keineswegs Feuchtigkeit anzuziehen scheint, wie die Schiessbaumwolle. Vorzüglich beachtungswerth aber muss uns nun das sogenannte Ueberbrennen der Kohle bei Bereitung des Schiesspulvers vorkommen. Denn gewiss wird niemand glauben, dass die Kohle, um gutes Schiesspulver zu geben, noch zum Theil hydrogenirt[34]) sein müsse, wenn er erwägt, dass diese hydrogenirte Kohle von so kurzer Dauer ist. Vielmehr scheint die merkwürdige Thatsache, dass in Cylindern gebrannte Kohle, wenn sie gut ausgebrannt ist, sehr schlechtes Schiesspulver giebt, während fast viermal so starkes erhalten wird, wenn man die Erhitzung unterbricht, sobald die Flamme an den Cylindern anfängt, sich rein blau zu zeigen; diese Thatsache scheint dafür zu sprechen, dass selbst das Kohlenoxydgas im gleichen Sinne wie Salpetersäure (nur schwächer) eine Thermoxydirung der Kohle (oder elektrische Ladung im Sinne Ritter's) bewirke. Und so erhalten wir bei Combination der thermoxydirten Kohle Brugnatelli's mit der thermoxydirten Baumwolle[35]), wenn diese letztere auch nicht sogleich das Schiesspulver zu verdrängen vermag, doch von ihr Anleitung zur Vervollkommnung desselben.

---

[34]) Diese Ansicht spricht selbst der gründliche Kenner des Schiesspulvers, Moritz Meyer, aus in Erdmann's Journ. f. techn. u. ökonom. Chem. 1831. B. 2. S. 528., wo er also sich ausdrückt: „Befreit man die Kohle ganz von Wasserstoff, so ist sie bekanntlich nicht mehr brennbar. Bei nicht hinreichender Aufmerksamkeit kann man es bei Cylinderverkohlung leicht zum Ueberbrennen bringen. Nach einigen in Ostindien angestellten Versuchen gab Schiesspulver mit in Cylindern vollkommen ausgeglühter Kohle eine Wurfweite von 52 Schritt und dasselbe Pulver mit gut gebrannter Kohle 200 Schritt. Wenn man aber aus den Cylindern die Kohle herausnimmt, sobald die Gasflamme anfängt, sich rein blau zu zeigen (Kohlenoxydgas), so steht ein Ueberbrennen nicht zu fürchten."

[35]) Vgl. auch was über die merkwürdige Entdeckung Schönbein's und Böttger's zur Sprache kam in der Hallischen naturforschenden Gesellschaft am 7. Nov. 1846, und mitgetheilt ist im Intelligenzblatt zur Allg. Litt. Zeit. Decbr. 1846. N. 69. S. 564. 565. Ich hebe daraus noch folgende Stelle aus: „Dazu, dass die von Brugnatelli und Volta über thermoxydirte Kohle im Journ. d. Chem. u. Phys. mitgetheilte Beobachtung in Vergessenheit kommen konnte, trug wesentlich bei, dass vom Jahr 1806—1810 kein Register dieses Journals vorhanden ist; ebenso fehlt es den letzten 15 Bänden von 1829—1833. Möchte sich ein junger Mann entschliessen, ein Register über das ganze Journal von 1806 — 1833 zu bearbeiten, blos mit Beziehung auf die Columnentitel, wodurch es eben so kurz als brauchbar werden würde, da diese Columnentitel wechseln mit dem wechselnden Inhalte der Abhandlung."

Digitized by Google

II.

1. Noch ein anderer praktisch chemischer Gegenstand kam im letzten Abschnitte dieser ursprünglich zur Publication im Journal für praktische Chemie bestimmten Abhandlung zur Sprache, worüber Mittheilungen noch länger hinauszuschieben nicht zweckmässig wäre. Es handelt sich auch hier von in Zeitungen besprochenen, gleichfalls im Grossen und gleichfalls zum Kriegsgebrauch anwendbaren Dingen. Als ich nämlich den letzten Abschnitt jener Abhandlung niederzuschreiben im Begriffe gewesen, da war in den Zeitungen (im März vorigen Jahres) die Rede „von einem der Staatsbehörde für die Summe von 36000 Thalern angebotenen Geheimniss eines galvanoplastischen Kanonengusses, wodurch die Kanone ohne weiteres fertig geliefert und ihre Ausdauer bedeutend gesteigert werden soll." Höchst achtbare Namen von Männern waren genannt, welche, zur Prüfung der Sache aufgefordert, sich beifällig darüber erklärt. Diess musste mich nothwendig zu folgender Note veranlassen, deren baldige Publication in dem bezeichneten wissenschaftlichen Zusammenhange mir schon damals willkommen gewesen wäre. Schon in der Einleitung zur vorliegenden Abhandlung war nämlich davon die Rede, dass bei der Bildung des festen Cämentkupfers durch jene constante Kette, von welcher die Galvanoplastik abhängig, unter gewissen (im Journal für praktische Chemie B. 34. S. 402—408 näher bezeichneten) Bedingungen merkwürdige Zuckungen der Magnetnadel im Multiplicator entstehn, welche als abhängig zu betrachten sind von krystall-elektrischen Beziehungen, und an die in andern Fällen bei Krystallisationen (den schönen Versuchen Rose's gemäss) entstehenden Lichtblitze uns erinnern. Diesen blitzartig eintretenden sehr lebhaften krampfartigen Zuckungen bat ich wenigstens da einige Aufmerksamkeit zu schenken [36].

---

[36]) Man kann den überraschenden Versuch leicht zu einem Collegienversuche machen. Denn ob man gleich nicht den Zeitpunkt zu bestimmen vermag, wo die von Bildung festen Cementkupfers abhängigen Zuckungen eintreten: so wirkt doch der höchst einfache (im Journ. f. prakt. Ch. B. 34. S. 401. abgebildete) Apparat, einmal aufgestellt, sehr lange Zeit fort. Man darf also die am besten aus mehreren Gliedern (welche man beliebig in die Combination aufnehmen oder partiell schliessen kann) bestehende Wach'ische Kette, verbunden mit einer secundären Platinakette und einem empfindlichen Multiplicator, auf einem feststehenden, an der Wand befestigten Repositorium nur ruhig und ungestört stehen lassen. Das Ungestörte bezieht sich aber keineswegs darauf, dass nicht von Zeit zu Zeit durch Aushebung eines Leitungsdrahtes aus einer von den Quecksilberschalen (wozu Aushöhlungen in grössern Korken dienen können, welche zugleich die Leitungsdrähte festhalten) die Kette geöffnet werde, was vortheilhaft zu sein scheint. Es werden sich dann Zuckungsperioden auch in der Zeit einstellen, wo die Studirenden ins Collegium kommen, so dass nebenbei diese merkwürdigen, von Krystallelektricität abhängigen Zuckungen (vor oder nach der Vorlesung) den Einzelnen mit allen den verschiedenen Modificationen der Erscheinung gezeigt werden können. Zu diesen Modificationen gehört die schon von mir hervorgehobene Empfindlichkeit gegen die leiseste, auf den mit Cämentkupfer umwachsenen Zinkdraht wirkende Erschütterung, wozu (wenn eine

Digitized by Google

wo sie nebenbei sich ohne Mühe einleiten lassen, namentlich bei galvanoplastischen Versuchen, da hier vielleicht noch aus andern Gründen die Einschiebung einer secundären Kette in gewissen näher zu studirenden Fällen zweckmässig sein könnte. Und in diesem Zusammenhange war folgende Note meinem Manuscripte beigefügt:

„Wenn die Galvanoplastik sich nicht auf die bei Darstellung fester Metallvegetationen auf nassem Wege zu erhaltenden Krystalle, sondern auf Nachbildung bezieht, wie die Natur schon bei Afterkrystallen sie zeigt: so ist für die Schärfe der Nachbildung offenbar der sogenannte amorphe Zustand günstiger als der krystallinische. Das Studium der Bedingungen, welche die Krystallisation mehr oder weniger begünstigen, wird also nun auch technisch interessant in galvanoplastischer Beziehung. Als im hiesigen chemischen Laboratorium (wie das Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1830. B. 1. d. g. R. B. 58. S. 43 ff. zeigt) zuerst kunstgemäss nach Willkür, in Abhängigkeit von einem zuvor in solcher Weise noch nicht eingeleiteten constanten galvanischen Strome, dessen Stärke man in seiner Gewalt haben konnte, Kupfervegetationen in metallischem Zusammenhange dargestellt wurden, trug man diese für die krystallelektrische Theorie so wichtige neue Thatsache auf andere Metalle, namentlich Silber, Zinn, Antimon, Wismuth über, freute sich der gewonnenen schönen Kupfer- und Silber-Krystalle, sowie anderer, den krystallinischen sich anschliessender, dendritischer Gebilde, wie die Natur sie liefert, die Kunst aber bisher noch nicht in fester Gestalt darzustellen vermocht. Die Bedingungen ihrer Entstehung zu studiren schien die Hauptaufgabe, worauf es ankomme. In gleichem Geiste wiederholte ein rühmlich bekannter Chemiker, Göbel in Dorpat,

---

Zuckungsperiode herannaht) selbst ein Hauch dienen kann auf den dünnen übersilberten Kupferdraht, welcher zur Vermittelung der Leitung an dem Zinke befestigt ist. — Diese Erschütterung wirkt analog dem leisen Hinrühren an Krystalle in der Periode ihrer leuchtenden Bildung, z. B. bei Rose's Auflösung des glasartigen Arseniks in Salzsäure. Jener Apparat, wo elektrische die Nadel in krampfhafte Bewegung setzende momentane Impulse an die Stelle jener Lichtblitze (bei Nichtleitern) treten, wird aber am besten mit zwei Multiplicatoren in Verbindung gesetzt, von denen der eine (mit Beziehung auf heftige Krampfperioden) der Doppelnadel nur bis 90° Ausschlag gestattet, während bei dem andern die Doppelnadel im Kreis umher sich bewegen kann. Letztere wird, obwohl ganz gleiche Stärke der beiden Nadeln schwer zu erreichen, doch ganz leicht mit Hülfe der Torsion der Coconfäden, woran die Doppelnadel hängt, so gerichtet, dass sie von Ost nach West steht, in welcher Lage also auch die Multiplicatorwindung sich befindet. Tritt nun eine etwas lebhafte Zuckungsperiode ein: so wird die im Kreis umhergedrehte Doppelnadel am liebsten eine Stellung von Nord nach Süd annehmen, und dadurch der Wirkungssphäre der Multiplicatorwindung entzogen werden. In der Art erhält man eine sichere Controlle eingetretener Zuckungsperioden, ohne dass man nöthig hat (was langweilig sein würde) den Apparat zu beobachten, besonders wo es gilt, vorläufig die Wirksamkeit verschiedener, in fester krystallinischer Form reducirter Metalle zu prüfen. So z. B. zeigte sich Zinn unter gewissen Umständen eben so wirksam als Kupfer zur Hervorrufung jener merkwürdigen zuckenden Bewegung der Doppelnadel. (Vergl. auch Note 43. u. 44.)

Digitized by Google

diese Versuche[37]). Aber sein College Jacobi machte zuerst technischen Gebrauch von der Sache. Und gegenwärtig ist sogar von Kanonen aus festem Cämentkupfer in Zeitungen die Rede. Es ist für mich interessant, die noch jetzt im hiesigen physikalischen Cabinet aufbewahrten ersten, nach Willkür in mannigfachen Modificationen dargestellten Proben fester Kupfer-, Antimon-, Wismuth-, Silber-Vegetationen an jene auf demselben Wege nun dargestellten Kanonen in Gedanken anzureihen. Wenn aber die technische Anwendung der Sache mit Recht Anspruch macht auf Belohnung (wie sie auch Jacobi auf eine höchst achtbare und wissenschaftliche Bestrebungen ermunternde Weise erhalten hat): verdient nicht gleichfalls der unsern Dank, dessen wissenschaftliche Forschung die Möglichkeit einer solchen technischen Anwendung herbeigeführt? Meinen damaligen Gehülfen bei dem physikalischen Cabinet und chemischen Laboratorium meine ich, den nun in Bielefeld als Director der dortigen Gewerbschule angestellten Herrn Doctor Wach, dessen, als er hier studirte, am 3. Aug. 1829 von der Hallischen philosophischen Facultät gekrönte akademische Preisschrift jene vorhin erwähnte Abhandlung über Darstellung fester Metallvegetationen auf nassem Wege (oder, wie er bei Kupfer sich ausdrückte, „über Bildung figurirten Cämentkupfers") enthält; eine Abhandlung, welche mit so grosser Umsicht und Gründlichkeit geschrieben ist, dass der ehrwürdige Pfaff in Kiel schon vor mehreren Jahren, nachdem er öffentliche Vorlesungen über Galvanoplastik gehalten, es geradezu gegen mich aussprach, dass er von wissenschaftlicher Seite nichts gefunden habe, was dieser Abhandlung beizufügen gewesen wäre. Darum wird im XI. Bande (oder Registerbande) des physikalischen Wörterbuchs, welcher von Muncke mit gewohnter Sachkunde abgefasst einen Reichthum von Nachträgen zu diesem Werk enthält, und worin auch umständlich von Darstellung fester Metallgebilde auf galvanischem Wege (d. h. der Galvanoplastik) die Rede ist, S. 218. geradezu ausgesprochen: „der erste Erfinder der Galvanoplastik, ebenso wie der Säule von constanter Wirkung, ist Wach." Und liest man die darauf folgende gründliche Abhandlung über Galvanoplastik, so muss man eingestehn, dass von wissenschaftlicher Seite dem, was mit so mannigfaltiger Abänderung der Versuche von Wach dargelegt wurde, seit der Zeit nichts beigefügt ist, was für die Wissenschaft von Bedeutung wäre, so mannigfach und sinnreich auch die technischen Anwendungen sind. Vielleicht dass die grossartige Anwendung der Sache zum Kriegsgebrauch neue wissenschaftliche Wahrheiten herbeiführt, indem es sich nun darum handelt, auch die Härte des fest dargestellten Metalls in seine Gewalt zu

---

[37]) Vgl. Göbel's vermischte Untersuchungen und Bemerkungen im Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1830. d. g. R. B. 60, wo derselbe S. 414. von seiner Wiederholung der Wach'ischen Versuche über feste Metallvegetationen spricht, dessen Angaben er vollkommen bestätigt gefunden, während seine Versuche ausser Kupfer sich besonders auf in fester Gestalt reducirtes Silber, Gold und Platin bezogen. Unmittelbar darauf folgt eine Bemerkung über die oft vorkommende magnetische Polarität, wodurch Stücke russischen Platinerzes sich auszeichnen, welche bestätigt, was vorhin mit Beziehung auf die Erklärung des Wortes Elektron zur Sprache kam.

Digitized by Google

bekommen. Auf die Bedingung zur Erhaltung einer Legirung aus Kupfer und Zink (Messings) hat schon Wach bei Bildung seines figurirten Cämentkupfers aufmerksam gemacht (a. a. O. S. 46 f.). Und da ein kleiner Zusatz von Zinn zum Kupfer diesem die nöthige Härte giebt, um als Kanonenmetall zu dienen: so ist kaum zu zweifeln, dass auf ähnliche Weise wie Messing sich auch Kanonenmetall werde erhalten lassen. Auf trockenem Wege können wir sogar stahlartiges Kupfer darstellen. Um so mehr sind wir also wenigstens bei dem Kupfer zu der Hoffnung berechtigt, auch Meister zu werden vom Grade der Härte oder Weichheit des auf nassem Wege reducirten Metalls. Da, wie vorhin gesagt, die Galvanoplastik in ihrer technischen Anwendung auf der Verkleinerung beruht krystallinischer Bildung bis zum sogenannten Amorphismus: so könnte man auf den Gedanken kommen, dass selbst die Leitung durch lange Drähte unter gewissen Bedingungen von Einfluss auf den krystallinischen Zusammenhang, und dadurch auf die Härte oder Weichheit des in fester Gestalt reducirten Metalles sein möge. Jedoch die schon von Wach in diesem Sinne angestellten Versuche (a. a. O. S. 56.), wobei er statt der Thierblase oder überhaupt poröser Körper (namentlich Thons, Dachschiefers, Korkrinde, Hollundermarkes) andere die Raschheit des elekrischen Stromes schwächende Mittel anwandte, führten bei langen Drahtleitungen nicht zum Ziele, wohl aber bei der Leitung durch dünne, heberförmig gebogene Glasröhren, wodurch es (in dem schönen Versuche Taf. I. Fig. 5.) gelang, von moosartiger bis zu traubenartiger und endlich krystallinischer Metallbildung zu gelangen. Nur die Einschaltung einer secundären Platinakette (womit die oben erwähnten krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel zusammenhängen) wurde noch nicht versucht, während eben diese krampfhaften Zuckungen auf die Bedeutsamkeit dieser Einschaltung für krystallinische Bildung aufmerksam machen."

2. So vorzugsweise diese Note geeignet war zur Publication in einem Journale für praktische Chemie, so ist sie doch auch in vorliegender Zeitschrift ganz an ihrer Stelle, besonders da nun noch folgende Zusätze beigefügt werden können. Wir wissen nämlich gegenwärtig, dass jene Ankündigungen in den Zeitungen nicht ganz richtig waren; ja dass es sich gar nicht von galvanoplastischer Verfertigung von Kanonen, sondern nur von Ueberziehung eiserner Kanonen mit festem Cämentkupfer handelt. Die eisernen Kanonen widerstehn besser dem Stosse der im Laufe nicht ganz streng in gerader Linie sich bewegenden Kugel, und halten daher eine grössere Anzahl von Schüssen aus, während sie auch durch grössere Leichtigkeit sich empfehlen; aber sie vertragen nur geringere Ladung, leichter dem Zerspringen ausgesetzt. Diesem Uebelstande wird nun abgeholfen durch Ueberziehung mit festem Cämentkupfer, wobei vielleicht die von Wach angegebenen Vorschriften und die von ihm zuerst dargestellten constant wirkenden Ketten der Hauptsache nach wohl eben so ausreichen möchten, wie sie z. B. bei der Vergoldung ausreichten. Was die auf demselben Wege zu bewirkende galvanoplastische Verzinnung anlangt: so ist hierbei die Praxis längst der Theorie vorausgegangen. Denn hierbei wurde immer eine angemessen

schwache galvanische Kette angewandt lange zuvor, ehe man durch Galvani und Volta die durch Metallcontact zu erregenden elektrischen Ströme kennen gelernt hatte. Es war handwerkliche Erfahrung, dass man Zinn in zwei Theilen Alaun (dem zwei Theile Kochsalz und ein Theil Weinstein beigefügt) auflösen, aber in der Auflösung noch ein Stück unaufgelösten Zinnes lassen müsse, welches mit den Stecknadeln, die man zur Verzinnung in die Auflösung wirft, in Berührung kommt. Fehlt diese Berührung mit Zinn: so können die Nadeln noch so lange in der Auflösung liegen und werden nimmermehr sich verzinnen. Aber man konnte diesen von der Technik gewonnenen Erfahrungssatz nicht weiter ausdehnen und etwa auch bei Vergoldung, Verkupferung u. s. w. benutzen, weil die Kenntniss des wissenschaftlichen Princips fehlte, dem gemäss man handelte. Um dieses Princip aufzufinden, dazu gehörte der Geist eines Volta, selbst nachdem Galvani's überraschende Entdeckungen vorangegangen. Und nun erst wurde die zuvor nur im Verborgenen wirkende Elektrochemie ans Licht gezogen, gleich einflussreich in wissenschaftlicher, wie in technischer Hinsicht. — In der neuen Ausgabe von Gehler's physikalischem Wörterbuche, B. XI. S. 237. unter d. Art. Vergoldung, wird es als höchst auffallend bezeichnet, „dass gleich nach der Erfindung der Voltaischen Säule im Jahr 1803 Brugnatelli vermittelst des elektrischen Stromes vergoldete, ohne seine Entdeckung weiter zu verfolgen. Den metallischen Niederschlag (heisst es) gewahrte er an den Polardrähten von Gold, Silber und Platin; ja, er ging noch weiter und vergoldete Silbermünzen, indem er sie mittelst eines stählernen Drahtes mit dem negativen Pole der Säule verband und in eine gesättigte für diesen Zweck bereitete Lösung von Ammoniakgold eintauchte (Annali di Chimica. 1803. Van Mons Journ. de Chimie et de Phys. T. 5.)." Aber unmöglich konnte Brugnatelli zu gleichbleibenden Resultaten gelangen, da er die Stärke des elektrischen Stromes nicht in seiner Gewalt hatte. Diess ist es eben, was zuerst Wach gelehrt hat, und worauf hier alles ankommt. Und selbst nachdem die zur Hervorbringung festen Cämentkupfers nöthige Stärke und Gleichmässigkeit des Stromes durch galvanische Ketten von constanter Wirkung gewonnen war: so kam es noch auf Nebenbedingungen (tiefere oder minder tiefe Eintauchung in die Kupferauflösung) an, um Drähte mit einem festen Kupferbeschlag zu überziehn, wovon in der Abhandlung von Wach S. 47. ff. die Rede, sowie auch der S. 56. und 57. erwähnte Versuch hierher gehört. Man sieht also, von wie vielen in theoretischer und technischer Hinsicht gleich wichtigen Nebenrücksichten die Feststellung des Hauptsatzes abhängig war, dass die Cohärenz (welche man gewöhnlich blos als abhängig betrachtet von der allgemeinen Körperanziehung) hier einzig und allein abhängig sei von elektrischen Beziehungen, und zwar von der Art der Leitung des elektrischen Stromes; die Feststellung dieses Hauptsatzes erforderte um so mehr eine ganze Reihe von Versuchen, je mehr er in Gegensatz kam mit den geltenden Theorien.

3. Schon im Jahr 1822 war das im Mansfeldischen gewonnene sogleich fest in mannigfacher krystallinischer Bildung vorkommende Cämentkupfer für mich ein Gegenstand specieller Aufmerksamkeit

Digitized by Google

gewesen; und bei der ersten wissenschaftlichen Versammlung der Naturforscher und Aerzte Deutschlands (hier in Halle im September 1823) suchte ich durch Vorzeigung interessanter Proben jenes merkwürdigen, im Mansfeldischen gewonnenen Haar- und Faden-Kupfers die Aufmerksamkeit der versammelten Naturforscher auf diesen Gegenstand hinzulenken. Um hierüber in dem von mir damals herausgegebenen Journal auch öffentlich sprechen zu können, bat ich einen theoretisch sowohl als praktisch sehr unterrichteten Mann, den an der Bergschule in Eisleben angestellten Herrn Plümicke, die Nebenumstände zu bezeichnen, unter welchen dieses krystallinisch gebildete Cämentkupfer erhalten wird, da man in Ungarn, wo man so viel Cämentkupfer gewinnt, nichts von solchen krystallinischen, dem sogenannten Silber- und Blei-Baum ähnlichen, und zwar sogleich in fester Gestalt sich darstellenden Gebilden gehört. Aus der hierdurch veranlassten interessanten (im Jahrb. der Ch. u. Ph. 1825. B. 2. d. g. R. B. 44. S. 89—109. mit einem Vorworte des Herausgebers über Cohäsion in Abhängigkeit von krystallelektrischer Anziehung [38]) abgedruckten) Abhandlung sah man wohl, dass im Mansfeldischen dem Cämentkupfer mehr Zeit zur Ausbildung gegönnt wird, als in Ungarn; was aber die nähern Umstände anlangte, welche auf willkürliche Darstellung solches festen Cämentkupfers führen könnten, so äusserte Herr Plümicke, eben weil bei den in kleinem Massstabe auf nassem Wege so mannigfach veranstalteten Metallreductionen noch nicht dergleichen feste Metallgebilde vorgekommen waren, mit Beziehung auf Berthollet's chemische Theorie S. 400: „da das Massenverhältniss wahrscheinlich bedeutend einwirkt, so möchte aus Versuchen im Kleinen, wenn sie überhaupt ein Resultat gäben, wenig zu folgern sein, und im Grossen bleibt es mancherlei Schwierigkeiten unterworfen, zumal da der Process der Krystallbildung überhaupt noch so sehr im Dunkeln liegt, durch geeignete Versuche zur Gewissheit zu gelangen.“ Diese Ansicht schloss sich ganz consequent den allgemein geltenden Principien an, und der oben erwähnte, auf die längere Zeit, welche man im Mansfeldischen dem Cämentkupfer zur Ausbildung gönnt, sich beziehende Nebenumstand schien diese Ansicht zu bestätigen. Da ich aber die scheinbar indifferente Körperanziehung aus der polarischen gesetzmässig abgeleitet, und eben darum, sowie noch aus andern Gründen die krystallelektrische Anziehung statt der allgemeinen Körperanziehung an die Spitze der Physik gestellt (s. Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1823. B. 39. S. 214—250.), auch die Zustandsveränderungen der Körper, wovon ihr luftförmiger, flüssiger oder fester Zustand abhängig ist,

---

[38]) Auch eine Abhandlung von Clement reihte ich an, worin Clement Nachricht giebt von einer Kupferreduction aus schwefelsaurem Kupfer ohne Eisen. Die Auflösung von Kupfervitriol, getrübt von unlöslich basisch schwefelsaurem Kupfer, stand längere Zeit, um sich zu klären, in einer Kufe, welche zur Hälfte in die Erde eingegraben war. Hier sah man an den innern Wänden, und zwar immer an der Fuge zweier Dauben kleine Schwämme von metallischem Kupfer sich bilden. Die Kupferstücke hatten sich, wo sie an der Kufe anlagen, so „an dem Holze abgeformt, dass ihnen die Streifen eingedrückt waren.“

Digitized by Google

aus demselben Princip, also aus ganz schwachen elementaren krystallinischen Kräften (den im Journ. d. Chem. u. Phys 1812. B. 5. S. 49—74. dargelegten Thatsachen gemäss) abgeleitet und aus diesem Standpunkte stets in meinen akademischen Vorlesungen die Elektrochemie vortrug: so gelang es mir nicht selten, diejenigen unter meinen Zuhörern, welche nicht blos das Herkömmliche zum Zwecke des Examens wissen wollten, für die eben bezeichneten von der geltend gewordenen Doctrin sehr abweichenden Ansichten ins Interesse zu ziehn. Dass dazu Herr Wach gehörte, zeigt schon seine erste Abhandlung über das rauchende Wesen der Schwefelsäure[39]) (Journ. d. Chem. u. Phys. B. 50. S. 1—53.). Bei der in dieser Abhandlung S. 47—50. umständlich besprochenen merkwürdigen partiellen Umwandlung der englischen Schwefelsäure in rauchende, die mit krystallinischer Cohäsion (asbestartig) auftritt[40]), ist es nur ein gewisser, re-

---

[39]) Die Haupttendenz dieser Abhandlung nämlich ist, die Abhängigkeit des sogenannten Isomerismus von krystallelektrischen Principien durch dargelegte Thatsachen nachzuweisen. Und dieselbe Tendenz hat die so gründliche Abhandlung desselben Verfassers über pyrophosphorsaure Ammoniak-Bittererde (Journ. d. Ch. u. Ph. B. 59. S. 297. etc.). Nebenbei bemerke ich, dass die Auffassung der Elektrochemie auf dem Standpunkte der Krystallelektricität, wie ich schon bei einer andern Gelegenheit erinnerte, nicht berührt wird von den Einwendungen, welche Dumas gegen Elektrochemie gemacht hat, sondern sehr wohl vereinbar ist mit seinem Substitutionsgesetz, das dem Mathematiker wichtig scheinen muss, um einen Anhaltpunkt zu haben bei der Unendlichkeit der möglichen Combinationen, wie sie hervorgeht aus der gründlichen Abhandlung Rothe's über Anwendung der combinatorischen Analysis auf Pflanzenanalysen. S. die Entwickelung der Pflanzensubstanz von Nees v. Esenbeck, Bischof und Rothe. Erlangen 1819.

[40]) Es ist auffallend, dass diese schon im Jahr 1819 in Trommsdorf's Journ. der Pharmacie mitgetheilte, und einige Jahre darauf von C. G. Gmelin bestätigte Beobachtung bis jetzt noch nicht so glücklich war, auch nur der Erwähnung werth gehalten zu werden in den Compendien der Chemie. Und doch ist diese theilweise Umbildung der englischen Schwefelsäure noch merkwürdiger als die ganz analoge Umbildung des Glases in krystallinisches Glas (sogenanntes Reaumur'sches Porzellan), welches, in so fern es den Temperaturwechsel besser verträgt, weniger spröde ist als gemeines Glas. In der That lauft das sogenannte Adouciren des Roheisens, worüber derselbe Reaumur viele Versuche angestellt, auf dasselbe Verfahren hinaus. Und handelt es sich nicht davon, die ganze Masse zu erweichen, sondern blos die Oberfläche weicher und geschmeidiger zu machen, so ist das Verfahren selbst auf grössere Eisenstücke, wahrscheinlich also auf gusseiserne Kanonen, die man mit einer Hülle von mehr elastischem Eisen umgeben will, anwendbar. Auch ein anderes Verfahren Gusseisen oberflächlich zu erweichen (wobei Hydrogen die Hauptrolle zu spielen scheint) kam im Jahr 1827 von Amerika her zur Sprache (s. Dingler's polytechn. Journ. 1828. B. 29. S. 156.). Es bietet sich also eine zweifache Methode dar, die Oberfläche des Gusseisens auf eine mehr oder minder tief in die Masse eindringende Weise zu erweichen, und sonach gusseiserne Kanonen mit einer Hülle von weichem Eisen zu umgeben. Kommt nun noch die Hülle von weichem Cämentkupfer dazu, so wird dem Zerspringen noch mehr entgegengewirkt. Es ist nämlich unmöglich, dass Hüllen von verschiedener Cohäsion durch eine und dieselbe ausdehnende Kraft ganz streng in demselben Momente zerrissen werden. Nur dann also, wenn dieser Zeitun-

Digitized by Google

lativ schwacher, aber eine Zeit lang anhaltender Temperaturgrad, welcher (ebenso wie bei Verwandlung des Glases in Reaumur'sches Porzellan) die krystallinische Bildung hervorzurufen vermag. Darum bedurfte es blos der Combination dieser Erscheinung mit den in meiner vorhin erwähnten Abhandlung über Zustandsveränderung der Körper zusammengestellten, um auf den Gedanken zu kommen, ob nicht durch ähnliche Modification des elektrischen, die Metalle reducirenden Stromes auf krystallinischen Zusammenhang Einfluss zu gewinnen sein möchte. Auf dem Standpunkt einer Theorie nämlich, welche nicht die sogenannte allgemeine Körperanziehung, sondern die polarische krystallelektrische an die Spitze der Physik stellt, hängt natürlich selbst die Elektricitätsleitung von einer (nach der verschiedenen Natur der Körper leichter oder schwerer erfolgenden) Modificirung der Krystallelektricität ab, und der Leitungswiderstand ist daher (was durch mehrere Thatsachen nachgewiesen werden kann) nicht (gleich dem der Röhren, wodurch eine Flüssigkeit strömt) blos passiver, sondern vielmehr activer Natur. In diesem Sinne war es nichts auffallendes, gerade die schwächsten elektrischen Ströme durch Leiter von grösster Länge ungeschwächt durchgehn, und diese langen Leiter zur Verstärkung derselben namentlich bei Multiplicatoren wirken zu sehn, während durch dieselben Multiplicatoren starke elektrische Ströme geschwächt werden [41]). Der Leitungswiderstand, den starke Ströme (starke elektrische Funken) hervorrufen, kann so gross werden, dass der Draht glühend wird und zerstiebt. Blos von schwachen Strömen können wir also etwas erwarten, wenn Hervorrufung krystallinischen Zusammenhangs beabsichtigt wird. Und dieser Ansicht war günstig, was Plümicke mit Beziehung auf die Mansfelder Kupfervegetation mitgetheilt. Denn die regelmässigen, den krystallinischen analogen Formen (namentlich Haar- und Faden-Bildung) traten blos da ein, wo die Cämentation 5—6 Monate dauerte. Und dass unter den verschiedenen Ansichten, die bei Auffassung dieser Erscheinung möglich, das Hauptgewicht zu legen sei auf die Schwächung des elektrischen Stromes, solches wird dargethan durch den schon vorhin erwähnten Versuch von Wach, welcher auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 5. dargestellt, wo die verschiedenen Bildungsformen des Cämentkupfers sich in Abhängigkeit zeigten von den verschiedenen Graden der Schwächung der Kette durch Leitungswiderstand. Das bequemste Mittel zur Schwächung des elektrischen Stromes bot der Durchgang durch poröse Körper [42]). Nur diess bemerke ich, dass, wenn man nicht

---

terschied des Zerreissens der einzelnen Hüllen zur verschwindenden Grösse wird, kann ein Herumschleudern der zersprungenen Theile stattfinden.

41) Auch durch andere Versuche wurde die Aufmerksamkeit hingelenkt auf die Bedeutsamkeit schwacher elektrischer Ströme, in welcher Hinsicht ich mich beziehe auf das im Jahrb. d. Chem. u. Phys. 1825, oder B. 44. S. 119. u. 365., sowie 1828. B. 52. S. 236—242. Mitgetheilte.

42) Auf die Bedeutsamkeit poröser Körper hinsichtlich auf den Durchgang elektrischer Ströme leitete Porrett's Versuch hin, dem späterhin Versuche über sogenannte Endosmose und Exosmose sich anschlossen. Nun wo es sich von grossartiger technischer Benützung durch Leitungswider-

Digitized by Google

die eben bezeichneten theoretischen Ansichten im Sinne hatte, die Einmischung poröser Körper, namentlich der Blase, bei der Kupferreduction leichter irre leiten, als zum Ziele führen konnte. Denn wirklich hatten schon vor Wach (wie dessen Abhandlung S. 22—24. zeigt) sehr achtbare Physiker mit Blase umbundene Röhren, worin sich ein Eisendraht befand, in Kupferlösungen gebracht mit Hinsicht auf die sogenannte Endosmose und Exosmose. Nothwendig musste dabei festes Cämentkupfer unten an der Blase entstehn; aber sie schenkten der Sache keine Aufmerksamkeit, wahrscheinlich weil der Gedanke sie irre geleitet, dass die Anlegepunkte, welche die Blase darbot, der Zusammenhäufung krystallinischer Metalltheile günstig sei. Dass es auf diese Anlegepunkte hier gar nicht ankomme, sondern blos auf die angemessene Hemmung der Schnelligkeit des elektrischen Stromes, welche auch durch andere, wenn gleich minder bequeme Mittel zu erreichen; diess zu zeigen war der Hauptpunkt, worauf es ankam. Und diess wurde nachgewiesen von Wach durch die mannigfachste Abänderung der Versuche. Jetzt erst trat das Naturgesetz mit Klarheit hervor, das zu der mannigfachsten und nützlichsten Anwendung in der Technik geführt hat, während es gegenwärtig in seiner Anwendung zur Vervollkommnung des schweren Geschützes in so hohem Grad einflussreich und gewinnbringend wird. Aber dieses auf Hervorrufung der Cohäsion durch Elektricität sich beziehende Naturgesetz ist nun auf dem Standpunkte der neuesten Physik noch einer schärferen Bestimmung fähig, welche nur durch eine neue Reihe von Versuchen herbeigeführt werden kann. Und da es sich hier von Dingen handelt, denen ich stets vorzugsweise meine Aufmerksamkeit zugewandt, so könnte ich dergleichen Versuche leicht in Vorschlag bringen, um, worauf es nun ankommt, die Art der Cohäsion mehr in die Gewalt zu bekommen. Dergleichen theoretisch ausgedachte Versuche nützen aber wenig, so lange niemand da ist, der nicht blos lebendiges wissenschaftliches Interesse, sondern auch ungestörte Musse hat, sich der Ausführung solcher Versuche zu widmen, welche Musse dem Verfasser jener vorhin genannten auf willkürliche Darstellung festen figurirten Cämentkupfers sich beziehenden Preisschrift unmittelbar nach der Publication derselben geraubt wurde, indem ihn eine Anstellung bei der Gewerbschule in Bielefeld in ganz andere praktische Dinge hineinzog. Schon sind in seiner Abhandlung mehrere Versuche bezeichnet, die er noch anzustellen beabsichtigte, und die ihn allerdings leicht hätten weiter führen können.

---

stand geschwächter elektrischer Ströme handelt, verdient Porrett's Versuch neue Aufmerksamkeit. Der von Wach S. 61. seiner Abhandlung angeführte Versuch de la Rive's zeigt deutlich genug, dass die Erscheinung noch nicht gehörig aufgeklärt sei, und combinirt man in diesem Zusammenhange den von Wach auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 3. mitgetheilten Versuch, so sieht man, dass er dem ursprünglichen von Porrett in einer Beziehung analog, in anderer entgegengesetzt ist, während in derselben Abhandlung S. 36—40 der Weg bezeichnet ist, wie weitere Aufklärung herbeizuführen sein möchte.

Digitized by Google

4. Diese treue Geschichte der durch die Mansfeldischen Kupfervegetationen hervorgerufenen Galvanoplastik ist nun zeitgemäss, damit man es anerkenne, dass hier von einem mit Consequenz verfolgten wissenschaftlichen Ziele die Rede sei. Deutlich stellt sich dar, wie die im Sinne der geltenden Theorien durchaus nicht zu erwartende willkürliche Darstellung cohärenter Metallgebilde auf nassem Wege durch Bestrebungen herbeigeführt wurde im Sinne einer vom Princip der Krystallelektricität ausgehenden elektrochemischen Theorie. Zugleich sieht man, warum, nachdem dieses Gesetz cohärenter elektrochemischer Metallbildung aufgefunden war, die ganze Aufmerksamkeit sich zuerst der krystallinischen Metallbildung zugewandt. Und noch jetzt ist und bleibt in wissenschaftlicher Hinsicht, was mit krystallinischen Verhältnissen zusammenhängt, die Hauptsache bei diesen galvanoplastischen Bildungen, eben weil, wie Plümicke mit Recht hervorhob, der Process der Krystallbildung noch so sehr im Dunkeln liegt. — Allerdings gelang es nicht, die Bildung der baum- und strauchartigen Kupfervegetationen, oder der regelmässig ausgebildeten oktaedrischen Kupferkrystalle (S. 46. der Abhandl. Wach's) in die Gewalt zu bekommen, so wenig als die willkürliche Darstellung der schönen Granatdodekaeder von Silber (S. 60.); aber die Sorgfalt, welche Wach auf das Studium der Nebenbedingungen wandte, wodurch diese krystallinischen Bildungen begünstigt werden [43]), kann nun sich belohnen, wenn es ihm gelingen sollte,

[43]) Unter den „Bemerkungen über die praktische Anwendung der Galvanoplastik“ von W. de la Rue (aus dem Technologiste, Febr. 1846. p. 212. übers. in Dingler's polytechn. Journ. B. 99. S. 371.), welche Bemerkungen als das Resultat einer sehr grossen Anzahl von Versuchen bezeichnet werden, ist als die erste vorangestellt, „dass die metallischen Niederschläge ein sehr verschiedenes Ansehn haben, dass sie nämlich entweder deutlich krystallinisch, oder schwach krystallinisch, hämmerbar, sandartig oder schwammig sind; letzteres ist der Fall, wenn die Batterie zu kräftig, und ersteres, wenn sie zu schwach im Verhältnisse zur angewandten Metallauflösung war.“ Auch an einer andern Stelle wird noch ausgesprochen, dass, „wenn die Stärke der Batterie im Verhältnisse zur Concentration der schwefelsauren Kupferlösung vermindert wird, unter diesen Umständen sich gut ausgebildete grosse Krystalle erzeugen.“ — Es ist erfreulich zu sehn, wie denselben durch so viele Versuche (was ausdrücklich hervorgehoben) gewonnenen Satz Wach im Jahr 1829 dargethan durch den schon vorhin erwähnten, ganz einfachen, aber entscheidenden Versuch, welcher auf der Kupfertafel zu seiner Abhandlung Fig. 5. abgebildet ist, wo vier mit derselben Kupferauflösung gefüllte Gläser durch heberförmig gebogene, $\frac{1}{3}$ Zoll weite Glasröhren verbunden waren, so dass nicht durch Blase (oder andere poröse Körper), sondern blos durch die längere Leitung der Strom stufenweise geschwächt wurde. Und dadurch gelang es, von incohärenter bis zu cohärenter, zuerst moosartiger, dann traubenartiger, und endlich, wo der Strom am meisten geschwächt war, krystallinischer Metallbildung zu gelangen. — Und eben durch diese Verschiedenartigkeit der krystallinischen Bildung scheinen bei dem Versuche, wovon in Note 36. die Rede war, die krampfhaften Bewegungen der Magnetnadel veranlasst zu werden. Aus diesem Gesichtspunkte wird man verstehn, warum ich vorhin (Note 36.) eine Combination mehrerer Wach'ischen Ketten mit der leicht zu treffenden Veranstaltung empfohlen habe, dass man die einzelnen Glieder der Kette

Digitized by Google

in Verhältnisse zu kommen, wo er (in günstigerer Lage als seine gegenwärtige ist) die hierüber gemachten Erfahrungen benützen und weiter verfolgen kann. Denn nun wird der aus rein wissenschaftlichem Interesse vorzugsweise von ihm zum Studium gemachte Hauptpunkt der Galvanoplastik auch in technischer Beziehung zum Hauptpunkte werden. Handelt es sich nämlich blos von Erzeugung bildsamer fester Metallmassen: so kommt es, wie vorhin schon gesagt, vorzüglich auf Verkleinerung der Krystalle an, so dass sie wo möglich ganz unwahrnehmbar sind und die sogenannte amorphe Bildung hervorgerufen wird. Man muss also die krystallinische Bildung eben so gut befördern als vermeiden lernen. Bei jener vorhin erwähnten Verzinnung der Stecknadeln weiss man recht gut, dass sie auch mit Alaun ohne Weinstein gelingt; aber sie wird matt, d. h. die krystallelektrische Kraft gewinnt an Stärke, so dass krystallinisch ausgebildete Elemente vorherrschend zu werden anfangen, wodurch die Oberfläche ein mattes Ansehn bekommt [44]). Der Ueberzug eiserner Kanonen mit Kupfer wirkt

---

abwechselnd in die Voltaische Combination aufnehmen und abwechselnd partiell schliessen könne, um eben dadurch eine Verschiedenartigkeit in der krystallinischen Bildung anzuregen. Oefters sah ich jene Zuckungen besonders dann mit grosser Heftigkeit entstehn, wenn die mit Blase umbundene Röhre, woran sich an einer Stelle in concentrirter Kupferauflösung festes Cämentkupfer angesetzt hatte, in eine verdünnte Kupferauflösung übergetragen wurde. Als Nebenbedingung ist dabei die Einsetzung eines frisch abgefeilten Zinkdrahtes hervorzuheben, um die Bildung neuer krystallinischer Elemente neben den schon in fester Form gebildeten so anzuregen, dass sie damit in Contact kommen im Entstehungsmomente. — Vom Dimorphismus (der vielleicht durchgreifender ist als man gewöhnlich annimmt) scheint also die elektrische Erscheinung abzuhängen, so wie die Lichterscheinung nach Rose's Beobachtung bei Auflösung glasartigen Arseniks in Salzsäure entschieden vom Dimorphismus abhängt. Darum sah ich nicht sogleich bei dem ersten Anflug der Krystalle, sondern erst bei dem Contact eines secundären Anfluges mit dem primitiven die Lichtblitze eintreten. Sehr wesentlich kommt es auch hier auf einen gewissen Grad der Verdünnung der Auflösung an. — Man sieht den Parallelismus beider Erscheinungen (der optischen und elektrischen), worauf schon früher aufmerksam gemacht wurde. Um übrigens zu zeigen, wie dergleichen scheinbar blos theoretisch interessante Dinge auch praktische Bedeutung gewinnen können, will ich noch folgende flüchtige Bemerkung anreihen. Es hat mich bei einigen Versuchen überrascht, dass sehr kleine Zusätze von Weingeist zur Kupferauflösung in weit höherem Grad, als zu erwarten war, jenen eben erwähnten, von Krystallelektricität abhängigen krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel entgegenwirkten, sie wenigstens modificirten durch Abkürzung der momentan eintretenden Zuckungsperioden. Wenn nun, was der galvanoplastischen Krystallbildung günstig (nämlich ein gewisser Grad der Verdünnung der Kupferlösung) diese krampfhaften Zuckungen befördert, so könnte man umgekehrt vermuthen, dass vielleicht ganz kleine Zusätze von Weingeist jener galvanoplastischen Krystallbildung, welche man technisch zu vermeiden wünscht, entgegenwirken, und also in den von de la Rue angeführten Fällen, wo die krystallinische Bildung störend wirkt, der experimentellen Prüfung zu empfehlen sein möchten. Es fragt sich nämlich, ob neben dem Hauptgesichtspunkt, der elektrischen Leitung, nicht noch andere Nebengesichtspunkte zu beachten seien (vergl. Note 44. u. Nr. 5.).

[44]) In krystallogenetischer Hinsicht hat man es also bei jener ältesten, auf Zinn sich beziehenden Galvanoplastik weiter gebracht, als bei der

dem momentanen Zerspringen und Umherschleudern der zersprungenen Stücke entgegen, zu welchem Zwecke umgelegte Ringe von gehämmertem Kupfer nicht genügen wollten. Es wird also darauf ankommen, das Kupfer so weich als möglich zu erhalten. Und da Wach schon im Jahr 1829 auch andere Metalle als Kupfer in fester Gestalt galvanoplastisch dargestellt hat: so lässt sich fragen, durch welche Combination von Metallen in noch höherem Grad eine der Elasticität analoge, dem momentanen Zerspringen und Umherschleudern durch die Verschiedenartigkeit der Cohäsion entgegenwirkende Kraft hervorgerufen werden könne? (Vgl. Note 40.). Aus diesem Gesichtspunkte scheint sich noch ein viel weiterer Kreis technischer Anwendung zu eröffnen.

---

neuern auf Kupfer sich beziehenden. Alle, welche sich mit letzterer beschäftigt haben, gestehn zu, dass sie noch ein sehr unsicheres Handwerk sei, eben weil, wie de la Rue in der vorhin (Note 43.) angeführten Abhandlung hervorhebt, die Kupferniederschläge bald deutlich krystallinisch, bald schwach krystallinisch, hämmerbar, sandartig oder schwammig sind. „In der Regel“, fügt er bei, „muss man suchen, den hämmerbaren Niederschlag hervorzubringen; bei aller Uebung und Geschicklichkeit bleibt es jedoch sehr schwierig, ihn eine Zeit lang gleichförmig zu erhalten.“ — Noch andere die Anwendung der Galvanoplastik auf unangenehme Weise beschränkende, eben mit dieser Krystallogenie zusammenhängende Nebenbeziehungen bringt er zur Sprache. Es ist daher auffallend, dass man noch nicht, wie bei der auf Zinn sich beziehenden oben erwähnten Galvanoplastik, auch bei Kupfer eine Combination verschiedener Salzverbindungen desselben in Anwendung zu bringen versucht hat. Uebrigens hat sich namentlich bei Verkupferung des Eisens und Zinks das weinsteinsaure Kali-Kupferoxyd besonders vortheilhaft gezeigt (s. Elsner's Abhandl. in Dingler's polytechn. Journ. 1845. B. 97. S. 429.). Auf ein Mittel zur vorläufigen krystallogenetischen Orientirung machte ich in der Note 43. aufmerksam, welches man bei der in Note 36. angegebenen Verfahrungsweise ohne allen Zeitaufwand benutzen kann. Jenen krystallelektrischen Erscheinungen, welche die Bildung des festen Cämentkupfers begleiten, reiht sich übrigens noch eine elektrochemische an, welche de la Rue mit folgenden Worten erwähnt: „Eine sonderbare Eigenschaft der galvanischen Copien besteht darin, dass man sie nicht mit Zinnoberfarbe abdrucken kann, was doch bei den gewöhnlichen gestochenen Kupferplatten der Fall ist; überzieht man eine solche Copie mit Zinnoberfarbe, so wird, nachdem einige Abdrücke gemacht sind, der Zinnober schwarz, und wenn man mit dem Drucken fortfährt, so wird das Kupfer weiss und es schlägt sich so viel Quecksilber auf seiner Oberfläche nieder, dass ihr die Farbe nicht mehr anhängt. Ich glaube, dass die poröse und offene Structur der galvanischen Copie die einzige Ursache der Zersetzung des Zinnobers ist, und dass die Reinheit des Kupfers dazu nichts beiträgt.“ — Statt „poröse und offene Structur“ wird man wissenschaftlich schärfer schreiben müssen krystallinische Structur, da de la Rue selbst hervorhebt: „so sorgfältig man auch einen galvanischen Niederschlag hervorbringen mag, so beweist doch die Beobachtung desselben unter dem Mikroskop, dass seine Structur im wesentlichen immer krystallinisch ist.“ — Da nun diese krystallinische Structur die Zersetzung des Zinnobers bewirkt: so wird man auf elektrochemischem Standpunkte die Wirkung der Krystallelektricität nicht zu verkennen vermögen, besonders nachdem die krystallelektrischen Erscheinungen bei Bildung dieses festen Cämentkupfers durch die Zuckungen der Magnetnadel nachgewiesen.

Digitized by Google

5. Aus Liebe zur Wissenschaft und im Interesse für diese nun zum Kriegsgebrauche benützte, von der hiesigen Universität ausgegangene Erfindung muss ich wünschen, dass die Hingebung belohnt werde, wodurch sie allein ins Leben gerufen werden konnte, und dass also der Erfinder jener auf eine so gewinnbringende Weise benutzten constanten galvanischen Kette nun als Mann in den besten Jahren einen angemessenen Wirkungskreis finde bei den im Grossen vorzunehmenden Arbeiten, wobei man aber auch fortdauernde Studien in kleinem Massstabe nicht wird versäumen dürfen. Selbst den Mansfeldischen Kupfervegetationen, von welchen die Aufsuchung der Gesetze cohärenter Metallbildung angeregt wurde, scheint es nun zweckmässig ein erneutes Studium zu widmen. Denn die Proben von dem in Eisleben im Grossen gewonnenen Cämentkupfer, welche ich aus dem Jahr 1822 noch vor mir habe, zeichnen sich zum Theile durch grosse Zähigkeit und Weichheit aus. Auch Plümicke hebt die Weichheit und Zähigkeit dieses Cämentkupfers mit der Nebenbemerkung hervor, dass besonders das haar- und drahtförmige einen hohen Grad der Reinheit zeige. Und doch wird dieses Cämentkupfer aus sehr unreiner, nach dem dritten Versieden übrig bleibender sogenannter Schwarzlauge gewonnen. Und nach der von Plümicke angeführten Analyse Hermann's enthält der aus dieser Schwarzlauge gewonnene schwarze Vitriol ausser Kupfer und Eisen vornehmlich Zink, Nickel, Kobalt, Blei, Mangan und ausserdem Spuren eines vielleicht noch unbekannten Metalls. Von allen hier genannten Metallen ist keines ausser Blei auf nassem Wege mit Eisen reducirbar; und selbst das Blei ist gemäss den von Wach angestellten Versuchen (S. 60. seiner Abhandl.) bei dieser Reductionsweise nicht als metallisch feste Bleivegetation darzustellen; auch ist seine Verwandtschaft zu Kupfer so gering, dass man eine Legirung auf nassem Wege kaum erwarten kann. Die Hervorrufung der Cohärenz des reducirten Metalls tritt also hier in den Rang eines chemischen Scheidungsmittels des Kupfers vom Blei. Zugleich aber bietet sich die technische Aufgabe dar, zu untersuchen, ob nicht vielleicht die eben bezeichnete Verdünnung der Kupferlösung mit andern nicht reducirbaren Metalllösungen zur Beförderung der Weichheit und Zähigkeit des in fester Gestalt reducirten Cämentkupfers mitwirken könne. Denn da von der Art der Elektricitätsleitung die Hervorrufung der Cohärenz abhängt: so kann schon den allgemeinen elektrischen Leitungsgesetzen gemäss eben so wenig die Art als der Grad der Verdünnung einer Metalllösung gleichgültig sein für die Bildungsform des in fester Gestalt zu reducirenden Metalls (vgl. Note 43. und 44.). Ein neuer Weg eröffnet sich hier zur Erforschung nicht blos wie bisher der elektrischen Leitungsgesetze überhaupt, sondern speciell der elektrochemischen. In solcher Weise wird das Studium der feinsten elektrochemischen Beziehungen Hand in Hand gehn mit der grossartigsten Anwendung cohärenter, auf galvanischem Wege dargestellter Gebilde zum Kriegsgebrauche.

6. Zum Schlusse bemerke ich noch, dass die schwache aber constante galvanische Kette, wie sie zuerst Wach, und zwar auch schon als mehrgliedrige angewandt, ganz in ihrer ursprünglichen Schwäche (nämlich ohne stärkere Schwefelsäure zu gebrauchen

Digitized by Google

am positiven Pol, als die durch galvanische Zersetzung des Kupfervitriols selbst gewonnene ist) zu telegraphischen Zwecken bei den in den Preussischen Staaten angelegten Eisenbahnen gebraucht wird. Das reducirte Kupfer bringt dabei noch einen Nebengewinn. Statt der Blase dient der auch schon von Wach benutzte schwach gebrannte Thon. Es stehn nämlich kleine Becher von schwach gebranntem Porzellanthon in der Kupferauflösung, umgeben von einem starken Kupferbleche, während Zink im gehörig durchnässten Becher steht, worein gewöhnliches Brunnenwasser zu giessen genügt. Eine Kette von 4—6 Gliedern ist hinreichend, ein kleines hufeisenförmig gebogenes weiches Eisenstäbchen, an dessen Enden sich mit zahlreichen Multiplicatorwindungen (aus so dünnen Drähten, wie sie bei den empfindlichsten Multiplicatoren angewandt werden) umgebene Rollen befinden, so stark zu magnetisiren, dass es einen kleinen Anker an sich zieht, der augenblicklich (wozu Herr Leonhard, der diese Telegraphen anlegt, auf eben so einfache als sinnreiche Weise einen schwachen Gegenstrom benutzt) wieder abfällt, sobald die Kette aufgehoben wird. Ein Uhrwerk regelt die Aufhebung und Schliessung der Kette, während die Bewegung des kleinen Ankers ein kleines Steigrad in Umlauf bringt, woran ein Zeiger, auf der Reihe nach geschriebene Buchstaben hindeutend, befestigt ist. Durch einen mehrere Meilen langen Kupferdraht wirkt die schwache Wach'ische Kette, während der nasse Boden durch Einsenkung von Drähten in Brunnen an den Stationsorten als zweiter Leiter benutzt wird.

Die Kette Daniell's unterscheidet sich von der Wach'ischen blos durch Anwendung stärkerer Schwefelsäure. Auch Wach gebrauchte natürlich diese öfters in bedeutender Stärke; aber es kam zur Hervorrufung der Cohärenz reducirter Metalltheile nicht auf Verstärkung, sondern auf Schwächung der Kette an. Und von diesen auf Schwächung der Kette sich beziehenden Versuchen hatte er daher seinem Zwecke gemäss allein zu sprechen [45]). — Auch zu telegraphischen Zwecken gebraucht, wie vorhin schon gesagt, Herr Leonhard nicht die stärkere sogenannte Daniell-sche Kette, sondern die ursprüngliche schwache Wachische zeigte sich ihm vortheilhafter. War ja doch Barlow, der zur Bestimmung des Gesetzes der Elektricitätsleitung durch lange Drähte Hare's Calorimeter gebrauchte, sogar zu dem Resultat gekommen, dass sich die Intensität der Ströme sehr rasch vermindere nach dem umgekehrten quadratischen Verhältnisse der Distanz, woraus er schloss, „dass die Idee elektrische Telegraphen zu construiren chimärisch sei." Ich zeigte aber schon damals (s. Jahrb. d. Ch. u. Ph. 1825. B. 44. S. 119. u. 365.) durch sehr leicht zu wiederholende Versuche, dass, während starke elektrische Ströme bedeutend geschwächt werden bei dem

[45]) Der Versuch, welcher auf der zur Abhandlung gehörigen Kupfertafel Fig. 4. dargestellt, wo Zink- und Kupferblech durch Blase getrennt in vier Gliedern Voltaisch combinirt sind, hat die Absicht, zu zeigen, dass die Voltaische Combination durch Einschiebung poröser Leiter stets geschwächt wird, ja sogar, wenn man eine doppelte Scheidewand von Blase anwendet, nämlich auch das Kupferblech in eine mit Blase unten umbundene Röhre bringt, ganz unwirksam gemacht werden kann.

Digitized by Google

Durchgange durch lange Drähte, ganz schwache Ströme unvermindert an Kraft hindurchgehn. Eben weil ich sogleich nach der berühmten Entdeckung Oersted's, der eine Funken gebende Säule zur Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen verlangte, in meinen physikalischen Vorlesungen auf die unverminderte Kraft, mit welcher schwache Ströme durch lange Leiter gehn, aufmerksam wurde: so führte solches mich unmittelbar hin zur Construction des Multiplicators (s. Journ. d. Ch. u. Phys. B. 32. S. 48. u. B. 33. S. 11.). Und nun bewährt sich die Bedeutsamkeit schwacher Ströme auch in telegraphischer Beziehung vielleicht durch dieselbe krystallelektrische Einwirkung, die sie veranlasst, Cohäsion reducirter Metalltheile hervorzurufen.

Bei der Wach ischen constanten Kette war (weil vier Elemente zur Natur derselben gehören) die Einschiebung eines porösen Leiters unentbehrlich. Er schadete auch hier nichts, weil es blos auf schwache Ströme ankam; vielmehr diente er zur beabsichtigten Hemmung der Schnelligkeit des elektrischen Stroms. Will man starke elektrische Ströme haben, so bleibt die Einschiebung schlechter Leiter, was poröse Körper nimmer sind, stets ein Uebelstand, den man blos durch die unvermeidliche Nothwendigkeit entschuldigen kann. Gerade aber diese unvermeidliche Nothwendigkeit glaubte ich in Zweifel ziehn zu müssen. Und der fünfte Abschnitt vorliegender Abhandlung in ihrer ursprünglichen Gestalt bezog sich darauf, die porösen Halbleiter nicht blos bei der Kohlenbatterie Bunsen's, sondern auch (in Erinnerung an Volta's thermoxydirtes Gold) selbst bei der Platinakette Grove's entbehrlich zu machen, indem man nämlich ebenso wie die Kohle (was schon bei der thermoxydirten Kohle Brugnatelli's vorhin zur Sprache kam) so auch Platin vor Construction der Batterie mit rauchender Salpetersäure (oder besser mit einem Gemisch aus concentrirter Schwefelsäure und rauchender Salpetersäure) ladet und auf entsprechende Weise durch Aetzkali (wovon vorhin gleichfalls schon die Rede war) auch die Zinkplatten. Eine zu diesem Zwecke bequeme Vorrichtung brachte ich in Vorschlag, berechnet auf schnelle Zusammensetzung der Batterie und eben so schnelle Aushebung und Ladung der einzelnen Elemente derselben. Wenn es nämlich in der neuen Ausgabe von Gehler's phys. Wörterb. B. VIII. S. 114 heisst: „Ritter's sanguinische Hoffnung, durch die Ladungssäulen die galvanischen Wirkungen ebenso verstärken zu können, wie man die Wirkung der gewöhnlichen Elektricität durch die elektrischen Batterien verstärkt, ist nicht in Erfüllung gegangen:" so suchte ich zu zeigen, dass sie wirklich in Erfüllung gegangen auf eine Weise, die allgemeines Aufsehen erregte, und doch gerade aus diesem Gesichtspunkte nicht beachtet wurde. Ich meine nämlich jene Hoffnung Ritter's sei in Erfüllung gegangen durch Grove's Platina- und Bunsen's Kohlen-Batterie. Ja ich glaube, wenn man diese Batterien aus dem oben bezeichneten Gesichtspunkt auffasst, dass jene Hoffnung Ritter's dann noch in höherm Grad in Erfüllung gehn könne. Einige Collegienversuche, welche ich in diesem Sinne mit Kohlencylindern Bunsen's anstellte, die auf Brugnatelli's Weise geladen wurden, fielen, wie schon vorhin erwähnt, günstig aus für meine Ansicht. Wäre die Assistentenstelle bei unsern physikalischen

Digitized by Google

Cabineten nicht blos, den gegebenen Verhältnissen gemäss, mit Studenten zu besetzen, oder wäre es nicht so schwer, junge Männer zu finden von solchem experimentellen Eifer wie Wach war, als er hier seine pharmaceutisch-naturwissenschaftlichen Studien machte: so hätte ich leicht sogleich auch mit Beziehung auf Grove's Batterie [46]) eine Reihe von Versuchen vorlegen können.

---

[46]) Es sei mir erlaubt, die grosse Ausdehnung des experimentellen Feldes zu bezeichnen. Bekanntlich deutet der Ausdruck katalytische Kraft eine Wirkung an durch blose Gegenwart eines andern Körpers. Und diese Wirkung durch blose Gegenwart wäre streng erwiesen, wenn wirklich der Einfluss des Platins auf Knallgas kein krystallelektrischer (vgl. die ins Philos. Magaz. and Journ. Jul. 1824. vol. 64. aus dem Journ. d. Ch. u. Ph. B. 39. S. 214—250. übergegangene Abhandlung, sowie B. 40. S. 237. u. B. 63. S. 377.), sondern einzig und allein von der Reinheit der Oberfläche des Platins abhängig wäre, welche letztere Ansicht nun allgemein geltend geworden. Sie beruht auf der im Jahr 1834 publicirten sechsten Reihe experimenteller Untersuchungen von Faraday, deren Hauptstellen ich den von ihm gebrauchten Nummern gemäss (nach der Uebers. in Poggend. Annal. der Phys. B. 33. S. 149 ff.) anführen will. Da nicht blos positiv elektrisirte Platinaplatten das Knallgas zur Vereinigung disponirten, sondern „auch negativ elektrisirte wirkten, wiewohl nicht so kräftig": so kam Faraday (N. 590.) auf die Idee, „dass die Wirkung nicht von der Elektrisirung derselben abhänge, sondern von irgend einer Structur oder Anordnung der Theilchen, die es während der Verknüpfung mit der Säule erlange, die aber dem Platin zu allen Zeiten angehöre und sich immer wirksam zeige, sobald nur dessen Oberfläche vollkommen rein sei." Es wurden daher (N. 599.) „Platinplatten. die auf ein Gemenge von Sauerstoff und Wasserstoff keine Wirkung hatten, mit einer Lösung von Aetzkali gekocht und darauf in die Gase gebracht; sie zeigten sich bisweilen recht wirksam, bisweilen aber nicht. In den letztern Fällen, schloss ich, war die Unreinigkeit von der Art, dass sie nicht durch blose Lösekraft des Aetzkalis entfernt wurde; denn wenn ich dieselben Platten mit etwas Schmirgel und der nämlichen Aetzkalilösung abscheuerte, wurden sie wirksam." Nach N. 605 war „die vortheilhafteste Behandlung des Platins, ausser dessen Gebrauch zum positiven Pol in starker Säure, folgende: Die Platte wurde über die Flamme einer Weingeistlampe gehalten. und wenn sie heiss geworden, mit einem Stück Aetzkali gerieben; der Ueberzug, welchen das schmelzende Kali auf dem Platin bildete, wurde 1—2 Minuten lang in Fluss erhalten und das Platin dann zur Fortschaffung des Aetzkalis 4—5 Minuten lang in Wasser gehalten, abgeschwenkt und etwa eine Minute lang in heisses Vitriolöl getaucht; aus diesem wurde es in destillirtes Wasser gebracht, und zur Entfernung der letzten Spuren von Säure 10—15 Minuten lang darin gelassen. Wenn es dann in ein Gemeng von Sauerstoff und Wasserstoff gebracht wurde, begann die Vereinigung sogleich und schritt rasch fort; die Röhre wurde warm, das Platin rothglühend und der Gasrückstand entzündete sich. Diese Wirkung konnte nach Belieben wiederholt und so das Maximum der Erscheinung ohne Hülfe einer Voltaischen Batterie hervorgebracht werden." — So weit Faraday, dessen Versuch entscheidend wäre für eine neue (von der elektrischen verschiedene) sogenannte katalytische Kraft, wenn wirklich durch Behandlung mit heissem Aetzkali und heissem Vitriolöl blos gereinigt und nicht zugleich elektrisch geladen worden wäre, was ja selbst dem ursprünglichen Versuche Döbereiner's gemäss schon durch die dabei angewandte Erhitzung geschehn konnte. Entscheidend gegen die Reinigungstheorie ist es, dass der Versuch sich nicht umkehren lässt, sondern heisses Vitriolöl, dessen

Digitized by Google

Nun aber schloss ich jene Abhandlung mit folgenden Worten:

„Ich bezeichnete lediglich die Experimente, welche anzustellen wären, um jüngere Männer einzuladen zur Ausführung derselben. Meinen verewigten Freund Ritter wollte ich gleichsam redend einführen,

---

Einwirkung der einer positiven Elektrisirung gleichbedeutend, immer zuletzt angewandt werden muss. Versuche anderer Art zur weitern Anfklärung dieser (mit den schon im Jahrb. der Chemie und Physik 1831. B. 63. S. 375—380. besprochenen nahe zusammenhängenden) Erscheinungen sind zusammengestellt in einer bei der Versammlung der Naturforscher in Strassburg im Jahr 1842 von mir geschriebenen Abhandlung. Die Bedeutsamkeit des Contacts der am positiven oder negativen Pole sich anhäufenden (d. h. hydroelektrisch negativen oder positiven) Körper für elektrische Ladung wurde auch dadurch dargethan, dass (worauf meines Wissens zuvor noch niemand aufmerksam war) eine Platinkette, durch elektrische Ladung nach Ritter's Weise dargestellt, im Contacte mit Knallluft sich polarisch umkehrt. Zugleich wurde nachgewiesen, dass Hydrogen es ist, welches durch seine Wirkung auf positiv an der Voltaischen Säule geladenes Platin diese Umkehrung bewirkt (zuweilen sogar unter den dort erwähnten krampfhaften Zuckungen der Magnetnadel im Multiplicator). Ich sage „positiv an der Voltaischen Säule geladenes Platin“, weil die Umkehrung der Ladungskette durch Einwirkung des Hydrogens nicht so leicht erfolgt, wenn das Platin durch Erhitzung — nach der ursprünglichen Weise Döbereiner's — positiv geladen wurde. — Zugleich zeigte ich, dass positiv geladenes Platin auch reines Hydrogen, und negativ geladenes auch reines Oxygen in Wasser verwandle, wobei allerdings eine hydroelektrische Kette einwirken mag, die aber anders aufzufassen ist, als unter der Form einer Kette aus zwei Flüssigkeiten in Contact mit einem Metall. Denn diese Auffassungsweise kann nur so lange gelten, als feuchtes Platin in der z. B. halb mit Hydrogen erfüllten Röhre theilweise sowohl mit Hydrogen als mit Wasser in Contact ist. Jedoch die Verminderung der Knallluft durch positiv (oder auch negativ) geladenes Platin dauert fort, auch wenn Platin ganz von Wasser bedeckt ist (wie ich diess oft gesehn, da ich den interessanten Faradayischen Versuch sogleich zum Collegienversuche gemacht); und dasselbe findet statt, wenn anstatt Knallluft reines Hydrogen oder reines Oxygen angewandt wird, nur dass alsdann die Wirkung viel langsamer erfolgt. Wenn also auch das vom Wasser verschluckte Oxygen und Hydrogen im Contacte mit Platin sich in Wasser verwandelt: so ist die wirksame elektrische Kette in den Elementartheilen des Platins selbst zu suchen, wie ich die Ladungserscheinung stets aufgefasst. Das am positiven Pol geladene Platin erscheint, verglichen mit der gewöhnlichen Voltaischen Kette, als eine Kette, worin die positiven (dem Zink analog wirkenden) krystallelektrischen Pole geschwächt und zum Theil ganz unterdrückt, und dafür die negativen Pole um so mehr gehoben sind. Da nun wenig Zink viel Kupfer in Action setzen kann, und diese Kette viel kräftiger wirkt, als wenn Zink und Kupfer gleich gross sind, oder Zink die relativ grössere Ausdehnung hat (wie ich durch die in Briefen an Ritter beschriebenen galvanischen Combinationen nachgewiesen): so begreift man, warum auch bei den Ladungsphänomenen der analoge Fall eintritt und das positiv geladene Platin in dem vorhin angeführten Faradayischen Versuche stärker auf Knallluft wirkt als negativ geladenes Platin. Was aber die Einwirkung des geladenen Platins auf reines Hydrogen und reines Oxygen anlangt: so werden die von mir im Jahr 1842 darüber publicirten Beobachtungen bestätigt durch die im Jahr 1845 mitgetheilten Beobachtungen von Smee (s. philos. Magaz. Ser. III. Vol. XXV. S. 434. übers. in Poggend. Annal. 1845. N. 7. oder B. 65. S. 470.). Smee nämlich brachte Platinstreifen, woran Platinschwamm angeschweisst war (wobei sie offenbar durch Erhitzung posi-

Digitized by Google

wie er mit Beziehung auf seine Ladungssäule jetzt sprechen würde, wenn er noch unter uns wäre. Der Vorwurf, welchen man ihm gemacht hat, dass er mehr speculativen als praktischen Geist gezeigt, trifft nicht sowohl ihn, als seine Lebens-Verhaltnisse. Er ist begründet überhaupt in der zu wenig praktischen, blos auf Do-

---

tiv geladen wurden) in Glasröhren, die mit Chlorplatin, oder Chlorgold, oder Chlorpalladium, oder salpetersaurem Silber erfüllt waren, und liess dann Hydrogen aufsteigen in die Röhren, so dass der Platinstreifen zur Hälfte im Hydrogen, zur Hälfte in der Metallösung sich befand. Nun sah er den Platinstreifen sich mit einem Ueberzuge des reducirten Metalls bedecken, während das Hydrogen sich verminderte. Er schliesst daraus, das Metall sei durch Hydrogen reducirt worden. Jedoch die Verminderung des Hydrogens ist ein Ausdruck der Einwirkung desselben auf positiv geladenes Platin, dessen Ladung dadurch geschwächt, ja umgekehrt wird, so dass es die Rolle eines unedlen Metalls spielt im Verhältnisse zu der in der Metalllösung stehenden Hälfte, an welcher eben daher das Metall reducirt wird. Um so beachtungswerther muss aber nun die Verminderung des Hydrogens scheinen, auch wenn die Metallauflösung fehlt und der positiv geladene Platinstreifen blos zur einen Hälfte mit Wasser, und zur andern Hälfte mit Hydrogen in Berührung ist. Macht man das Wasser alkalisch, so hemmt man die Wirkung, welche begünstigt wird durch Ansäuerung desselben. — Ich habe schon in jener vorhin erwähnten Abhandlung vom Jahr 1842 zugegeben, dass man im Sinne der gewöhnlichen Theorie die Erscheinung erklären kann, wenn man eben sowohl ein hydrogenirtes als ein oxydirtes Wasser annimmt. Sonach würde bei diesem Versuche eine Combination der Wasserzerlegung und der Wasserbildung sich uns gleichzeitig vor Augen stellen. Und die Vereinigung dieses Gegensatzes kommt vielleicht öfters auch in andern Fällen vor, wo man nicht daran denkt, indem es z. B. ganz naturgemäss scheint, selbst im sogenannten Voltameter, während Knallgas am geladenen Platin sich entbindet, zugleich an Wasserregeneration durch Combination eines, sei es auch relativ noch so kleinen Antheils dieses Knallgases zu denken. Auf alle Fälle ist die Sache dazu angethan, uns aufzurufen zur Revision der ganzen Lehre von der Wasserzerlegung. Denn (wollen wir es nicht verkennen) selbst die alten berühmten auf Wasserzerlegung sich beziehenden Versuche Lavoisier's (durch glühendes Eisen oder schmelzendes Zink) sind in neuerer Zeit wegen der Anomalien, welche sich darboten, in Vergleichung mit denen von der Wasserbildung aus Hydrogen und Oxygen, obwohl diese alleinstehend nicht entscheidend für die Theorie sind, zurückgesetzt und vernachlässigt worden. Und auch die galvanische Wasserzerlegung zeigt einige (mit der Metallladung im Sinne Ritter's zusammenhängende) sehr beachtungswerthe Anomalien, wovon schon im Jahrb. d. Ch. u. Phys. 1828. B. 52. S. 234. u. 251. die Rede war. Daran reihen sich auch die Anomalien, welche entstehn, wenn man Wasserzerlegung einleitet in zwei durch einen Zwischendraht verbundenen Gläsern. Bezeichnet man z. B. den Oxygendraht und den Hydrogendraht von Platin, welche von der Säule ausgehn, mit O und H, und die Enden des die beiden Gläser verbindenden Platindrahtes mit o und h: so stehn sich h in dem einen Glase O und h, in dem andern o und H gegenüber, und wenn O' und o' die Volummenge des Oxygens, H' und h' des Hydrogens bezeichnen: so ist $2.O' > h'$ und $2o' < H'$, obwohl $2.O' = H'$ und $2.o' = h'$. In jedem einzelnen Glase ist also die Wasserzerlegung gesetzwidrig, obwohl $2.O' = H'$ und $2.o' = h'$ sich zeigen mag. Man kann aber die Gesetzwidrigkeit noch vermehren, wenn man einem dünnen Platindraht einen Platinstreifen entgegensetzt. Wollen wir die grössere Ausdehnung der Fläche des Platinstreifens durch Einschliessung in Parenthese bezeichnen. Dabei stellte im gemeinen Brunnenwasser in der Art sich die Zerlegung dar:

Digitized by Google

ciren gestellten Einrichtung unserer Universitäten. Weil man auf deutschen Akademien nur bei anatomischen Theatern, nicht aber, (wie in Frankreich und England) auch in chemischen Laboratorien und physikalischen Cabineten förmlich angestellte Präparatoren kennt: so war auch **Ritter**, gleich den meisten deutschen Professoren der Physik und Chemie, darauf angewiesen, vorzugsweise im Kopfe, d. h. theoretisch zu experimentiren, während er bei praktischer Ausführung, isolirt stehend, gewöhnlich mit den ersten Schritten zum Ziele sich begnügen musste."

Schluss-Anmerkung. Es sei mir vergönnt, zum Schlusse der Abhandlung noch einen Blick zu werfen auf die Einleitung zu derselben. Es war dort sogleich auf der ersten Seite von dreierlei Anwendungen der fortschreitenden Naturwissenschaft

---

O . (*h*)	(*o*) *H*
1,78 2,35	0,78 2,8.

Man sieht, wie anomal die Zerlegung in jedem Glase ist, da in dem Glase, worein der Oxygenpol der Säule geleitet wurde, 1,78 . 2 = 3,56, also zu viel Oxygen erhalten wurde in Vergleichung mit 2,35 Hydrogen. Im zweiten Glas aber, worein der Hydrogenpol der Säule geleitet wurde, ist zu wenig Oxygen. Es ist nämlich 0,78 . 2 = 1,56; also zu wenig Oxygen in Vergleichung mit 2.8 Hydrogen. Aber es ist $2(O'+o') = H'+h'$, nämlich 1,78 + 0,78 = 2,56 Oxygen, und 2,35 + 2,8 = 5,15 Hydrogen; und 2,56 . 2 = 5,12, was genau (bis auf 0,03) stimmt.

Bei einem andern Versuch nicht mit combinirten Platinstreifen und Drähten angestellt, sondern allein mit Platindrähten, aber von verschiedenem Durchmesser (indem $O = 0{,}7^{mm}$, $h = 0 = 0{,}5^{mm}$ und $H = 1^{mm}$ im Durchmesser betrug), und wo in destillirtes Wasser, das mit Schwefelsäure angesäuert war, die Drähte geleitet wurden, betrug

O *h*	*o* *H*
18,5 35	15 32.5.

Auch hier ist in einem der beiden durch den Platindraht *hO* (von $0{,}5^{mm}$ Durchmesser) verbundenen Gläser des Oxygens zu viel in Vergleichung mit dem Hydrogen (indem 2 . 18,5 = 37, während nur 35 erhalten wurden). In dem andern Glas aber betrug das Oxygen zu wenig, da 2 . 15 = 30, während 32,5 Hydrogen erhalten wurde. Jedoch $2(O'+o') = h'+H'$ wenigstens ziemlich genau; da 18,5 + 15 = 33,5 und 35 + 32,5 = 67,5; aber 2 . 33,5 = 67.

Grösser werden natürlich die Anomalien, sobald Chlor mit ins Spiel kommt, nämlich wenn Kochsalz haltendes Wasser angewandt wird. Und da noch so viele andere Nebenrücksichten in Betrachtung kommen, so hätte ich längst gewünscht, einen jungen Mann zu einer grössern Arbeit über diesen Gegenstand anregen zu können. Gegenwärtig theile ich diese isolirt stehenden schon vor länger als zehn Jahren angestellten Versuche blos darum mit, weil auch andere Anomalien bei der Ueberführung der Körper von einem Pole zum andern zur Sprache kamen (s. die Abhandl. von Daniell und Miller über die Elektrolyse secundärer Verbindungen in den Phil. Transact. 1844 übers. in Poggend. Annal. B. 64. S. 18.) und weil bei der elektrischen Telegraphie die grosse Wirksamkeit der feuchten Leiter in meilenlanger Ausdehnung (durch welche momentane Uebergänge des Hydrogens und Oxygens von einem Pol zum andern, oder momentan sich fortpflanzende chemische Zersetzungen erfolgen müssten) zu neuen Untersuchungen über gewisse als längst entschieden betrachtete Gegenstände uns aufrufen.

Digitized by Google

die Rede, unter denen die zur ***Aufklärung der Dunkelheit*** *des Alterthums, obwohl zuletzt genannt, doch keinesweges den letzten Rang einnimmt. Proben einer solchen Anwendung geben die ersten Hauptabschnitte der vorliegenden Abhandlung: und es zeigte sich, dass auf diesem Wege die Naturwissenschaft, indem sie uns die alterthümliche Kunst und Poesie von einer neuen Seite zeigt, zugleich einflussreich auf neuere Kunst und Poesie werden kann. — Nur einen technischen Gewinn war man bisher gewohnt von der fortschreitenden Naturwissenschaft zu erwarten. Und auf dieses technische Gebiet führte uns der Anhang zu dieser Abhandlung. Davon aber, wie im Geiste fortschreitender Naturwissenschaft und durch die von ihr dargebotenen neuen Hülfsmittel nicht blos die Medicin, sondern überhaupt alle Universitätsstudien einen neuen Aufschwung gewinnen könnten; davon sollte nur nebenbei mit einigen Worten in der Note 32. die Rede sein. Jedoch schon meine erste Abhandlung über Urgeschichte der Physik und den Zusammenhang des Heidenthums mit einer vorhistorischen Naturwissenschaft (welche im Jahrb. d. Chem. u. Phys. von 1821. d. g. R. B. 31. S. 223—252. abgedruckt ist und im Zusammenhange steht mit dem, was in vorliegender Abhandlung in Note 15. 24. 26. 28. zur Sprache kam) führte sogleich auf Gesichtspunkte hin, wie sie gegenwärtig von der in der Note 32. erwähnten Edinburgher medicinischen Missionsanstalt ins Auge gefasst werden. Und eben darin lag eine grosse Ermunterung zur Fortsetzung jener Studien über Urgeschichte der Physik, welche, da sie den Schlüssel zur symbolischen Hieroglyphe darbot, immer umfangreicher und anziehender wurde, obwohl ich damit fast ganz isolirt stehn blieb (vgl. Note 14. u. 29.) seit einer so langen Reihe von Jahren. Immerhin mag man sich eine solche Isolirung, welche vorsichtig und umsichtig zugleich macht, gefallen lassen bei theoretischen Dingen; aber bei praktischen (wie sie in jener an einen ursprünglich Leibnitz'ischen Plan erinnernden Note 32. zur Sprache kamen) ist sie um so schmerzlicher, besonders wenn man erwägt, dass (dem dort Angeführten gemäss) es leichter war in diesem Leibnitzischen Sinne auf Peking zu wirken, als das so ganz nahe liegende Ziel zu erreichen. Aus Indien brachte im Jahr 1837 der ehrwürdige Missionar Bernhard Schmid eine schöne zoologische Sammlung mit für den in seiner nächsten Umgebung unbeachtet gebliebenen Leibnitzianischen Verein. In demselben Jahr 1837 war die Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Prag, welche Veranlassung gab von dieser schönen ostindischen Sammlung zu sprechen und im Leibnitz'ischen Geiste die neue Akademie in Wien zu begrüssen, welche schon damals im Plane war, der nun zur Ausführung gelangen soll. Wirklich wurde sogleich damals diese zoologische Sammlung benutzt zur Bereicherung des Museums in Wien, sowie des Universitätsmuseums in Halle und eines Privatkabinets in Hamburg. Dadurch gelang es wenigstens schnell genug, den Sammler in Ostindien auf eine seine Erwartung übertreffende Weise zu entschädigen. Vieles aber ist noch übrig (vorzugsweise ostindische Vögel, welche der ausgezeichnete Ornitholog Nitzsch noch kurz vor seinem Tode systematisch geordnet und bestimmt hat, wodurch die blos mit indischen Namen versehene Sammlung einen viel höheren*

Digitized by Google

Werth erhielt). Und dieser mehr als die Hälfte der Sendung betragende Ueberrest könnte, wenn ein angemessener Verkauf gelingt, nun wohl der Absicht des Ueberbringers gemäss am besten benutzt werden als erstes Samenkorn zu jenem Reisestipendium, *wovon in Note 32. die Rede. Wo nicht*[47]*): so bietet sich nun eine andere Gelegenheit dar im Sinne der ursprünglichen Tendenz jenes Leibnitzianischen Vereins, für welchen die Sammlung aus Indien mitgebracht wurde, den noch vorhandenen grössten Theil derselben zu benutzen. Denn offenbar geziemt es sich, mitzuwirken zur Förderung der naturwissenschaftlichen, namentlich botanischen Pflanzschule, welche der nach Ostindien zurückgekehrte Dr. theol.* Bernhard Schmid *nun selbst anzulegen im Begriff ist. Wie begeistert dieser höchst achtbare Missionar sei für die Idee einer* wissenschaftlichen Propaganda, *zeigt sein schöner Brief, welcher abgedruckt ist in den Blättern der* Hamburger Börsenhalle *1840. N. 1825. S. 442. und im* Allgemeinen Anz. d. Deutschen *1840. N. 137. S. 1834., worin es unter andern heisst: „die Mönchsklöster des finstern Mittelalters schlossen das Wenige der Religiosität und wissenschaftlichen Geistesthätigkeit, das noch in der Welt existirte, in sich ein und benutzten es zu ihrem Privatvortheile; — will Deutschland seine* Universitäten jenen Mönchsklöstern ähnlich machen, *allen Nutzen, den diese Hochschulen schaffen, nur für sich behalten und nur so viele Strahlen des Lichts der Welt zusenden, als gegen ihren Willen ihren Grenzen entschlüpfen?" — Und dass Indien aus seinem Munde zu uns spricht, zeigen seine vieljährigen in Indien gemachten Erfahrungen und Beobachtungen, von denen er eine Probe den in Nürnberg versammelten*

---

47) Es liegt nämlich vielleicht im Plane der Berliner Universität, die Sache gegenwärtig in einer Periode theologischer Wirren noch eine Zeit lang ruhn zu lassen. Wenigstens ist bis jetzt noch keine auf diese Angelegenheit sich beziehende Publication erfolgt, und ich selbst weiss davon nicht mehr, als was ich im Jahr 1843 in der Vorrede der Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen als actenmässigen Auszug abdrucken liess. Da kürzlich in Hitzig's Annalen der Criminalrechtspflege, fortges. von Schletter, die den Tod meines Bruders, der als Opfer seiner Wissenschaft gefallen, betreffenden Actenstücke abgedruckt wurden (im Maiheft 1846. B. 34. S. 152—185.): so schien es zweckmässig, diesen Aktenstücken auch das vortreffliche Ministerialrescript vom 24. Nov. 1822 anzureihen, welches auf jenen an seinem Grabe gestifteten Leibnitzianischen Verein sich bezog. Nachdem die Königliche Genehmigung jenes Vereins mitgetheilt war, heisst es zum Schlusse: „um diesem Verein auch einen fortdauernden Beweis thätiger Theilnahme zu geben, wird das Ministerium für denselben einen angemessenen jährlichen Beitrag auszuwirken suchen, muss sich aber den desfallsigen definitiven Beschluss bis auf weiteres vorbehalten." Unter diesen Umständen fügt die Redaction jener Annalen folgende Bemerkung bei: „Alles kommt hier auf Publicität an; und auch die Red. d. Bl. bietet, obwohl diess nicht direct juridische Interessen berührt, zu diesem Excurse gern die Hand, besonders da man bis jetzt die Sache blos in der Vorrede der Denkschrift zur Säcularfeier der Universität Erlangen im August 1843 erwähnt findet, während von Berlin aus hierüber noch nichts publicirt wurde. Es ist zu wünschen, dass die versprochene vollständige Publication der hierauf sich beziehenden Actenstücke in einem vielgelesenen Journal erscheinen möge."

Digitized by Google

Philologen mittheilte. (S. Denkschr. zur Säcularfeier der Universität Erlangen S. 47.). Gegenwärtig schrieb mir derselbe aus Ottacamund (auf dem Blaugebirge Indiens) am 1. Jul. 1846 von seinem Plane, dort ein wissenschaftliches Seminar für auserlesene junge hoffnungsvolle Indier unter jenen Bergbewohnern zu begründen, und namentlich auch seine botanischen Studien zu ihrer Belehrung zu benutzen. „Ich habe“, fährt er fort, „meinen Plan dem tüchtigen Botaniker Dr. Wight, Verfasser des Prodromus Florae Peninsulae Indiae Orientalis und anderer Werke, vorgelegt, der mir seine Beihülfe verspricht. Er ist jetzt nicht weit von hier in Coimbotoor angestellt. Aber mit diesen Ansichten und Planen darf ich hier noch nicht hervortreten, wenigstens nicht unter den Engländern; sie würden auf mich mit Mitleiden als auf einen wissenschaftlichen Schwärmer eben so hinblicken, wie in Deutschland mancher auf mich als auf einen religiösen Schwärmer hingeblickt haben mag. Dieses zu errichtende Seminar muss daher durch Unterstützung deutscher wissenschaftlicher Männer vorzüglich fortgeführt werden, während die Erhaltung der drei Tamulischen und einer Hindostanischen Schule für Mohamedaner und andere Ausgaben von den Engländern bestritten werden.“ Den Botanikern ist Herr Dr. theol. Schmid vortheilhaft bekannt durch seine früheren Sendungen eben von diesem ostindischen Blaugebirge aus an den zu früh verewigten Professor Zenker in Jena, der mehreres davon publicirte. Durch ähnliche Sendungen wird er denen Ersatz geben, welche geneigt sind, seine dem Ausland und dem Vaterlande zugleich nützlichen Bestrebungen zu fördern. Sehr gern erbiete ich mich, die Zusendungen an ihn zu vermitteln durch Angabe des von ihm mir brieflich bezeichneten angemessenen Weges dazu. Man sieht übrigens dem Dargelegten gemäss ohne mein Erinnern, dass blos theologische Einseitigkeit, welche durch Eigenwilligkeit in der Wahl der Mittel zum Ziele die Erreichung desselben erschwert, jenem im Leibnitzischen Sinne begründeten Vereine (wovon in Note 32. die Rede ist) ungünstig sein kann. Was darüber auf historischem Standpunkte zu sagen, habe ich dargelegt in der am 31. October 1834 gehaltenen und auch in besonderen Abdrücken erschienenen Inaugurationsrede des Hallischen Universitätsgebäudes „de rebus indicis Academiae Fridericianae inde ab ejus origine peculiari quodam modo eximiaque maiorum munificentia commendatis.“ — Neuerdings aber gab mir Schubert's Spiegel der Natur (welches Buch mit Rücksicht auf denselben unter Protection Seiner Königlichen Hoheit des Kronprinzen von Bayern stehenden Verein zur Verbreitung nützlicher Kenntnisse, von welchem schon vorhin die Rede war, abgefasst ist) ganz specielle Veranlassung, mich über gewisse Hauptfragen unserer Zeit auszusprechen (in der Allg. Lit. Zeit. Mai 1846. N. 99. u. 100.), und ich bitte besonders die dort dargelegten Zahlenresultate zu beachten, da deren gegenseitige Vergleichung allein schon aufrufen kann, einige Aufmerksamkeit dem zu schenken, was in jener Note 32. zur Sprache kam.

Digitized by Google

XIV.

Ueber einen Satz von dem dreiaxigen Ellipsoid, von welchem die Grundformel der sphärischen Trigonometrie ein besonderer Fall ist.

Von

dem Herausgeber.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie auf das allgemeine dreiaxige Ellipsoid, von welchem die Kugel ein besonderer Fall ist, zu erweitern, ist mit mehrfachen Schwierigkeiten verknüpft. Nach verschiedenen derartigen Versuchen ist mir jedoch eine solche Erweiterung für jetzt wenigstens bei der Grundformel der gesammten sphärischen Trigonometrie, welche die zwischen den drei Seiten und einem Winkel des sphärischen Dreiecks Statt findende Relation ausdrückt, gelungen, und ich erlaube mir daher, den Satz von dem dreiaxigen Ellipsoid, zu welchem diese Untersuchung geführt hat, im Folgenden mitzutheilen, weitere Betrachtungen über diesen Gegenstand einer andern Gelegenheit vorbehaltend. Zugleich enthält das Folgende, wie es mir scheint, einen wegen seiner Allgemeinheit sehr befriedigenden analytischen Beweis der Grundformel der sphärischen Trigonometrie, welcher vielleicht für die Leser des Archivs gleichfalls von einigem Interesse sein dürfte, da er im Ganzen auch nur wenige Vorkenntnisse aus der analytischen Geometrie — bloss einige der einfachsten und bekanntesten Grundformeln dieser Wissenschaft — in Anspruch nimmt.

Die Gleichung einer beliebigen Fläche in Bezug auf rechtwinklige Coordinaten, die wir in dieser Abhandlung immer zum Grunde legen werden, sei

$$1)\quad u = f(x, y, z) = 0$$

und $(x_1 y_1 z_1)$ sei ein beliebiger Punkt dieser Fläche, so dass also, wenn wir der Kürze wegen

$$2)\quad u_1 = f(x_1, y_1, z_1)$$

Digitized by Google

setzen,

$$3)\quad u_1=f(x_1,y_1,z_1)=0$$

ist. Die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gelegten Normale dieser Fläche sind nach den Principien der analytischen Geometrie

$$4)\quad \frac{x-x_1}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1}}=\frac{y-y_1}{\frac{\partial u_1}{\partial y_1}}=\frac{z-z_1}{\frac{\partial u_1}{\partial z_1}},$$

wo natürlich alle Differentialquotienten partielle Differentialquotienten sind.

Ist nun die Fläche ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Gleichung

$$5)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist, so ist

$$6)\quad u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1,$$

und folglich

$$7)\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2}.$$

Also sind die Gleichungen der durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ des Ellipsoids, für welchen

$$8)\quad \left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2=1$$

ist, gehenden Normale des Ellipsoids:

$$9)\quad \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}},$$

oder

$$10)\quad a^2\left(1-\frac{x}{x_1}\right)=b^2\left(1-\frac{y}{y_1}\right)=c^2\left(1-\frac{z}{z_1}\right),$$

oder

$$11)\quad \frac{a^2}{x_1}(x-x_1)=\frac{b^2}{y_1}(y-y_1)=\frac{c^2}{z_1}(z-z_1).$$

Sind jetzt $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$, $(x_3 y_3 z_3)$ drei Punkte des Ellipsoids, und folglich

Digitized by Google

$$12)\quad \begin{cases} \left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2=1, \\ \left(\frac{x_2}{a}\right)^2+\left(\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(\frac{z_2}{c}\right)^2=1, \\ \left(\frac{x_3}{a}\right)^2+\left(\frac{y_3}{b}\right)^2+\left(\frac{z_3}{c}\right)^2=1; \end{cases}$$

so sind nach dem Vorhergehenden

$$13)\quad \begin{cases} \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}, \\ \frac{x-x_2}{\frac{x_2}{a^2}}=\frac{y-y_2}{\frac{y_2}{b^2}}=\frac{z-z_2}{\frac{z_2}{c^2}}. \\ \frac{x-x_3}{\frac{x_3}{a^2}}=\frac{y-y_3}{\frac{y_3}{b^2}}=\frac{z-z_3}{\frac{z_3}{c^2}} \end{cases}$$

die Gleichungen der diesen Punkten entsprechenden Normalen des Ellipsoids.

Wir wollen jetzt durch die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale und durch den Punkt $(x_2y_2z_2)$ eine Ebene legen, und uns in dieser Ebene durch den Punkt $(x_1y_1z_1)$ eine auf der demselben entsprechenden Normale senkrecht stehende gerade Linie gezogen denken. Die Gleichungen dieser Ebene und dieser geraden Linie seien respective

$$14)\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

und

$$15)\quad \frac{x-x_1}{F_1}=\frac{y-y_1}{G_1}=\frac{z-z_1}{H_1}.$$

Weil die durch die Gleichung 14) charakterisirte Ebene durch die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(x_2y_2z_2)$ geht, so haben wir nach 14) die Gleichungen

$$16)\quad \begin{cases} A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+C_1(z-z_1)=0, \\ A_1(x-x_2)+B_1(y-y_2)+C_1(z-z_2)=0; \end{cases}$$

und

$$17)\quad A_1(x_1-x_2)+B_1(y_1-y_2)+C_1(z_1-z_2)=0.$$

Weil ferner die durch die Gleichung 14) oder durch die Gleichung 16) charakterisirte Ebene durch die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale des Ellipsoids geht, und diese Normale also ganz in der in Rede stehenden Ebene liegt, so erhalten wir aus

Digitized by Google

dem ersten Systeme der Gleichungen 13) und der ersten der beiden Gleichungen 16) auf der Stelle die Gleichung

$$18)\quad A_1\frac{x_1}{a^2}+B_1\frac{y_1}{b^2}+C_1\frac{z_1}{c^2}=0.$$

Weil aber auch die durch die Gleichungen 15) charakterisirte gerade Linie ganz in der durch die Gleichung 14) oder durch die Gleichungen 16) charakterisirten Ebene liegt, so erhalten wir aus den Gleichungen 15) und der ersten der beiden Gleichungen 16) die Gleichung

$$19)\quad A_1F_1+B_1G_1+C_1H_1=0.$$

Weil endlich die durch die Gleichungen 15) charakterisirte gerade Linie auf der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids senkrecht steht, so erhalten wir nach den Principien der analytischen Geometrie aus dem ersten Systeme der Gleichungen 13) und den Gleichungen 15) die Gleichung

$$1+\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{x_1}{a^2}}\cdot\frac{G_1}{F_1}+\frac{\frac{z_1}{c^2}}{\frac{x_1}{a^2}}\cdot\frac{H_1}{F_1}=0$$

oder

$$20)\quad \frac{x_1}{a^2}F_1+\frac{y_1}{b^2}G_1+\frac{z_1}{c^2}H_1=0.$$

Aus den drei Gleichungen 17), 18), 19), nämlich aus den drei Gleichungen

$$21)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{x_1}{a^2}A_1+\frac{y_1}{b^2}B_1+\frac{z_1}{c^2}C_1=0,\\&F_1A_1+G_1B_1+H_1C_1=0,\\&(x_1-x_2)A_1+(y_1-y_2)B_1+(z_1-z_2)C_1=0,\end{aligned}\right.$$

wollen wir nun die drei Grössen A_1, B_1, C_1 eliminiren. Zu dem Ende multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$(z_1-z_2)G_1-(y_1-y_2)H_1,$$

$$(y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2},$$

$$\frac{y_1}{b^2}H_1-\frac{z_1}{c^2}G_1$$

und addiren sie dann zu einander; so erhalten wir nach leichter Rechnung zuerst die Gleichung

Digitized by Google

$$0=\left\{\begin{aligned}&((z_1-z_2)G_1-(y_1-y_2)H_1)\frac{x_1}{a^2}\\&+((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2})F_1\\&+(x_1-x_2)(\frac{y_1}{b^2}H_1-\frac{z_1}{c^2}G_1)\end{aligned}\right\}A_1$$

$$+\left\{\begin{aligned}&((z_1-z_2)G_1-(y_1-y_2)H_1)\frac{x_1}{b^2}\\&+((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2})G_1\\&+(y_1-y_2)(\frac{y_1}{b^2}H_1-\frac{z_1}{c^2}G_1)\end{aligned}\right\}B_1$$

$$+\left\{\begin{aligned}&((z_1-z_2)G_1-(y_1-y_2)H_1)\frac{z_1}{c^2}\\&+((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2})H_1\\&+(z_1-z_2)(\frac{y_1}{b^2}H_1-\frac{z_1}{c^2}G_1)\end{aligned}\right\}C_1,$$

und hieraus ferner die Gleichung

$$22)\quad\left.\begin{aligned}&\{(y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\}F_1\\&+\{(z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\}G_1\\&+\{(x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2}\}H_1\end{aligned}\right\}=0.$$

Weil nun aber nach 20)

$$\frac{x_1}{a^2}F_1+\frac{y_1}{b^2}G_1+\frac{z_1}{c^2}H_1=0$$

ist, so ist, wenn man aus diesen beiden Gleichungen nach der Reihe die Grössen H_1, G_1, F_1 eliminirt, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\begin{aligned}&\frac{x_1}{a^2}((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2})\\&-\frac{z_1}{c^2}((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2})\end{aligned}\right\}F_1\\&+\left\{\begin{aligned}&\frac{y_1}{b^2}((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2})\\&-\frac{z_1}{c_2}((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2})\end{aligned}\right\}G_1\end{aligned}\right\}=0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{x_1}{a^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\\ -\frac{y_1}{b^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\end{array}\right\}F_1\\ +\left\{\begin{array}{l}\frac{z_1}{c^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\\ -\frac{y_1}{b^2}\left((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2}\right)\end{array}\right\}H_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\frac{y_1}{b^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\\ -\frac{x_1}{a^2}\left((z_1-z_2)\frac{x_1}{a^2}-(x_1-x_2)\frac{z_1}{c^2}\right)\end{array}\right\}G_1\\ +\left\{\begin{array}{l}\frac{z_1}{c^2}\left((y_1-y_2)\frac{z_1}{c^2}-(z_1-z_2)\frac{y_1}{b^2}\right)\\ -\frac{x_1}{a^2}\left((x_1-x_2)\frac{y_1}{b^2}-(y_1-y_2)\frac{x_1}{a^2}\right)\end{array}\right\}H_1\end{array}\right\}=0;$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)+(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}\right\}F_1\\ +\left\{(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}\right\}G_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)\right\}F_1\\ +\left\{(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}\right\}H_1\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)\right\}G_1\\ -\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)+(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}\right\}H_1\end{array}\right\}=0;$$

und man kann also offenbar

$$F_1=(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2},$$

$$G_1=-(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}+(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2},$$

$$H_1=-(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}-(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}+(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)$$

oder

$$23)\quad \begin{cases} F_1=(x_1-x_2)\left(\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(y_1-y_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}-(z_1-z_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}, \\ G_1=(y_1-y_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right)-(z_1-z_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2}-(x_1-x_2)\frac{x_1y_1}{a^2b^2}, \\ H_1=(z_1-z_2)\left(\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\right)-(x_1-x_2)\frac{x_1z_1}{a^2c^2}-(y_1-y_2)\frac{y_1z_1}{b^2c^2} \end{cases}$$

setzen. Auch ist

$$24)\quad \begin{cases} F_1=\quad(x_1-x_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{x_1}{a^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ G_1=\quad(y_1-y_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{y_1}{b^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ H_1=\quad(z_1-z_2)\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{z_1}{c^2}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c}\right\}; \end{cases}$$

und folglich

$$F_1^2+G_1^2+H_1^2$$

$$=\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2$$

$$-2\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}^2$$

$$+\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}^2,$$

also

$$25)\quad F_1^2+G_1^2+H_1^2$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2\{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\}$$

$$-\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}^2.$$

Verbinden wir aber den Punkt $(x_1y_1z_1)$ auf ganz ähnliche Art mit dem Punkte $(x_3y_3z_3)$, wie wir denselben vorher mit dem Punkte $(x_2y_2z_2)$ verbunden haben, und bezeichnen dann die den vorher durch F_1, G_1, H_1 bezeichneten Grössen entsprechenden Grössen durch F_1', G_1', H_1'; so ist

Digitized by Google

$$26)\quad\begin{cases} F_1' = (x_1-x_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{x_1}{a^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ G_1' = (y_1-y_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{y_1}{b^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}, \\ H_1' = (z_1-z_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\} \\ \qquad -\frac{z_1}{c^2}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\} \end{cases}$$

und

$$27)\quad F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2$$

$$\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2\left\{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}^2.$$

Aus 24) und 26) erhält man aber

$$F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'$$

$$=(x_1-x_2)(x_1-x_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2$$

$$-(x_1-x_2)\frac{x_1}{a_2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}\right.$$

$$\left.+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$-(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}\right.$$

$$\left.+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}\right.$$

$$\left.+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+(y_1-y_2)(y_1-y_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2$$

$$-(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}\right.$$

$$\left.+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

Digitized by Google

$$-(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+(z_1-z_2)(z_1-z_3)\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$-(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

also, wie leicht erhellet:

$$28)\quad F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}^2\left\{(x_1-x_2)(x_1-x_3)+(y_1-y_2)(y_1-y_3)+(z_1-z_2)(z_1-z_3)\right\}$$

$$-\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\left\{(x_1-x_2)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_2)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_2)\frac{z_1}{c^2}\right\}$$

$$\times\left\{(x_1-x_3)\frac{x_1}{a^2}+(y_1-y_3)\frac{y_1}{b^2}+(z_1-z_3)\frac{z_1}{c^2}\right\}.$$

Von dem Anfange der Coordinaten wollen wir uns jetzt an die Punkte

$$(x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3)$$

des Ellipsoids respective die geraden Linien

$$R_1,\ R_2,\ R_3$$

gezogen denken, und die von den Linien

$$R_2,\ R_3;\ R_3,\ R_1;\ R_1,\ R_2$$

am Anfangspunkte der Coordinaten als ihrer gemeinschaftlichen Spitze eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3;$$

die Entfernungen der Punkte

$$(x_2y_2z_2),\ (x_3y_3z_3);\ (x_3y_3z_3),\ (x_1y_1z_1);\ (x_1y_1z_1),\ (x_2y_2z_2)$$

von einander aber respective durch

$$E_1,\ E_2,\ E_3$$

bezeichnen; so ist nach einem bekannten Satze der ebenen Trigonometrie

$$E_1^2 = R_2^2 + R_3^2 - 2R_2R_3\cos\alpha_1,$$
$$E_2^2 = R_3^2 + R_1^2 - 2R_3R_1\cos\alpha_2,$$
$$E_3^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2\cos\alpha_3.$$

Nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie ist aber

$$R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$
$$R_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$
$$R_3^2 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$$

und

$$E_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2,$$
$$E_2^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2,$$
$$E_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Führt man dies in die obigen Ausdrücke von

$$E_1^2,\ E_2^2,\ E_3^2$$

ein, so erhält man nach einigen ganz leichten Reductionen die Gleichungen

$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = R_2R_3\cos\alpha_1,$$
$$x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1 = R_3R_1\cos\alpha_2,$$
$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = R_1R_2\cos\alpha_3;$$

aus denen sich sogleich

$$29)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 = \dfrac{x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3}{R_2R_3}, \\[2ex] \cos\alpha_2 = \dfrac{x_3x_1 + y_3y_1 + z_3z_1}{R_3R_1}, \\[2ex] \cos\alpha_3 = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{R_1R_2} \end{cases}$$

ergiebt.

Digitized by Google

Durch den Anfang der Coordinaten wollen wir uns jetzt eine der dem Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids parallele gerade Linie gelegt denken, und die Coordinaten eines der beiden Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit der Oberfläche des Ellipsoids durch ξ_1, η_1, ζ_1 bezeichnen; so sind nach 13)

$$30)\quad \frac{x}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z_1}{c^2}}$$

oder

$$31)\quad \frac{a^2 x}{x_1}=\frac{b^2 y}{y_1}=\frac{c^2 z}{z_1}$$

die Gleichungen dieser geraden Linie. Die Entfernung des Punktes $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ von dem Anfange der Coordinaten sei ϱ_1, und die von den Linien

$$\varrho_1,\ R_1;\quad \varrho_1,\ R_2;\quad \varrho_1,\ R_3$$

an dem Anfangspunkte der Coordinaten als ihrer gemeinschaftlichen Spitze eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien respective

$$N_{1,1},\ N_{1,2},\ N_{1,3};$$

so ist, wenn wir die Entfernungen des Punktes $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ von den Punkten

$$(x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2),\ (x_3 y_3 z_3)$$

respective durch

$$E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{1,3}$$

bezeichnen, nach einem bekannten, schon oben angewandten Satze der ebenen Trigonometrie

$$E^2_{1,1}=\varrho_1^2+R_1^2-2\varrho_1 R_1\cos N_{1,1},$$
$$E^2_{1,2}=\varrho_1^2+R_2^2-2\varrho_1 R_2\cos N_{1,2},$$
$$E^2_{1,3}=\varrho_1^2+R_3^2-2\varrho_1 R_3\cos N_{1,3};$$

und folglich, auf ganz ähnliche Art wie oben:

$$32)\quad \begin{cases} \cos N_{1,1}=\dfrac{\xi_1 x_1+\eta_1 y_1+\zeta_1 z_1}{\varrho_1 R_1}, \\ \cos N_{1,2}=\dfrac{\xi_1 x_2+\eta_1 y_2+\zeta_1 z_2}{\varrho_1 R_2}, \\ \cos N_{1,3}=\dfrac{\xi_1 x_3+\eta_1 y_3+\zeta_1 z_3}{\varrho_1 R_3}. \end{cases}$$

Weil nun aber der Punkt $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ in der durch die Gleichungen 30) charakterisirten geraden Linie liegt; so ist

Digitized by Google

$$\frac{\xi_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{\eta_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{\zeta_1}{\frac{z_1}{c^2}},$$

also

$$\xi_1=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{z_1}{c^2}}\zeta_1,\quad \eta_1=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\frac{z_1}{c^2}}\zeta_1;$$

und folglich nach 32):

$$33)\quad\begin{cases}\cos N_{1,1}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_1+\frac{y_1}{b^2}y_1+\frac{z_1}{c^2}z_1}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_1}\zeta_1,\\[2ex] \cos N_{1,2}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_2+\frac{y_1}{b^2}y_2+\frac{z_1}{c^2}z_2}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_2}\zeta_1,\\[2ex] \cos N_{1,3}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_3+\frac{y_1}{b^2}y_3+\frac{z_1}{c^2}z_3}{\frac{z_1}{c^2}\varrho_1 R_3}\zeta_1.\end{cases}$$

Nach den Principien der analytischen Geometrie ist aber

$$\varrho_1{}^2=\xi_1{}^2+\eta_1{}^2+\zeta_1{}^2,$$

also nach dem Obigen

$$\varrho_1{}^2=\frac{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}{\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}\zeta_1{}^2$$

oder

$$\left(\frac{z_1}{c^2}\varrho_1\right)^2=\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}.\zeta_1{}^2.$$

Folglich ist

$$\frac{z_1}{c^2}\varrho_1=\pm\zeta_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem z_1 und ζ_1 gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die Punkte $(x_1 y_1 z_1)$ und $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ auf einer und derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der xy liegen. Nehmen wir also, was offenbar verstattet ist, für $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ immer denjenigen der

Digitized by Google

beiden Durchschnittspunkte der durch den Anfang der Coordinaten mit der dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechenden Normale des Ellipsoids parallel gelegten geraden Linie mit der Oberfläche des Ellipsoids, welcher mit dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ auf einer und derselben Seite der Ebene der xy liegt, so ist

$$\frac{z_1}{c^2}\varrho_1=\zeta_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2},$$

und folglich nach 33):

$$34)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos N_{1,1}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_1+\frac{y_1}{b^2}y_1+\frac{z_1}{c^2}z_1}{R_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos N_{1,2}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_2+\frac{y_1}{b^2}y_2+\frac{z_1}{c^2}z_2}{R_2\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos N_{1,3}=\dfrac{\frac{x_1}{a^2}x_3+\frac{y_1}{b^2}y_3+\frac{z_1}{c^2}z_3}{R_3\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}};\end{array}\right.$$

von welchen drei Formeln man wegen 12) die erste auch unter der einfacheren Form

$$35)\quad \cos N_{1,1}=\frac{1}{R_1\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}$$

darstellen kann.

Nach 25) ist nun

$$\frac{F_1{}^2+G_1{}^2+H_1{}^2}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}\{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2+x_2{}^2+y_2{}^2+z_2{}^2$$
$$-2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)\}$$

$$-\left\{\frac{x_1}{a^2}x_1+\frac{y_1}{b^2}y_1+\frac{z_1}{c^2}z_1-\left(\frac{x_1}{a^2}x_2+\frac{y_1}{b^2}y_2+\frac{z_1}{c^2}z_2\right)\right\},$$

also nach dem Vorhergehenden, wie leicht erhellen wird:

Digitized by Google

$$R_1^2 \cos N^2_{1,1} (F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)$$

$$= \frac{1}{R_1^2 \cos N^2_{1,1}} (R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos\alpha_3) - (1 - \frac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}})^2$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ \sin N^2_{1,1} - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sin N^2_{1,2} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} - \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} - N_{1,2})) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} + \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} + N_{1,2})) \right\}.$$

Auf ganz ähnliche Art ist nach 27)

$$R_1^2 \cos N_{1,1}^2 (F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ \sin N^2_{1,1} - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,3}) + \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \sin N^2_{1,3} \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} - \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos(N_{1,1} - N_{1,3})) \right\}$$

$$= \frac{1}{\cos N^2_{1,1}} \left\{ (\sin N_{1,1} + \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos(N_{1,1} + N_{1,3})) \right\}.$$

Nach 28) ist aber

$$\frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}$$

$$= \left\{ \left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2 \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) \\ + (x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3) \\ - (x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1) \end{array} \right\}$$

$$- \left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{a^2} x_2 + \frac{y_1}{b^2} y_2 + \frac{z_1}{c^2} z_2\right) \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{x_1}{a^2} x_3 + \frac{y_1}{b^2} y_3 + \frac{z_1}{c^2} z_3\right) \right\},$$

Digitized by Google

also nach dem Vorhergehenden

$$R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2(F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1')$$

$$=\frac{1}{R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2}(R_1{}^2-R_1R_2\cos\alpha_3+R_2R_3\cos\alpha_1-R_3R_1\cos\alpha_2)$$

$$-(1-\frac{R_2\cos N_{1,2}}{R_1\cos N_{1,1}})(1-\frac{R_3\cos N_{1,3}}{R_1\cos N_{1,1}})$$

$$=\frac{1}{\cos N_{1,1}{}^2}(1+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}\cos\alpha_1-\frac{R_3}{R_1}\cos\alpha_2-\frac{R_2}{R_1}\cos\alpha_3)$$

$$-(1-\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{\cos N_{1,2}}{\cos N_{1,1}}-\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{\cos N_{1,3}}{\cos N_{1,1}}+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}\cdot\frac{\cos N_{1,2}}{\cos N_{1,1}}\cdot\frac{\cos N_{1,3}}{\cos N_{1,1}})$$

$$=\frac{1}{\cos N_{1,1}{}^2}\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad -\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad -\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}.$$

Von dem Anfange der Coordinaten aus wollen wir uns jetzt zwei den beiden in dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ auf die diesem Punkte entsprechende Normale errichteten Senkrechten, deren Gleichungen

$$\frac{x-x_1}{F_1}=\frac{y-y_1}{G_1}=\frac{z-z_1}{H_1}$$

und

$$\frac{x-x_1}{F_1'}=\frac{y-y_1}{G_1'}=\frac{z-z_1}{H_1'}$$

sind, parallele gerade Linien gezogen denken, deren Gleichungen also

$$\frac{x}{F_1}=\frac{y}{G_1}=\frac{z}{H_1}$$

und

$$\frac{x}{F_1'}=\frac{y}{G_1'}=\frac{z}{H_1'}$$

sind, und in diesen beiden geraden Linien zwei beliebige durch die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_1', Y_1', Z_1' bestimmte Punkte, deren Entfernung von einander durch $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet werden mag, und deren Entfernungen vom Anfange der Coordinaten respective $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_1'$ sein sollen, annehmen. Bezeichnen wir nun den von diesen beiden geraden Linien eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch A_1, so ist bekanntlich

$$\mathfrak{E}_1{}^2=\mathfrak{X}_1{}^2+\mathfrak{X}_1'^2-2\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'\cos A_1,$$

also nach einem bekannten, im Obigen schon mehrfach angewandten Satze der analytischen Geometrie:

Digitized by Google

$$(X_1-X_1')^2+(Y_1-Y_1')^2+(Z_1-Z_1')^2$$
$$=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2+X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2-2\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'\cos A_1,$$

woraus sogleich

$$\cos A_1=\frac{X_1X_1'+Y_1Y_1'+Z_1Z_1'}{\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'}$$

folgt. Nun ist aber nach dem Vorhergehenden

$$\frac{X_1}{F_1}=\frac{Y_1}{G_1}=\frac{Z_1}{H_1}$$

und

$$\frac{X_1'}{F_1'}=\frac{Y_1'}{G_1'}=\frac{Z_1'}{H_1'},$$

also

$$X_1=\frac{F_1}{H_1}Z_1,\ Y_1=\frac{G_1}{H_1}Z_1 \text{ und } X_1'=\frac{F_1'}{H_1'}Z_1',\ Y_1'=\frac{G_1'}{H_1'}Z_1'.$$

Folglich ist

$$\cos A_1=\frac{F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'}{H_1H_1'\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'}Z_1Z_1'.$$

Aber bekanntlich

$$\mathfrak{X}_1=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2},$$
$$\mathfrak{X}_1'=\sqrt{X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2}$$

und folglich

$$\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_1'=\sqrt{(X_1^2+Y_1^2+Z_1^2)(X_1'^2+Y_1'^2+Z_1'^2)}$$
$$=\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)Z_1^2Z_1'^2}{H_1^2H_1'^2}}$$
$$=\pm Z_1Z_1'\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)}{H_1^2H_1'^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem Z_1 und Z_1' gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die beiden von dem Anfange der Coordinaten aus gezogenen geraden Linien auf einer und derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der xy liegen. Also ist nach dem Obigen mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens:

36) $$\cos A_1=\pm\frac{F_1F_1'+G_1G_1'+H_1H_1'}{H_1H_1'\sqrt{\frac{(F_1^2+G_1^2+H_1^2)(F_1'^2+G_1'^2+H_1'^2)}{H_1^2H_1'^2}}}.$$

Digitized by Google

Ist nun $H_1 H_1'$ positiv, d. h. haben die Grössen H_1 und H_1' gleiche Vorzeichen, so ist mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$37)\quad \cos A_1 = \pm \frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\sqrt{(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)}}.$$

Ist dagegen $H_1 H_1'$ negativ, d. h. haben die Grössen H_1 und H_1' ungleiche Vorzeichen, so ist mit derselben Bedingung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$38)\quad \cos A_1 = \mp \frac{F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'}{\sqrt{(F_1^2 + G_1^2 + H_1^2)(F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2)}}$$

Nach dem Obigen ist aber, wie man leicht findet:

$$39)\quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{z_1 - z_2}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \dfrac{z_1}{c^2}\left(1 - \dfrac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right), \\ H_1' = \dfrac{z_1 - z_3}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \dfrac{z_1}{c^2}\left(1 - \dfrac{R_3 \cos N_{1,3}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right). \end{cases}$$

Wenn wir nun in den Ausdruck von $\cos A_1$ die aus dem Obigen sich ergebenden Ausdrücke von

$$F_1 F_1' + G_1 G_1' + H_1 H_1'$$

und

$$F_1^2 + G_1^2 + H_1^2, \quad F_1'^2 + G_1'^2 + H_1'^2$$

einführen, so erhalten wir Folgendes.

Wenn die Grössen H_1, H_1', d. i.

$$\frac{z_1 - z_2}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \frac{z_1}{c^2}\left(1 - \frac{R_2 \cos N_{1,2}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right),$$

$$\frac{z_1 - z_3}{R_1^2 \cos N_{1,1}^2} - \frac{z_1}{c^2}\left(1 - \frac{R_3 \cos N_{1,3}}{R_1 \cos N_{1,1}}\right);$$

oder, was Dasselbe ist, die Grössen

$$z_1 - z_2 - \frac{z_1 R_1 \cos N_{1,1}}{c^2}(R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2}),$$

$$z_1 - z_3 - \frac{z_1 R_1 \cos N_{1,1}}{c^2}(R_1 \cos N_{1,1} - R_3 \cos N_{1,3})$$

gleiche Vorzeichen haben, so ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher

Digitized by Google

40) $\cos A_1 =$

$$\pm\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} [\sin N_{1,1}^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) + \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \sin N_{1,2}^2] \\ \times[\sin N_{1,1}^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,3}) + \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \sin N_{1,3}^2] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \pm\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha^2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} [(\sin N_{1,1} - \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} - N_{1,2}))] \\ \times[(\sin N_{1,1} - \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} - N_{1,3}))] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \pm\frac{\left\{\begin{array}{l} \sin N_{1,1}^2 + \frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - \frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - \frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} [(\sin N_{1,1} + \frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2 - 2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3 - \cos(N_{1,1} + N_{1,2}))] \\ \times[(\sin N_{1,1} + \frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2 - 2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2 - \cos(N_{1,1} + N_{1,3}))] \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

oder

41) $\cos A_1 =$

$$\pm\frac{\left\{\begin{array}{l} R_1^2 \sin N_{1,1}^2 + R_2 R_3(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2}\cos N_{1,3}) \\ \qquad - R_1 R_3(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3}\cos N_{1,1}) \\ \qquad - R_1 R_2(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) \end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l} \{R_1^2 \sin N_{1,1}^2 - 2R_1R_2(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,2}) + R_2^2 \sin N_{1,2}^2\} \\ \times\{R_1^2 \sin N_{1,1}^2 - 2R_1R_3(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,1}\cos N_{1,3}) + R_3^2 \sin N_{1,3}^2\} \end{array}}}$$

Digitized by Google

$$=\pm\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}-R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\}\\\times\{(R_1\sin N_{1,1}-R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

$$=\pm\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\-R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\-R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}+R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\}\\\times\{(R_1\sin N_{1,1}+R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

Wenn dagegen die Grössen H_1, H_1', d. i.

$$\frac{z_1-z_2}{R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2}-\frac{z_1}{c^2}\left(1-\frac{R_2\cos N_{1,2}}{R_1\cos N_{1,1}}\right),$$

$$\frac{z_1-z_3}{R_1{}^2\cos N_{1,1}{}^2}-\frac{z_1}{c^2}\left(1-\frac{R_3\cos N_{1,3}}{R_1\cos N_{1,1}}\right);$$

oder, was Dasselbe ist, die Grössen

$$z_1-z_2-\frac{z_1R_1\cos N_{1,1}}{c^2}(R_1\cos N_{1,1}-R_2\cos N_{1,2}),$$

$$z_1-z_3-\frac{z_1R_1\cos N_{1,1}}{c^2}(R_1\cos N_{1,1}-R_3\cos N_{1,3})$$

ungleiche Vorzeichen haben, so ist mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher:

$$42)\quad \cos A_1=$$

$$\pm\frac{\left\{\begin{array}{r}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\-\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\-\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}[\sin N_{1,1}{}^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})+\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\sin N_{1,2}{}^2]\\\times[\sin N_{1,1}{}^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,3})+\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2\sin N_{1,3}{}^2]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

Digitized by Google

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-\quad\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-\quad\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left[(\sin N_{1,1}-\frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\right]\\ \times\left[(\sin N_{1,1}-\frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\right]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{l}\sin N_{1,1}{}^2+\frac{R_2}{R_1}\cdot\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ \qquad-\quad\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ \qquad-\quad\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}\left[(\sin N_{1,1}+\frac{R_2}{R_1}\sin N_{1,2})^2-2\frac{R_2}{R_1}(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\right]\\ \times\left[(\sin N_{1,1}+\frac{R_3}{R_1}\sin N_{1,3})^2-2\frac{R_3}{R_1}(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\right]\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

oder

43) $\cos A_1 =$

$$\mp\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ -R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ -R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})+R_2{}^2\sin N_{1,2}{}^2\}\\ \times\{R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,3})+R_3{}^2\sin N_{1,3}{}^2\}\end{array}}}$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ -R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ -R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}-R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2}))\}\\ \times\{(R_1\sin N_{1,1}-R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}-N_{1,3}))\}\end{array}}}$$

$$=\mp\frac{\left\{\begin{array}{r}R_1{}^2\sin N_{1,1}{}^2+R_2R_3(\cos\alpha_1-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3})\\ -R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1})\\ -R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2})\end{array}\right\}}{\sqrt{\begin{array}{l}\{(R_1\sin N_{1,1}+R_2\sin N_{1,2})^2-2R_1R_2(\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2}))\}\\ \times\{(R_1\sin N_{1,1}+R_3\sin N_{1,3})^2-2R_1R_3(\cos\alpha_2-\cos(N_{1,1}+N_{1,3}))\}\end{array}}}.$$

Digitized by Google

Für $A_1 = 90^0$, also $\cos A_1 = 0$, ist nach dem Vorhergehenden:

$$44) \quad 0 = R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 + R_2 R_3 (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \\ - R_1 R_3 (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \\ - R_1 R_2 (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})$$

oder

$$45) \quad - R_2 R_3 \cos\alpha_1 + R_1 R_3 \cos\alpha_2 + R_1 R_2 \cos\alpha_3 \\ = R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ + R_1 R_3 \cos N_{1,1} \cos N_{1,3} \\ + R_1 R_2 \cos N_{1,1} \cos N_{1,2} \\ = R_1{}^2 - R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ - R_1 \cos N_{1,1} (R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2} - R_3 \cos N_{1,3}).$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^0$ wird diese Gleichung

$$46) \quad R_1{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 = - R_1 R_2 \cos N_{1,1} \cos N_{1,2} \\ - R_1 R_3 \cos N_{1,1} \cos N_{1,3} \\ + R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}$$

oder

$$47) \quad R_1{}^2 = R_2 R_3 \cos N_{1,2} \cos N_{1,3} \\ - R_1 \cos N_{1,1} (R_1 \cos N_{1,1} - R_2 \cos N_{1,2} - R_3 \cos N_{1,3}).$$

Besondere Relationen dieser Art würden sich aus dem Obigen noch mehrere ableiten lassen, wobei wir jedoch jetzt nicht länger verweilen wollen.

Entwickelt man

$$\sin A_1{}^2 = 1 - \cos A_1{}^2,$$

so erhält man als Zähler von $\sin A_1{}^2$ die Grösse

$$R_1{}^2 R_2{}^2 \{\sin N_{1,1}{}^2 \sin N_{1,2}{}^2 - (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})^2\} \\ + R_2{}^2 R_3{}^2 \{\sin N_{1,2}{}^2 \sin N_{1,3}{}^2 - (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3})^2\} \\ + R_3{}^2 R_1{}^2 \{\sin N_{1,3}{}^2 \sin N_{1,1}{}^2 - (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1})^2\}$$

$$- 2 R_1 R_2 R_3 \left\{ \begin{array}{l} R_1 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,1}{}^2 (\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \\ -(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1})(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) \end{array} \right] \\ + R_2 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,2}{}^2 (\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \\ -(\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2})(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3}) \end{array} \right] \\ + R_3 \left[\begin{array}{l} \sin N_{1,3}{}^2 (\cos\alpha_3 - \cos N_{1,1} \cos N_{1,2}) \\ -(\cos\alpha_1 - \cos N_{1,2} \cos N_{1,3})(\cos\alpha_2 - \cos N_{1,3} \cos N_{1,1}) \end{array} \right] \end{array} \right\}$$

Digitized by Google

$$= -R_1{}^2R_2{}^2\{\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}+N_{1,2})\}\{\cos\alpha_3-\cos(N_{1,1}-N_{1,2})\}$$
$$-R_2{}^2R_3{}^2\{\cos\alpha_1-\cos(N_{1,2}+N_{1,3})\}\{\cos\alpha_1-\cos(N_{1,2}-N_{1,3})\}$$
$$-R_3{}^2R_1{}^2\{\cos\alpha_2-\cos(N_{1,3}+N_{1,1})\}\{\cos\alpha_2-\cos(N_{1,3}-N_{1,1})\}$$
$$-2R_1R_2R_3\left\{\begin{array}{l} R_1\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos N_{1,2}\cos N_{1,3}\\ -\cos N_{1,1}(\cos\alpha_1\cos N_{1,1}-\cos\alpha_2\cos N_{1,2}-\cos\alpha_3\cos N_{1,3})\end{array}\right]\\ +R_2\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_2-\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos N_{1,3}\cos N_{1,1}\\ -\cos N_{1,2}(\cos\alpha_2\cos N_{1,2}-\cos\alpha_3\cos N_{1,3}-\cos\alpha_1\cos N_{1,1})\end{array}\right]\\ +R_3\left[\begin{array}{l}\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos N_{1,1}\cos N_{1,2}\\ -\cos N_{1,3}(\cos\alpha_3\cos N_{1,3}-\cos\alpha_1\cos N_{1,1}-\cos\alpha_2\cos N_{1,2})\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

Der Nenner von $\sin A_1{}^2$ ist aber das Quadrat des obigen Nenners von $\cos A_1$, welchen wir hier nicht weiter entwickeln wollen.

Wir wollen nun annehmen, dass das im Obigen betrachtete allgemeine dreiaxige Ellipsoid in eine mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel übergehe, und dass dann die Punkte $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$ auf der auf der positiven Seite der Ebene der xy liegenden Halbkugel ein sphärisches Dreieck bestimmen, in welchem keine Seite und kein Winkel 180° übersteigt. Dann sind offenbar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die drei Seiten dieses sphärischen Dreiecks, und es ist, weil jetzt offenbar der Punkt $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ mit dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ zusammenfällt, augenscheinlich

$$N_{1,1}=0,\ N_{1,2}=\alpha_3,\ N_{1,3}=\alpha_2.$$

Legen wir nun, was im vorliegenden Falle offenbar verstattet ist, die Ebene der (xy) durch den Mittelpunkt der Kugel und durch die Punkte $(x_2y_2z_2)$ und $(x_3y_3z_3)$, so ist $z_2=z_3=0$, und nach dem Obigen ist folglich

$$H_1=\frac{z_1}{r^2}-\frac{z_1}{r^2}(1-\cos\alpha_3)=\frac{z_1\cos\alpha_3}{r^2},$$

$$H_1'=\frac{z_1}{r^2}-\frac{z_1}{r^2}(1-\cos\alpha_2)=\frac{z_1\cos\alpha_2}{r^2}.$$

Da unter der gemachten Voraussetzung z_1 positiv ist, so haben H_1 und H_1' gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem $\cos\alpha_2$ und $\cos\alpha_3$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. jenachdem die Winkel α_2, α_3 beide $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{kleiner}}{\text{grösser}}$ als 90° sind, oder von denselben der eine kleiner und der andere grösser als 90° ist. Nehmen wir nun die von dem Anfange der Coordinaten oder dem Mittelpunkte der Kugel aus mit den auf die dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ entsprechende Normale in diesem Punkte im Obigen errichteten Senkrechten parallel gezogenen geraden Linien im ersten Falle auf einer und derselben, im zweiten Falle dagegen auf entgegengesetzten Seiten der Ebene der (xy) an, so ist der im Obigen durch A_1 bezeichnete Winkel, wie mittelst einer einfachen Betrachtung sogleich erhellen wird, jederzeit der von den Seiten α_2, α_3 des sphärischen Dreiecks eingeschlossene oder der Seite α_1 desselben gegenüberstehende Winkel. Im ersten Falle, wo H_1 und H_1' gleiche Vorzeichen haben, muss man aber unter dieser

Digitized by Google

Voraussetzung in der Gleichung 41) das obere Zeichen, im zweiten Falle, wo H_1 und H_1' ungleiche Vorzeichen haben, muss man dagegen unter dieser Voraussetzung in der Gleichung 43) das untere Zeichen nehmen, und erhält daher in beiden Fällen, also in völliger Allgemeinheit,

$$\cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}{\sqrt{\sin\alpha_2^2 \sin\alpha_3^2}}.$$

Weil nun aber keiner der beiden Winkel α_2 und α_3 grösser als 180° ist, also $\sin\alpha_2$ und $\sin\alpha_3$ beide positiv sind, so ist

$$\sqrt{\sin\alpha_2^2 \sin\alpha_3^2} = \sin\alpha_2 \sin\alpha_3,$$

und folglich

$$48)\quad \cos A_1 = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \cos\alpha_3}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3},$$

welches die bekannte Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist, aus welcher sich diese ganze Wissenschaft ableiten lässt.

Weitere Untersuchungen über diesen, wie es uns scheint, nicht uninteressanten Gegenstand, behalten wir einer anderen Gelegenheit vor.

XV.

Ueber eine geometrische Aufgabe.

Von dem

Herrn Professor Dr. Anger

in Danzig.

Leonhard Euler hat in den Novis Actis der Petersburger Akademie, Tom. IX. 1795. pag. 132 u. f., die Aufgabe behandelt:

„Die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Vierecke umschrieben werden kann."

Er führt die Aufgabe auf die Auflösung einer Gleichung vom dritten Grade zurück, und macht dann eine Anwendung auf den besondern Fall, in welchem das Viereck ein Parallelogramm ist. Den noch einfacheren für das Rechteck hat er bereits in den Acten

Digitized by Google

derselben Akademie für das Jahr 1780, im 2ten Theile, gelöst, als ihm die Auflösung der allgemeinen Aufgabe noch nicht in gewünschter Einfachheit gelungen war. In einer auf die obige Abhandlung unmittelbar folgenden, Nova Acta 1791 pag. 146 u. f., betrachtet er dieselbe Aufgabe für das Dreieck.

Für das Parallelogramm und Dreieck ergeben sich einige merkwürdige Eigenschaften der gesuchten Ellipse. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, zu zeigen, wie dieselben ganz einfach ohne Calcul, durch geometrische Betrachtungen erhalten werden, und auch noch andere auf demselben Wege sich leicht erhalten lassen, dass endlich die Projectionslehre die allgemeine Aufgabe auf eine andere vom Kreise zurückzuführen gestattet. Um jedoch alles hieher gehörige beisammen zu haben, werde ich die Euler'sche Auflösung voranschicken und darauf eine Betrachtung über die Wurzeln der cubischen Gleichung, auf welche sich das Problem reducirt, folgen lassen.

Es seien (Taf. IV. Fig. 1) A, B, C, D die vier Punkte, durch welche die Ellipse gehen soll. Euler verlängert die Seiten AB, CD, nimmt den Durchschnittspunkt O derselben zum Anfangspunkte schiefwinkliger Coordinaten, die Gerade ABO zur Abscissen-Axe und CDO zur Ordinaten-Axe an, so dass die y's der Seite CD parallel werden. Der Coordinaten-Winkel AOC wird durch ω bezeichnet und $OA=a, OB=b, OC=c, OD=d$ gesetzt, woraus sich ergiebt:

$$AB=b-a,$$
$$CD=d-c,$$
$$AC^2=a^2+c^2-2ac\operatorname{Cos}\omega,$$
$$AD^2=a^2+d^2-2ad\operatorname{Cos}\omega,$$
$$BC^2=b^2+c^2-2bc\operatorname{Cos}\omega,$$
$$BD^2=b^2+d^2-2bd\operatorname{Cos}\omega.$$

Da durch die Punkte A, B, C, D eine Ellipse gehen soll, so wird dieselbe durch die Gleichung

$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\varepsilon y+\zeta=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

ausgedrückt, in welcher zunächst die Grössen α und γ dasselbe Zeichen haben müssen, ausserdem aber das Product derselben $\alpha\gamma$ grösser sein muss als β^2, weil $\alpha\gamma$ gleich β^2 und $\alpha\gamma$ kleiner als β^2, resp. eine Parabel und Hyperbel geben würden. Die Bezeichnung der Coefficienten ist hier von der bei Euler verschieden, und auch im Folgenden so beibehalten, wodurch natürlich im Wesentlichen nichts geändert, vielleicht aber der Ueberblick etwas erleichtert wird.

Um nun diese Gleichung dem vorliegenden Falle entsprechend einzurichten, setze man $y=0$, wodurch dieselbe in

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=0$$

übergeht, welche also die beiden Punkte A und B ergeben muss,

in welchen die Abscissen-Axe von der krummen Linie geschnitten wird; da für jenen $x=a$, für diesen $x=b$ ist, so müssen a und b die Wurzeln dieser Gleichung sein. Setzen wir demnach

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=m(x-a)(x-b),$$

so wird

$$\alpha=m,\delta=-\frac{m(a+b)}{2},\zeta=mab.$$

Setzt man ferner $x=0$, so entsteht die Gleichung

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=0,$$

deren Wurzeln c und d sein müssen, weshalb man haben wird

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=n(y-c)(y-d),$$

wo

$$\gamma=n,\varepsilon=-\frac{n(c+d)}{2},\zeta=ncd.$$

Da aber auch $\zeta=mab$, so müssen die Grössen m und n so gewählt werden, dass

$$mab=ncd$$

werde, welches durch die Annahme

$$m=cd \text{ und } n=ab$$

geschieht.

Die Gleichung (I) wird demnach einer durch die vier gegebenen Punkte gehenden Ellipse entsprechen, wenn man setzt:

$$\alpha=cd,\gamma=ab,2\delta=-cd(a+b),2\varepsilon=-ab(c+d),\zeta=abcd,$$

so dass, ausser β, alle übrigen Coefficienten der Gleichung (I) bestimmt sind. Auf diese Weise bleibt also β unbestimmt, und es entstehen unzählig viele durch die vier gegebenen Punkte gehende Ellipsen, wenn β beliebig, doch so angenommen wird, dass $\beta^2<\alpha\gamma$ werde.

Wir wollen nun die Ordinate XY suchen (Taf. IV. Fig. 2). Es ist aber klar, dass im Allgemeinen jeder Abscisse zwei Ordinaten XY und XY' entsprechen müssen, welche die Wurzeln unserer allgemeinen Gleichung sind. Die Auflösung derselben ergiebt:

$$XY=-\frac{\beta x+\varepsilon-\sqrt{\{(\beta x+\varepsilon)^2-\alpha\gamma x^2-2\gamma\delta x-\gamma\zeta\}}}{\gamma},$$

$$XY'=-\frac{\beta x+\varepsilon+\sqrt{\{(\beta x+\varepsilon)^2-\alpha\gamma x^2-2\gamma\delta x-\gamma\zeta\}}}{\gamma}.$$

Da die Punkte X und Y in der durch die Punkte A, B, C, D

gehenden Ellipse liegen, so wird das Intervall YY' zwischen der Ellipse enthalten sein; man wird also haben, da $YY' = XY' - XY$ ist,

$$YY' = \frac{2\sqrt{\{(\beta x + \varepsilon)^2 - \alpha\gamma x^2 - 2\gamma\delta x - \gamma\zeta\}}}{\gamma}.$$

Wenn der Ordinate XYY' unendlich nahe eine andere xyy' gezogen wird, welche von derselben um das Intervall xv absteht, so wird, da $Xx = \partial x$ ist,

$$xv = \text{Sin}\,\omega\,.\,\partial x$$

sein, und es ergiebt sich das Element des Inhalts der Ellipse

$$xv\,.\,YY' = \frac{2\,\text{Sin}\,\omega\,.\,\partial x}{\gamma}\sqrt{\{(\beta x + \varepsilon)^2 - \alpha\gamma x^2 - 2\gamma\delta x - \gamma\zeta\}}$$

ein Differenzial, dessen Integral auf die ganze Ellipse ausgedehnt, den Inhalt derselben ergiebt. Für diesen findet Euler folgenden Ausdruck:

$$\pi\,.\,\text{Sin}\,\omega\left\{\frac{\gamma\delta^2 + \alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon}{(\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\zeta}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta^2)}}\right\},$$

von welchem er sagt:

> „haec expressio ideo maxime est notatu digna, quod ejus ope omnium ellipsium areae totae satis expedite assignari possunt ex sola aequatione inter coordinatas, sive eae sint rectangulae sive obliquangulae“.

Da nun auf diese Weise der Inhalt aller Ellipsen, welche durch vier gegebene Punkte gehen, ausgedrückt ist, so wird β so zu bestimmen sein, dass jener Ausdruck ein Minimum werde. Differenziirt man denselben in Beziehung auf β und setzt den Differenzialquotienten gleich Null, so ergiebt sich zur Bestimmung von β die folgende cubische Gleichung:

$$\zeta\beta^3 - 4\delta\varepsilon\beta^2 + (3\gamma\delta^2 + 3\alpha\varepsilon^2 - \alpha\gamma\zeta)\beta - 2\alpha\gamma\delta\varepsilon = 0 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

wodurch die Aufgabe gelöst ist. Euler bemerkt noch folgendes:

> „Ecce ergo tota solutio problematis propositi perducta est ad resolutionem aequationis cubicae, quae cum semper habeat radicem realem, certum est, quomodocunque quatuor puncta fuerint disposita, semper unam ellipsin assignari posse per quatuor illa puncta transeuntem, cujus area omnium sit minima, pro qua aequatio inter coordinatas x et y exhiberi poterit, si modo loco B*) radix ex illa aequatione cubica oriunda substituatur. Quodsi forte eveniat ut aequatio illa cubica tres admittat radices reales, totidem quoque solutiones locum habebunt, quarum autem indolem aliis perscrutandam relinquo“.

---

*) Bei Euler hat B die Bedeutung unseres β.

Digitized by Google

Für den Fall, dass $a=0$ und $c=0$ wird, das Viereck sich also in ein Dreieck verwandelt, ist die obige cubische Gleichung nicht anwendbar, weil ausser β auch α und γ unbestimmt bleiben. Der Ausdruck für den Inhalt der Ellipse wird dann

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{\alpha^2\gamma^2 b^2 + \alpha\gamma^2 d^2 - 2\alpha\beta\gamma b d}{(\alpha\gamma-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

wo α, β, γ so zu bestimmen sind, dass derselbe ein Minimum werde. Euler setzt hier $\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}=\operatorname{Cos}\varphi^2$, wodurch sich der Ausdruck für den Inhalt

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{\alpha b^2 + \gamma d^2 - 2bd\operatorname{Cos}\varphi\sqrt{\alpha\gamma}}{\operatorname{Sin}\varphi^3\sqrt{\alpha\gamma}}\right\},$$

oder, wenn zur Wegschaffung der Irrationalität

$$\gamma = \alpha m^2$$

angenommen wird,

$$\tfrac{1}{4}\pi \operatorname{Sin}\omega \left\{\frac{b^2 + d^2 m^2 - 2bdm\operatorname{Cos}\varphi}{m\operatorname{Sin}\varphi^3}\right\}$$

ergiebt, und die Aufgabe reducirt sich darauf, die Grösse m und den Winkel φ so zu bestimmen, dass dieser Ausdruck ein Minimum werde. Sieht man den Winkel φ als bereits gefunden an, so kommt es nur darauf an, den Ausdruck

$$\frac{b^2 + d^2 m^2}{m}$$

zu einem Minimum zu machen. Die Differenziation giebt

$$m = \frac{b}{d},$$

also

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{b^2}{d^2},$$

und man kann, da es sich nur um das Verhältniss von α zu β und γ handelt,

$$\alpha = d^2 \text{ und } \gamma = b^2$$

annehmen.

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck des Inhalts, so wird derselbe

$$\tfrac{1}{4}\pi b d \operatorname{Sin}\omega \left(\frac{1-\operatorname{Cos}\varphi}{\operatorname{Sin}\varphi^3}\right).$$

Digitized by Google

Setzt man hier Tang $\frac{1}{2}\varphi = t$, so wird

$$\frac{1-\text{Cos}\,\varphi}{\text{Sin}\,\varphi^2} = \frac{(1+t^2)^2}{4t},$$

und die Differenziation ergiebt

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

also $\varphi = 60^0$, woraus man für den Inhalt der dem Dreiecke umschriebenen kleinsten Ellipse

$$\frac{2\pi bd\,\text{Sin}\,\omega}{3\sqrt{3}}$$

erhält. Der Inhalt dieser Ellipse verhält sich also immer zu dem Inhalte des gegebenen Dreiecks wie $4\pi : 3\sqrt{3}$.

Die Gleichung der gesuchten Ellipse ergiebt sich auf folgende Weise. Da angenommen wurde $\alpha = d^2$ und $\gamma = b^2$, so wird $\beta = \frac{1}{2}bd$ und durch Substitution dieses Werthes erhält man

$$d^2x^2 + bdxy + b^2y^2 - bd^2x - b^2dy = 0,$$

also

$$y = \frac{d(b-x) \pm d\sqrt{(b-x)(b+3x)}}{2b}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Abscisse x niemals grösser werden kann als b, und die negativen Abscissen nicht die Grenze $\frac{1}{3}b$ überschreiten können.

Verlängert man (Taf. IV. Fig. 3) die Seite OB des gegebenen Dreiecks OBD über O hinaus, und macht $OE = \frac{1}{3}b$, so wird die Ordinate $EF = \frac{2}{3}d$, die beiden Werthe von y fallen in EF zusammen, und diese Linie berührt die Ellipse im Punkte F. Wenn nun die Gerade BF gezogen wird, welche die Seite OD in G schneidet, so ist, wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke OBG und EBF,

$$BE : EF = BO : OG,$$

also $OG = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}OD$, so dass die Gerade BGF die Seite OD halbirt. Da ferner OE der dritte Theil von OB, so ist auch FG der dritte Theil von BG, wodurch der Punkt F sehr leicht bestimmt wird.

Für $x = b$ fallen, da die Grösse unter dem Wurzelzeichen verschwindet, die beiden Werthe von y in einen zusammen, welcher gleich Null sein wird, d. h., zieht man durch B eine unendlich kleine Gerade der OD parallel, so wird dieselbe die Ellipse in B berühren, und deshalb wird BF ein Durchmesser derselben sein, in dessen Mitte S der Mittelpunkt der Ellipse fallen muss. Da nun $FG = \frac{1}{3}BG$, so fällt der Mittelpunkt der Ellipse in S, wenn man $BS = \frac{2}{3}BG$ oder $GS = \frac{1}{3}BG$ macht; dieser Durchmesser wird alle der Seite OD parallele Ordinaten halbiren. Da

Digitized by Google

ferner die drei Punkte B, O, D unter sich verwechselt werden können, so müssen sich auch die Linien OK und DH, welche resp. die Seiten BD und BO halbiren, im Punkte S schneiden. Es ist aber bekannt, dass auf diese Weise der Schwerpunkt des Dreiecks bestimmt wird, so dass wir folgende merkwürdige Eigenschaft erhalten:

> „Der Mittelpunkt der kleinsten Ellipse, welche einem gegebenen Dreiecke umschrieben werden kann, ist der Schwerpunkt desselben".

Wenn das Dreieck gleichseitig, also $b=d$ und $\omega=60^0$, so wird die Gleichung für die demselben umschriebene kleinste Ellipse

$$x^2+xy+y^2-bx-by=0$$

und der Inhalt dieser kleinsten Ellipse, welche sich in einen Kreis verwandelt,

$$\tfrac{1}{3}\pi b^2.$$

Wir betrachten jetzt den Fall, in welchem das Viereck ein Parallelogramm ist. Hier nehmen wir die Diagonalen zu Coordinaten-Axen, und den Durchschnittspunkt derselben zum Anfangspunkte, welche Wahl sich auch später als zweckmässiger für die allgemeine Aufgabe herausstellen wird.

Es sei (Taf. IV. Fig. 4) $ABCD$ das gegebene Parallelogramm. Man ziehe die Diagonalen AD, BC, welche sich in O schneiden. Bezeichnet man AO durch $+a$ und OC durch $+b$, so ist $OD=-a$ und $OB=-b$. Nehmen wir nun die allgemeine Gleichung der gesuchten Ellipse (1) wieder vor, so wird für $y=0$

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=0,$$

welche Gleichung die beiden Wurzeln $x=+a$ und $x=-a$ haben muss. Setzt man also

$$\alpha x^2+2\delta x+\zeta=m(x-a)(x+a),$$

so ergiebt sich

$$\alpha=m, \delta=0, \zeta=-ma^2.$$

Für $x=0$ wird

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=0,$$

welche Gleichung die beiden Wurzeln $y=+b$ und $y=-b$ haben muss.

Setzt man

$$\gamma y^2+2\varepsilon y+\zeta=n(y-b)(y+b),$$

so wird

$$\gamma=n, \varepsilon=0, \zeta=-nb^2,$$

und da

$$ma^2=nb^2$$

sein muss, so wird man setzen können

$$m=b^2, n=a^2.$$

Digitized by Google

Die allgemeine Gleichung für eine dem Parallelogramme umschriebene Ellipse wird also folgende sein:

$$b^2x^2+2\beta xy+a^2y^2-a^2b^2=0.$$

Benutzen wir nun die obige Gleichung (2), so entsteht

$$a^2b^2\beta-\beta^3=0,$$

deren Wurzeln $0, +ab$ und $-ab$ sind, wo nur die erste in Betracht kommen kann, da die Bedingung

$$\beta^2<\alpha\gamma$$

erfüllt werden muss. Bei dieser Gelegenheit bemerke ich aber, dass die Gleichung (2) in diesem Falle aufhört vom dritten Grade zu sein und sich in der That in eine vom ersten Grade verwandelt. Sie ist nämlich entstanden durch Differenziation des allgemeinen Ausdrucks für den Inhalt der Ellipse in Beziehung auf β, welche sich wegen $\delta=0$ und $\varepsilon=0$ auf

$$\pi \operatorname{Sin}\omega\,.\,\frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2b^2-\beta^2)}}$$

reducirt. Die Differenziation giebt für den Differenzialquotienten dieser Function in Beziehung auf β

$$\pi \operatorname{Sin}\omega\,.\,\frac{a^2b^2\beta}{(a^2b^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}}=0,$$

also nur

$$\beta=0.$$

Die beiden andern Wurzeln $+ab$ und $-ab$ scheiden also von selbst aus.

Zu ähnlichen Betrachtungen wird sich auch noch im Folgenden Gelegenheit bieten.

Die Gleichung für die gesuchte Ellipse ist demnach

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

und der Inhalt dieser Ellipse

$$\pi \operatorname{Sin}\omega\,.\,ab.$$

Der Inhalt der Ellipse verhält sich also zu dem Inhalte des Parallelogrammes wie $\pi:2$.

Man sieht ferner, dass der Mittelpunkt dieser Ellipse in den Durchschnittspunkt O der beiden Diagonalen des Parallelogramms fällt, welche als conjugirte Durchmesser erscheinen, die sich unter dem Winkel ω schneiden. Daraus folgt, dass die Tangenten in den Punkten A und D dem Durchmesser BC, und die Tangenten in B und C dem Durchmesser AD parallel sein werden, woraus die Construction der Ellipse sich leicht ergiebt. Wenn der Winkel

Digitized by Google

ω ein Rechter ist, so verwandelt sich das Parallelogramm in einen Rhombus, dessen Diagonalen die Haupt-Axen unserer Ellipse sind. Für $a=b$ wird das Parallelogramm ein Rechteck, und man erhält, wenn f und g die halben Haupt-Axen der gesuchten Ellipse sind,

$$f = a \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\omega \sqrt{2},$$
$$g = a \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}\omega \sqrt{2},$$

woraus die bekannte Eigenschaft

$$f^2 + g^2 = 2a^2,$$
$$fg = a^2 \operatorname{Sin} \omega$$

hervorgeht.

Wir kommen jetzt zu der Betrachtung der Wurzeln der von Euler aufgestellten Gleichung (2). Ich werde zeigen, dass diese cubische Gleichung, auf welche das Problem führt, im Allgemeinen immer drei mögliche und zwar positive Wurzeln hat, und dass diejenige, welche hier allein in Betracht kommt, stets die kleinste von allen ist, während die beiden andern Wurzeln sich auf Kegelschnitte, die nicht Ellipsen sind, beziehen.

Zu diesem Ende setze ich

$$\beta = \tfrac{1}{2} z \sqrt{bacd}$$

und transformire die Gleichung (2), welche durch Substitution der Werthe von α, γ, δ, ε, ζ folgende wird:

$$\beta^3 - (a+b)(c+d)\beta^2$$
$$+ \frac{3cd(a+b)^2 + 3ab(c+d)^2 - 4abcd}{4}\beta - \frac{abcd(a+b)(c+d)}{2} = 0 \ldots (3)$$

in nachstehende:

$$z^3 - 2pqz^2 + \{3(p^2+q^2) - 4\}z - 4pq = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

wo

$$p = \frac{a+b}{\sqrt{ab}}, \; q = \frac{c+d}{\sqrt{cd}}.$$

Das allgemeine Criterium, dass die cubische Gleichung

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$$

drei mögliche Wurzeln habe, ist bekanntlich:

$$B^2(A^2 - 4B) > 27C^2 + 2AC(2A^2 - 9B),$$

welches sich für unsere Gleichung in

$$\{9(p^2+q^2)^2 - 24(p^2+q^2) + 16\}\{p^2q^2 - 3(p^2+q^2) + 4\}$$
$$> 108p^2q^2 + 4p^2q^2\{8p^2q^2 - 27(p^2+q^2) + 36\}$$

Digitized by Google

verwandelt. Da nun sowohl p als q grösser als 2 sind, so wird man haben

$$p^2=4+t,\quad q^2=4+u,$$

wo $t=\frac{(a-b)^2}{ab}$ und $u=\frac{(c-d)^2}{cd}$ positive Grössen sind; die obige Bedingung wird demnach erfüllt, wenn der Ausdruck:

$$4(t^2+u^2)+9(t^3+u^3)+9tu(t+u)^2-4tu-tu^2-t^2u-32t^2u^2$$

positiv ist. Derselbe kann aber wie folgt geschrieben werden:

$$4(t-u)^2+4tu+8(t^3+u^3)+(t+u)(t-u)^2+9tu(t-u)^2+4t^2u^2,$$

woraus hervorgeht, dass diese Grösse in der That stets positiv ist, also die Gleichung (4), und daher auch die Gleichung (3) oder (2), immer drei mögliche Wurzeln hat. Da ferner der Coefficient von z in der Gleichung (4) offenbar positiv ist, so sind nach dem Descartes'schen Satze die Wurzeln dieser Gleichung zugleich alle positiv.

Die Bedingung $\beta^2<\alpha\gamma$ fordert, dass $z<2$ sei. Da in der Gleichung (4) der links stehende Theil für $z=0$ negativ, nämlich $-4pq$ und für $z=2$ positiv, nämlich $6(p-q^2)$ wird, so liegt eine Wurzel zwischen den Grenzen 0 und 2, und da das Glied $4pq$ immer grösser als 16 ist, so können zwischen diesen Grenzen nicht alle drei Wurzeln enthalten sein, sondern nur eine und zwar die kleinste von allen, wodurch die obige Behauptung, dass diejenige Wurzel, welche für die Aufgabe allein in Betracht kommt, die kleinste der drei Wurzeln ist, sich bestätigt.

Nicolaus Fuss hat in den Novis Actis der Petersburger Akademie Tom XI. 1798. eine Abhandlung *) veröffentlicht, in welcher er die von Euler gegebene cubische Gleichung in Beziehung auf ihre Wurzeln untersucht, und auf einem von dem hier eingeschlagenen sehr verschiedenen Wege ebenfalls findet, dass dieselbe immer drei reelle Wurzeln hat, von denen eine dem vorliegenden Probleme entspricht, die andern beiden aber sich auf Hyperbeln beziehen. Um das Erscheinen derselben zu erklären, betrachtet er die in Rede stehende Aufgabe als einen besondern Fall dieser allgemeinen:

> „Unter allen durch vier gegebene Punkte gehenden krummen Linien der zweiten Ordnung diejenigen zu finden, bei welchen das Rechteck aus den Halbaxen ein Kleinstes wird“,

wo jedoch die Parabel wegen ihrer unendlich grossen Axe ausgeschlossen ist.

---

*) „Dilucidationes super problemate geometrico de ellipsi minima per data quatuor puncta ducenda.“

Digitized by Google

Anwendung der Projectionslehre auf die Aufgabe: „Die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Vierecke umschrieben werden kann.“

Aufgabe.

Zwei einander schneidende Sehnen eines Kreises sind mit ihren Segmenten gegeben, man sucht den Winkel, unter welchem diese Linien sich schneiden müssen, damit der Inhalt des durch ihre Endpunkte gehenden Kreises in Beziehung auf den Inhalt des Vierecks, welches durch Verbindung dieser Punkte entsteht, ein Kleinstes werde.

Auflösung.

Wir bezeichnen die Segmente der einen Sehne durch α und β, die der andern durch γ und δ, wo im Allgemeinen $\alpha > \beta$ und $\gamma > \delta$ sein mag, den gesuchten Winkel durch φ, den Inhalt des entsprechenden Kreises und Vierecks resp. durch K und J, dann ist

$$\alpha\beta = \gamma\delta$$

und

$$\frac{K}{J} = \frac{(\alpha-\beta)^2 + (\gamma-\delta)^2 - 2(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)\operatorname{Cos}\varphi + 4\alpha\beta \operatorname{Sin}\varphi^2}{2(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)\operatorname{Sin}\varphi^3},$$

welcher Ausdruck ein Kleinstes werden soll. Differenziirt man denselben in Beziehung auf φ und setzt den ersten Differenzialquotienten gleich Null, so ergiebt sich der gesuchte Winkel aus folgender Gleichung:

$$\text{(I)} \;\ldots\; \operatorname{Cosec}\varphi^2 \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Cos}\varphi^3 + \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi^2 \\ - \dfrac{3[(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2]+4\alpha\beta}{4\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi + \dfrac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta} \end{array} \right\} = 0$$

oder wenn man den Factor $\operatorname{Cosec}\varphi^2$ weglässt, aus dieser:

$$\text{(II)} \;\ldots\ldots\; \operatorname{Cos}\varphi^3 + \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi^2 - \frac{3\{(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\delta)^2\}+4\alpha\beta}{4\alpha\beta}\operatorname{Cos}\varphi + \frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta} = 0.$$

Im Allgemeinen kann man zwar mit diesem Factor die Gleichung dividiren, allein in besondern Fällen wird man durch Berücksich-

Digitized by Google

tigung desselben diejenigen Wurzeln, welche nicht zum Probleme gehören, sogleich entfernen können.

Als specielle Fälle betrachten wir folgende:

Setzt man $\alpha=\gamma$ und $\beta=\delta$, in welchem Falle das Viereck ein Trapez wird, dessen nicht parallele Seiten einander gleich sind, so entsteht:

$$\mathrm{Cosec}\,\varphi^4 \left\{ \mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} \mathrm{Cos}\,\varphi^2 - \frac{3(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta}{2\alpha\beta} \mathrm{Cos}\,\varphi + \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} \right\}$$

$$= \mathrm{Cosec}\,\varphi^4 \left\{ \mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 1\right) \mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} \right\} (1-\mathrm{Cos}\,\varphi) = 0,$$

also bleibt, da der Factor $1-\mathrm{Cos}\,\varphi$ sich gegen denselben Factor in $\mathrm{Sin}\,\varphi^2$ weghebt, nur die quadratische Gleichung

$$\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} - 1\right) \mathrm{Cos}\,\varphi - \frac{(\alpha-\beta)^2}{2\alpha\beta} = 0,$$

und man erhält

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{-((\alpha-\beta)^2+\alpha\beta) \pm \sqrt{((\alpha-\beta)^2+\alpha\beta)^2 + 2\alpha\beta(\alpha-\beta)^2}}{2\alpha\beta},$$

wo aber nur der erste Werth in Betracht kommen kann, da der andere $\mathrm{Cos}\,\varphi > -1$, also für φ einen unmöglichen Werth giebt.

Setzt man ferner $\gamma=\delta$, d. h. ist das Viereck ein solches, in welchem eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so hat man

$$\mathrm{Cosec}\,\varphi^2 \left\{ \mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \frac{3(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta}{4\alpha\beta} \mathrm{Cos}\,\varphi \right\} = 0,$$

also nur $\mathrm{Cos}\,\varphi=0$, d. h. $\varphi=90^0$, da die andern beiden Wurzeln

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = \pm\sqrt{\left\{1+\tfrac{3}{4}\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta}\right\}},$$

also für φ unmögliches geben.

Wenn $\alpha=\beta$ und $\gamma=\delta$, also, da $\alpha\beta=\gamma\delta$ sein muss, das Viereck ein Rechteck wird, so findet sich

$$\mathrm{Cosec}\,\varphi^2 . (\mathrm{Cos}\,\varphi^3 - \mathrm{Cos}\,\varphi) = 0,$$

also ist die einzige Wurzel

$$\mathrm{Cos}\,\varphi = 0 \text{ und daher } \varphi = 90^0,$$

welches mit dem bekannten Satze, dass das Quadrat unter allen einem gegebenen Kreise eingeschriebenen Vierecken den grössten Inhalt hat, übereinstimmt.

Setzt man $\alpha=\gamma=0$ und $\beta=\delta$, in welchem Falle sich das

Digitized by Google

Viereck in ein gleichschenkliges Dreieck verwandelt, so ergiebt sich nur die eine Wurzel

$$\text{Cos}\,\varphi = \tfrac{1}{2},$$

also $\varphi = 60^0$, welches den Satz enthält, dass unter allen einem Kreise eingeschriebenen Dreiecken das gleichseitige den grössten Inhalt hat.

Wir wollen jetzt die Gleichung (II) in Beziehung auf ihre Wurzeln untersuchen.

Setzt man $\text{Cos}\,\varphi = 0$, so ist der Werth des links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks

$$\frac{(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)}{2\alpha\beta},$$

also positiv, wenn $\alpha-\beta$ und $\gamma-\delta$ gleiche Zeichen haben, negativ, wenn eine von beiden Grössen $+$ und die andere $-$ ist; setzt man $\text{Cos}\,\varphi = +1$, so wird derselbe

$$-\frac{\tfrac{3}{4}\{(\alpha-\beta)-(\gamma-\delta)\}^2}{\alpha\beta},$$

also negativ.

Für $\text{Cos}\,\varphi = -1$ geht jener Ausdruck in

$$+\frac{\tfrac{3}{4}\{(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)\}^2}{\alpha\beta}$$

über, ist also positiv, für $\text{Cos}\,\varphi = +\infty$ wird derselbe

$+\infty$, also positiv

und für $\text{Cos}\,\varphi = -\infty$ wird er

$-\infty$, also negativ,

weshalb eine Wurzel zwischen $+1$ und -1 liegt; eine zweite Wurzel liegt zwischen $+1$ und $+\infty$ und eine dritte zwischen -1 und $-\infty$. Diese beiden Wurzeln geben aber $\text{Cos}\,\varphi > \pm 1$, also für φ einen unmöglichen Winkel und gehören daher nicht zum Probleme, so dass nur die eine, zwischen $+1$ und -1 liegende, für unsere Aufgabe in Betracht kommt. Dieselbe ist $+$ wenn $\alpha-\beta$ und $\gamma-\delta$ gleiche, und $-$ wenn sie ungleiche Zeichen haben. In jenem Falle erscheint der spitze, in diesem sein stumpfer Nebenwinkel.

Wenn man in dem gegebenen Vierecke $ABCD$ (Taf. IV. Fig. 5.) die beiden einander innerhalb desselben in O schneidenden Diagonalen AC und BD zieht und die Abschnitte $AO = a$, $OC = b$, $BO = c$, $OD = d$ setzt, wo im Allgemeinen immer $a > b$, $c > d$ anzunehmen ist, so kann man alle Ellipsen, welche diesem Vierecke umschrieben sind, als Projectionen des Kreises K, und das gegebene Viereck als Projection des entsprechenden Kreisvierecks J betrachten, wobei zugleich a als Projection von α, b als Projection von β, c als Projection von γ und d als Projection von δ erscheint, so dass

Digitized by Google

$$\alpha = a,$$
$$\beta = a\frac{b}{a},$$
$$\gamma = a\sqrt{\frac{bc}{ad}},$$
$$\delta = a\sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

gesetzt werden darf.

Bezeichnet man den Inhalt des gegebenen Vierecks *ABCD* durch *i* und den Inhalt einer ihm umschriebenen Ellipse durch *E*, so ist offenbar

$$\frac{K}{J} = \frac{E}{i},$$

also, wenn man den Winkel, unter welchem die Diagonalen des gegebenen Vierecks einander schneiden, durch ω bezeichnet,

$$E = \frac{\pi}{4}\operatorname{Sin}\omega\left\{\frac{(a-b)^2\sqrt{\frac{cd}{ab}}+(c-d)^2\sqrt{\frac{ab}{cd}}-2(a-b)(c-d)\operatorname{Cos}\varphi+4\sqrt{abcd}\operatorname{Sin}\varphi^2}{\operatorname{Sin}\varphi^3}\right\},$$

Digitized by Google

wo φ den Winkel bedeutet, welchen die beiden Diagonalen desjenigen Kreisvierecks einschliessen, von welchem das gegebene Viereck die orthographische Projection ist.

Wenn nun

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

die Gleichung einer dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse ist, der Anfangspunkt der schiefwinkligen Coordinaten in dem Durchschnittspunkte O der Diagonalen liegt, und die Axen des schiefwinkligen Coordinatensystems in diese Diagonalen fallen, wobei zugleich die Richtungen a und c als positiv, die von b und d als negativ anzunehmen sind, so ergiebt sich

$$A = cd,\ C = ab,\ D = -\tfrac{1}{2}cd(a-b),\ E = -\tfrac{1}{2}ab(c-d),$$
$$F = -abcd,$$

während B unbestimmt bleibt.

Die Gleichung des Kreises K auf schiefwinklige Coordinaten bezogen, deren Anfangspunkt der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Kreisvierecks ist, und deren Axen in diese Diagonalen fallen, ist

$$(\xi - g)^2 + (\eta - h)^2 + 2(\xi - g)(\eta - h)\operatorname{Cos}\varphi = r^2,$$

wo g und h resp. die Abscisse und Ordinate des Mittelpunkts des Kreises, r seinen Radius bedeutet und φ seine obige Bedeutung behält. Bezeichnet man ferner die Winkel, welche die Diagonalen des Kreisvierecks mit der Projections-Ebene bilden, in welcher das gegebene Viereck liegt, durch ϑ und λ, und die Coordinaten des Mittelpunkts der dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse durch m und n, so ist

$$\xi = x\operatorname{Sec}\vartheta,\quad g = m\operatorname{Sec}\vartheta,$$
$$\eta = y\operatorname{Sec}\lambda,\quad h = n\operatorname{Sec}\lambda;$$

und man erhält:

$$A = \operatorname{Cos}\lambda^2,$$
$$B = +\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda\operatorname{Cos}\varphi,$$
$$C = \operatorname{Cos}\vartheta^2,$$
$$D = -(m\operatorname{Cos}\lambda - n\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\vartheta)\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$E = -(n\operatorname{Cos}\vartheta - m\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\lambda)\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda,$$
$$F = m^2\operatorname{Cos}\lambda^2 + n^2\operatorname{Cos}\vartheta^2 - 2mn\operatorname{Cos}\vartheta\operatorname{Cos}\lambda\operatorname{Cos}\varphi - r^2\operatorname{Cos}\vartheta^2\operatorname{Cos}\lambda^2.$$

Demnach ist

$$B^2 = abcd\operatorname{Cos}\varphi^2,$$

und man erhält

$$B = \operatorname{Cos}\varphi\sqrt{abcd}.$$

Digitized by Google

Der Werth von B, welcher der **kleinsten** dem gegebenen Vierecke umschriebenen Ellipse entspricht, ergiebt sich also aus der Gleichung (II); man erhält nämlich durch die Substitution folgende cubische Gleichung

$$\text{(III)} \ldots\ldots B^3+(a-b)(c-d)B^2$$
$$-\frac{3\{(a-b)^2cd+(c-d)^2ab\}+4abcd}{4}B+\frac{(a-b)(c-d)abcd}{2}=0.$$

Die **Euler**'sche cubische Gleichung (2) verwandelt sich, wenn man den Anfangspunkt, wie hier geschehen, in den Durchschnittspunkt der Diagonalen verlegt, also dort für α, γ etc. resp. die obigen Werthe für A, C etc. setzt, genau in diese Gleichung (III). Bei der Untersuchung specieller Fälle wird man auch hier den Factor $\operatorname{Cosec}\varphi^2$ nicht unberücksichtiget lassen, indem man statt Gleichung (III) unmittelbar anzuwenden, dieselbe zuvor durch den Factor

$$\frac{1}{(B+\sqrt{abcd})(B-\sqrt{abcd})}$$

multipliciren wird.

Setzt man $ad=bc$, wodurch das gegebene Viereck sich in ein Trapez verwandelt, so ergiebt sich

$$\operatorname{Cos}\varphi=\frac{-((a-b)^2+ab)\mp\sqrt{((a-b)^2+ab)^2+2ab(a-b)^2}}{2ab},$$

wo aber nur der erste Werth in Betracht kommt, da der andere für φ einen unmöglichen Werth giebt.

Wenn $c=d$ ist, d. h. ist das Viereck ein solches, in welchem eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so ergiebt sich

$$\operatorname{Cos}\varphi=0 \text{ und } \operatorname{Cos}\varphi=\pm\sqrt{\{1+\tfrac{1}{4}\frac{(a-b)^2}{ab}\}};$$

man hat also allein $B=0$, indem die anderen beiden Wurzeln ausscheiden, weil φ unmögliche Werthe erhält.

Die Gleichung der gesuchten Ellipse ist folgende:

$$c^2x^2+aby^2-c^2(a-b)x-abc^2=0,$$

oder, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der ungleich getheilten Diagonale verlegt, wodurch

$$x \text{ in } x+\frac{a-b}{2}$$

übergeht,

$$c^2x^2+aby^2=c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

und man erhält folgenden Satz:

„Wenn in dem gegebenen Vierecke eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so fällt der Mittelpunkt der kleinsten umschriebenen Ellipse in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Diagonale.“

Hier sind $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{c(a+b)}{2\sqrt{ab}}$ conjugirte Halbmesser der gesuchten Ellipse, die Construction derselben ist daher sehr leicht. Wenn ausser $c=d$ auch $a=b$, also das gegebene Viereck ein Parallelogramm ist, so ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Ellipse:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

übereinstimmend mit dem obigen Resultate.

Die Aufgabe: „die kleinste Ellipse zu finden, welche einem gegebenen Dreiecke umschrieben werden kann“, von welcher wir oben die Euler'sche Auflösung gegeben haben, ordnet sich auch jenem Falle sehr einfach unter. Ist nämlich (Taf. IV. Fig. 3.) BOD das gegebene Dreieck, halbirt man eine Seite OD in G, zieht BG und verlängert dieselbe bis $FG=\frac{1}{2}BG$ wird, so muss die gesuchte kleinste Ellipse durch den Punkt F gehen. Setzt man also $DG=GO=c$, $BG=a$ und $FG=\frac{1}{2}a$, so wird die obige Gleichung folgende:

$$9c^2x^2+3a^2y^2=4a^2c^2.$$

Hier sind $\frac{2}{3}a$ und $\frac{2c}{\sqrt{3}}$ conjugirte Halbmesser. Der Anfangspunkt der Coordinaten ist Mittelpunkt der Ellipse und fällt in den Schwerpunkt des gegebenen Dreiecks.

Die Gleichung (III) kann auf ähnliche Weise wie Gleichung (3) transformirt werden. Setzt man nämlich

$$p=\frac{a-b}{\sqrt{ab}} \text{ und } q=\frac{c-d}{\sqrt{cd}},$$

so ergiebt sich, wenn $B=\frac{1}{2}z\sqrt{abcd}$ gesetzt wird:

$$\text{(IV)} \ldots \quad z^3+2pqz^2-\{3(p^2+q^2)+4\}z+4pq=0,$$

wo p und q stets positiv angenommen werden können. Diese Gleichung hat offenbar zwei positive und eine negative Wurzel; für unsere Aufgabe kommt nur die positive zwischen 0 und 2 liegende Wurzel in Betracht.

Will man den Factor Cosec φ^2 gleich mit berücksichtigen, so nimmt diese Gleichung folgende Gestalt an:

$$\text{(V)} \quad \{z^3+2pqz^2-[3(p^2+q^2)+4]z+4pq\}.\frac{1}{(z-2)(z+2)}=0.$$

Ist das gegebene Viereck ein Trapez, so wird $p=q$ und diese Gleichung reducirt sich auf folgende quadratische:

Digitized by Google

$$z^2+2(p^2+1)z-2p^2=0.$$

Ist das gegebene Viereck ein Parallelogramm, so wird $p=q=0$, und die Gleichung verwandelt sich in

$$z=0,$$

übereinstimmend mit den obigen Resultaten.

Nachdem wir die Aufgabe: „die kleinste einem gegebenen Vierecke umschriebene Ellipse zu finden“, in ihrer allgemeinsten Form gelöst haben, stellen wir noch einige Sätze zusammen, welche sich ohne Calcul auf elementare Weise ableiten lassen, und zum Theil in jener Aufgabe enthalten sind. Wir schicken folgende leicht zu beweisende Sätze voran.

1) Bezeichnet i den Neigungswinkel einer geraden Linie a gegen die Projections-Ebene, und a' die orthographische Projection dieser Linie, so ist

$$a' = a \operatorname{Cos} i.$$

Zusatz. Jede gerade Linie, welche in irgend einem Verhältnisse getheilt ist, erscheint in der Projection in demselben Verhältnisse getheilt.

2) Jedes Dreieck ist zu betrachten als die Projection eines gleichseitigen Dreiecks, jedes Parallelogramm als die Projection eines Quadrats, jede Ellipse als die Projection eines Kreises.

3) Wenn der Flächen-Inhalt irgend einer ebenen Figur durch F, der ihrer Projection durch F' bezeichnet wird, so ist

$$F' = F . \operatorname{Cos} i,$$

wo i den Neigungswinkel der zu projicirenden Figur gegen die Projections-Ebene bedeutet.

Zusatz. Jede ebene Figur, welche in einem gewissen Verhältnisse getheilt ist, erscheint in der Projection in demselben Verhaltnisse getheilt.

Aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten sind folgende elementare leicht zu beweisende Sätze bekannt:

1) Unter allen nEcken, welche einem gegebenen Kreise eingeschrieben werden können, hat das reguläre den grössten Flächen-Inhalt.

Zusatz. Das gleichseitige Dreieck ist das grösste unter allen Dreiecken und das Quadrat das grösste unter allen Vierecken, welche einem gegebenen Kreise eingeschrieben werden können.

Digitized by Google

2) Unter allen nEcken, welche einem gegebenen Kreise umschrieben werden können, hat das reguläre den kleinsten Flächen-Inhalt.

Zusatz. Das gleichseitige Dreieck ist das kleinste unter allen Dreiecken und das Quadrat das kleinste unter allen Vierecken, welche einem gegebenen Kreise umschrieben werden können.

Diesen Sätzen fügen wir noch folgenden hinzu:

Lehrsatz.

Wenn eine von zwei Sehnen eines Kreises durch die andere halbirt wird, so ist der Inhalt des durch die Endpunkte derselben gehenden Kreises in Beziehung auf den Inhalt des Kreisvierecks, welches durch die Verbindung dieser Endpunkte entsteht, ein *Kleinstes*, wenn die beiden Sehnen auf einander senkrecht stehen, also der Mittelpunkt des Kreises in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Sehne fällt.

Beweis.

Es seien (Taf. IV. Fig. 6.) AB, CD die beiden Sehnen, welche sich in E schneiden, so dass $AE=EB$ ist. CD stehe auf AB senkrecht. Man halbire CD in F, so ist dieser Punkt der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B, C, D gehenden Kreises; der Inhalt desselben ist in Beziehung auf das Viereck $ACBD$ ein Kleinstes. Denn zieht man durch E die Linie $C'D'$ beliebig, macht $C'E=CE$, $D'E=DE$, halbirt $C'D'$ in G und zieht GH senkrecht auf $C'D'$, so ist H der Mittelpunkt des durch die Punkte A, B, C', D' gehenden Kreises und $C'H$ ein Radius desselben. Da nun $C'H > C'G$ und $C'G = CF$, so ist $C'H > CF$, also der Inhalt des durch A, B, C', D' gehenden Kreises grösser als der Inhalt des durch A, B, C, D gehenden. Zugleich ist Viereck $AC'BD' <$ Viereck $ACBD$, demnach

$$\frac{\text{Kreis } AC'BD'}{\text{Viereck } AC'BD'} > \frac{\text{Kreis } ACBD}{\text{Viereck } ACBD},$$

w. z. b. w.

Aus der Verbindung dieser Sätze mit den obigen erhält man nun leicht die folgenden:

> „Wenn in einem Vierecke eine von beiden Diagonalen durch die andere halbirt wird, so fällt der Mittelpunkt der diesem Vierecke umschriebenen kleinsten Ellipse in den Halbirungspunkt der ungleich getheilten Diagonale, woraus sich eine leichte geometrische Construction dieser Ellipse ergiebt.“

Zusatz 1. Der Mittelpunkt der einem Parallelogramme umschriebenen kleinsten Ellipse liegt im Durchschnittspunkte der beiden Diagonalen.

Digitized by Google

Zusatz 2. Der Mittelpunkt der einem Dreiecke umschriebenen kleinsten Ellipse liegt im Schwerpunkte desselben.

Wenn ein gleichseitiges Dreieck mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar sind die Axen der kleineren die Hälften der ihnen entsprechenden Axen der grössern Ellipse; die Projection des gleichseitigen Dreiecks wird ein Dreieck, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses Dreiecks.

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster Dreiecke einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen Dreiecks; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse, und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen halb so gross sind, als die entsprechenden jener.“ *)

Wenn ein Quadrat mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar verhalten sich die Axen der kleineren zu den entsprechenden der grösseren wie $1:\sqrt{2}$; die Projection des Quadrats ist ein Parallelogramm, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses Parallelogramms.

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster Parallelogramme einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen Parallelogramms; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen sich zu den entsprechenden der gegebenen wie $1:\sqrt{2}$ verhalten“, und allgemein:

Wenn ein reguläres nEck mit dem ihm umschriebenen und eingeschriebenen Kreise orthographisch projicirt wird, so entstehen in der Projection zwei concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipsen, und zwar verhalten sich die Axen der kleineren zu den entsprechenden der grössern wie $\operatorname{Cos}\frac{2\pi}{n}:1$; die Projection des regulären nEcks ist ein nEck, dessen Ecken in dem Umfange der grössern Ellipse liegen und dessen Seiten die kleinere berühren. Der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Ellipsen ist der Schwerpunkt dieses nEcks.

---

*) Man vergleiche Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. XXX. Heft 3. S. 275.

Digitized by Google

„Demnach lässt sich in eine gegebene Ellipse eine Schaar grösster nEcke einschreiben; nämlich jeder Punkt der Ellipse ist Ecke eines solchen nEcks; dieselben haben gleichen Inhalt, ihre Schwerpunkte liegen im Mittelpunkte der Ellipse und ihre Seiten hüllen eine zweite der gegebenen concentrische ähnliche und ähnlich liegende Ellipse ein, deren Axen sich zu den entsprechenden der gegebenen wie $\text{Cos}\frac{2\pi}{n}:1$ verhalten."

XVI.

Ueber einige Relationen zwischen den Inhalten zweier Tetraëder, die für eine Fläche zweiter Ordnung reciprok von einander sind.

Von dem
Herrn Doctor A. R. Luchterhandt
zu Berlin.

Nehmen wir zunächst als Fläche zweiter Ordnung eine Kugel, deren Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

ist und bezeichnen die Coordinaten der Ecken des einen Tetraëders mit x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4; so hat man für die Polarebenen derselben die Gleichungen

$$x_1x+y_1y+z_1z=r^2, \quad (1)$$

$$x_2x+y_2y+z_2z=r^2, \quad (2)$$

$$x_3x+y_3y+z_3z=r^2. \quad (3)$$

$$x_4x+y_4y+z_4z=r^2. \quad (4)$$

Der Durchschnitt je dreier dieser Ebenen giebt eine Ecke des reciproken Tetraëders. Bezeichnen wir die Coordinaten dieser

Punkte mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \xi_4, \eta_4, \zeta_4$ und zwar in dem Sinne, dass ξ_1, η_1, ζ_1 dem Schneidepunkt der Ebenen (2), (3) und (4) entsprechen, und setzt man noch der Kürze wegen

$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = a_{12}, \quad z_1 x_2 - z_2 x_1 = b_{12}, \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 = c_{12};$$
$$y_1 z_3 - y_3 z_1 = a_{13}, \quad z_1 x_3 - z_3 x_1 = b_{13}, \quad x_1 y_3 - x_3 y_1 = c_{13};$$
$$y_1 z_4 - y_4 z_1 = a_{14}, \quad z_1 x_4 - z_4 x_1 = b_{14}, \quad x_1 y_4 - x_4 y_1 = c_{14};$$
$$y_2 z_3 - y_3 z_2 = a_{23}, \quad z_2 x_3 - z_3 x_2 = b_{23}, \quad x_2 y_3 - x_3 y_2 = c_{23};$$
$$y_2 z_4 - y_4 z_2 = a_{24}, \quad z_2 x_4 - z_4 x_2 = b_{24}, \quad x_2 y_4 - x_4 y_2 = c_{24};$$
$$y_3 z_4 - y_4 z_3 = a_{34}, \quad z_3 x_4 - z_4 x_3 = b_{34}, \quad x_3 y_4 - x_4 y_3 = c_{34};$$

und bemerkt, dass $a_{12} + a_{21} = 0$ u. s. w., so erhält man

$$\xi_1 = r^2 \frac{a_{34} + a_{42} + a_{23}}{N(234)}, \quad \eta_1 = r^2 \frac{b_{34} + b_{42} + b_{23}}{N(234)}, \quad \zeta_1 = r^2 \frac{c_{34} + c_{42} + c_{23}}{N(234)};$$
$$\xi_2 = r^2 \frac{a_{41} + a_{13} + a_{34}}{N(134)}, \quad \eta_2 = r^2 \frac{b_{41} + b_{13} + b_{34}}{N(134)}, \quad \zeta_2 = r^2 \frac{c_{41} + c_{13} + c_{34}}{N(134)};$$
$$\xi_3 = r^2 \frac{a_{12} + a_{24} + a_{41}}{N(124)}, \quad \eta_3 = r^2 \frac{b_{12} + b_{24} + b_{41}}{N(124)}, \quad \zeta_3 = r^2 \frac{c_{12} + c_{24} + c_{41}}{N(124)};$$
$$\xi_4 = r^2 \frac{a_{23} + a_{31} + a_{12}}{N(123)}, \quad \eta_4 = r^2 \frac{b_{23} + b_{31} + b_{12}}{N(123)}, \quad \zeta_4 = r^2 \frac{c_{23} + c_{31} + c_{12}}{N(123)};$$

wo

$$N(234) = x_2 a_{34} + x_3 a_{42} + x_4 a_{23} = y_2 b_{34} + y_3 b_{42} + y_4 b_{23}$$
$$= z_2 c_{34} + z_3 c_{42} + z_4 c_{23};$$
$$N(134) = x_3 a_{41} + x_4 a_{13} + x_1 a_{34} = y_3 b_{41} + y_4 b_{13} + y_1 b_{34}$$
$$= z_3 c_{41} + z_4 c_{13} + z_1 c_{34};$$
$$N(124) = x_4 a_{12} + x_1 a_{24} + x_2 a_{41} = y_4 b_{12} + y_1 b_{24} + y_2 b_{41}$$
$$= z_4 c_{12} + z_1 c_{24} + z_2 c_{41};$$
$$N(123) = x_1 a_{23} + x_2 a_{31} + x_3 a_{12} = y_1 b_{23} + y_2 b_{31} + y_3 b_{12}$$
$$= z_1 c_{23} + z_2 c_{31} + z_3 c_{12}.$$

Bezeichnet P den Inhalt des einen und Π den des anderen Tetraëders, so hat man, ohne Rücksicht auf das Zeichen,

$$6P = x_1 (a_{23} + a_{34} + a_{42}) + x_2 (a_{14} + a_{43} + a_{31}) + x_3 (a_{12} + a_{24} + a_{41})$$
$$+ x_4 (a_{13} + a_{32} + a_{21}),$$

$$6\Pi = \xi_1 (\alpha_{23} + \alpha_{34} + \alpha_{42}) + \xi_2 (\alpha_{24} + \alpha_{43} + \alpha_{31}) + \xi_3 (\alpha_{12} + \alpha_{24} + \alpha_{41})$$
$$+ \xi_4 (\alpha_{13} + \alpha_{32} + \alpha_{21}).$$

Nun ist aber

$$\alpha_{12} = \eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1 = \frac{6 (x_4 - x_3) r^4 . P}{N(234) N(134)},$$

$$\alpha_{13}=\eta_1\zeta_3-\eta_3\zeta_1=\frac{6(x_4-x_2)r^4.P}{N(234)N(124)},$$

$$\alpha_{14}=\eta_1\zeta_4-\eta_4\zeta_1=\frac{6(x_3-x_2)r^4.P}{N(123)N(234)},$$

$$\alpha_{23}=\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2=\frac{6(x_4-x_1)r^4.P}{N(134)N(124)},$$

$$\alpha_{24}=\eta_2\zeta_4-\eta_4\zeta_2=\frac{6(x_3-x_1)r^4.P}{N(123)N(134)},$$

$$\alpha_{34}=\eta_3\zeta_4-\eta_4\zeta_3=\frac{6(x_2-x_1)r^4.P}{N(123)N(124)};$$

und deshalb

$$\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42}=-\frac{36r^4P^2.x_1}{N(123)N(124)N(134)},$$

$$\alpha_{14}+\alpha_{43}+\alpha_{31}=+\frac{36r^4P^2.x_2}{N(123)N(234)N(124)},$$

$$\alpha_{12}+\alpha_{24}+\alpha_{41}=-\frac{36r^4P^2.x_3}{N(123)N(134)N(234)},$$

$$\alpha_{13}+\alpha_{32}+\alpha_{21}=+\frac{36r^4P^2.x_4}{N(124)N(134)N(234)};$$

und hiernach:

$$6\Pi=36r^6.P^2.\frac{\left\{\begin{array}{c}x_1(\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42})+x_2(\alpha_{14}+\alpha_{43}+\alpha_{31})+x_3(\alpha_{12}+\alpha_{24}+\alpha_{41})\\+x_4(\alpha_{13}+\alpha_{32}+\alpha_{21})\end{array}\right\}}{N(123)N(124)N(134)N(234)}$$

$$=\frac{216r^6P^3}{N(123)N(124)N(134)N(234)}.$$

Bedeuten nun noch P_1, P_2, P_3, P_4 die Rauminhalte der Tetraëder, welche durch den Mittelpunkt der Kugel und durch je drei der Eckpunkte des ersten Tetraëders gebildet werden, so dass also

$$N(123)=6P_4,\quad N(124)=6P_3,\quad N(134)=6P_2,\quad N(234)=6P_1$$

ist, so kann man obige Relation so darstellen:

$$\Pi=\frac{r^6P^3}{36P_1P_2P_3P_4}\cdot\quad\ldots\ldots\quad\text{(A)}$$

Da nun

$$x_1=r^2\frac{\alpha_{34}+\alpha_{42}+\alpha_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}},\quad y_1=r^2\frac{\beta_{34}+\beta_{42}+\beta_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}},$$

$$z_1=r^2\frac{\gamma_{34}+\gamma_{42}+\gamma_{23}}{x_2\alpha_{34}+x_3\alpha_{42}+x_4\alpha_{23}};$$

u. s. w.

Digitized by Google

wo die Bedeutung von β und γ leicht erhellt, so hat man auch

$$P = \frac{r^6 \Pi^3}{36.\ \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

wo Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 eine ähnliche Bedeutung haben wie P_1 u. s. w.

Aus den beiden aufgestellten Ausdrücken ergeben sich nun leicht auch die folgenden:

$$\frac{P^4}{P_1 P_2 P_3 P_4} = \frac{\Pi^4}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

$$r^{12} P^2 . \Pi^2 = 6^4 . P_1 P_2 P_3 P_4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

$$r^{24} P^8 = 6^8 . (P_1 P_2 P_3 P_4)^3 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

$$r^{24} \Pi^8 = 6^8 . (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4)^3 P_1 P_2 P_3 P_4. \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

Bezieht man die Tetraëder nicht auf die Kugel, sondern auf eine solche Fläche der zweiten Ordnung, die einen Mittelpunkt hat und deren Halbaxen a, b, c sind, so gehen die angegebenen Relationen in die nachstehenden über:

$$\Pi = \frac{a^2 b^2 c^2 P^3}{36 P_1 P_2 P_3 P_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A')$$

$$P = \frac{a^2 b^2 c^2 \Pi^3}{36 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B')$$

$$\frac{P^4}{P_1 P_2 P_3 P_4} = \frac{\Pi^4}{\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C')$$

$$a^4 b^4 c^4 P^2 \Pi^2 = 6^4 . P_1 P_2 P_3 P_4 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (D')$$

$$a^8 b^8 c^8 P^8 = 6^8 . (P_1 P_2 P_3 P_4)^3 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4, \quad \ldots\ldots \quad (E')$$

$$a^8 b^8 c^8 \Pi^8 = 6^8 . (\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3 \Pi_4)^3 P_1 P_2 P_3 P_4, \quad \ldots\ldots \quad (F')$$

welche man aus jenen leicht erhält, wenn man für r^3 überall $a.b.c$ setzt.

Betrachtet man ein Paraboloid, dem die Gleichung

$$p_1 y^2 + p z^2 = p p_1 x$$

entspricht, und bezeichnet man mit D_1 u. s. w. den Inhalt desjenigen auf die Ebene der yz projicirten Dreieckes, welches von den Punkten x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; x_4, y_4, z_4 gebildet wird, und legt man dem Zeichen Δ_1 eine ähnliche Bedeutung bei, so hat man:

$$\Pi = \frac{9 p p_1 P^3}{16 D_1 D_2 D_3 D_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A'')$$

$$P = \frac{9 p p_1 \Pi^3}{16 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B'')$$

$$\frac{P^4}{D_1 D_2 D_3 D_4} = \frac{\Pi^4}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C'')$$

Digitized by Google

$$3^4 . p^2 p_1{}^2 P^2 \Pi^2 = 4^4 . D_1 D_2 D_3 D_4 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 , \quad \ldots \quad (D'')$$

$$3^8 . p^4 p_1{}^4 P^8 = 4^8 . (D_1 D_2 D_3 D_4)^3 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4 , \quad \ldots \quad (E'')$$

$$3^8 . p^4 p_1{}^4 \Pi^8 = 4^8 . (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4)^3 D_1 D_2 D_3 D_4 . \quad \ldots \quad (F'')$$

XVIII.

Ueber den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechsecks berührt.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

I.

Lehrsatz.

Ist im Raume irgend ein windschiefes Sechseck $\mathfrak{abcdef}$ gegeben, und man verbindet die Hauptgegenecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{f}$ desselben durch drei gerade Linien $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$; so ist jeder Punkt einer Geraden, welche diese drei letzteren durchschneidet, also jeder Punkt des durch dieselben bestimmten einfachen Hyperboloids der Scheitel eines Kegels zweiten Grades, welcher die sechs Seiten des Sechsecks berührt.

Beweis.

Es sei D ein Punkt einer Geraden m, welche die Geraden $\mathfrak{ad}$, $\mathfrak{be}$, $\mathfrak{cf}$ schneidet; so schneiden sich die drei Ebenen $D\mathfrak{ad}$, $D\mathfrak{be}$, $D\mathfrak{cf}$ in dieser Geraden m. Eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ treffe die Geraden $D\mathfrak{a}$, $D\mathfrak{b}$, $D\mathfrak{c}$, $D\mathfrak{d}$, $D\mathfrak{e}$, $D\mathfrak{f}$ in den Punkten α, β, γ, δ, ε, φ und die m in u; so schneiden sich die Geraden $\alpha\delta$, $\beta\varepsilon$, $\gamma\varphi$ in dem Punkte u; nach dem Satze des Brianchon lässt sich also in das Sechseck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi$ ein Kegelschnitt beschreiben. Also muss der Kegel zweiten Grades, dessen Strahlen den Punkt D mit den Punkten dieses Kegelschnittes verbinden, die Ebenen

Digitized by Google

$D\mathfrak{ab}$, $D\mathfrak{bc}$, $D\mathfrak{cd}$, $D\mathfrak{de}$, $D\mathfrak{ef}$, $D\mathfrak{fa}$, und daher auch die Geraden $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{ef}$, $\mathfrak{fa}$ berüh. w. z. b. w.

II.

Lehrsatz.

Ist im Raume irgend ein windschiefes Sechseck $\mathfrak{abcdef}$ gegeben, und man legt durch je zwei aneinanderstossende Seiten $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{bc}$ und $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{cd}$ und $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{de}$ und $\mathfrak{ef}$, $\mathfrak{ef}$ und $\mathfrak{fa}$ desselben eine Ebene, im Ganzen sechs Ebenen β, γ, δ, ε, φ, α, welche sich paarweise, nämlich β und ε, γ und φ, δ und α in drei Geraden m, n, p schneiden; zieht man endlich eine beliebige Gerade q, welche m, n und p durchschneidet; so muss eine jede Ebene $\mathfrak{E}$, welche durch diese Gerade q geht, also eine jede Berührungsebene des durch die Geraden m, n, p bestimmten einfachen Hyperboloids, die Seiten $\mathfrak{ab}$, $\mathfrak{bc}$, $\mathfrak{cd}$, $\mathfrak{de}$, $\mathfrak{ef}$, $\mathfrak{fa}$ in sechs Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$, $\mathfrak{f}'$ schneiden, welche einem und demselben Kegelschnitte angehören.

Beweis.

Die Ebene $\mathfrak{E}$ schneide die Geraden m, n, p in den Punkten $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$; so liegen diese in einer Geraden q. Da nun $\mathfrak{E}$ die Ebenen β und ε in den Linien $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$ und $\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'$ schneidet, und m die Durchschnittslinie von β und ε ist, so ist $\mathfrak{m}$ der Durchschnittspunkt der Hauptgegenseiten $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'$ des ebenen Sechsecks $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'\mathfrak{f}'$; und ebenso ist $\mathfrak{n}$ der Durchschnittspunkt von $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{e}'\mathfrak{f}'$, $\mathfrak{p}$ der von $\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'$ und $\mathfrak{f}'\mathfrak{a}'$, der beiden anderen Paar Hauptgegenseiten desselben. Nach dem Satze des **Pascal** liegen demnach die sechs Ecken des Sechsecks $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}'\mathfrak{e}'\mathfrak{f}'$ auf dem Umfange eines Kegelschnitts, w. z. b. w.

XVIII.

Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung.

Von

Herrn Fr. Seydewitz,

Oberlehrer am Gymnasium zu Heiligenstadt.

Erklärung.

Unter einer **Curve doppelter Krümmung** der $n$ten Ordnung verstehe ich ein jedes **räumliche System** stetig auf-

Digitized by Google

einander folgender Punkte, welches mit einer beliebigen Ebene im Raume im Allgemeinen und höchstens n Punkte gemein hat: und unter einer Curve doppelter Krümmung der $n$ten Klasse ein jedes System stetig aufeinander folgender Ebenen, welches mit einem beliebigen Punkte im Raume im Allgemeinen und höchstens n Ebenen gemein hat. Tangente einer Curve doppelter Krümmung heisst eine jede Gerade, längs welcher sich bezüglich zwei stetig aufeinander folgende Punkte oder Ebenen der Curve, und Berührungsebene oder Berührungspunkt derselben eine jede Ebene oder Punkt, in welchen sich bezüglich wenigstens drei stetig aufeinander folgende Punkte oder Ebenen der Curve vereinigen.

I.

1. Es seien im Raume zwei beliebig (schief) liegende collineare räumliche Strahlbüschel D und D_1 gegeben (siehe S. 169. des 9ten Theils des Archivs); so werden die entsprechenden Strahlenpaare a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... derselben im Allgemeinen sich nicht im Raume begegnen; es entsteht aber die Frage: ob nicht gewisse und wieviele entsprechende Strahlenpaare einander begegnen, und was für einem Systeme von Punkten deren Durchschnittspunkte angehören?

Eine beliebige Ebene $\mathfrak{E}$ im Raume werde von den Strahlen a, b, c, d.... des D in den Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., und eine auf $\mathfrak{E}$ liegende Ebene $\mathfrak{E}_1$ von den entsprechenden Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1.... des D_1 in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... getroffen; so sind die Ebenen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$ in Ansehung der entsprechenden Punktenpaare $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$.... und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}_1$.... collinear, und folglich müssen sich (nach S. 25. des 8ten Theils des Archivs) in denselben im Allgemeinen und höchstens drei, jedenfalls ein Paar entsprechende Punkte vereinigen. Also gibt es in jeder Ebene des Raumes im Allgemeinen drei Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen von D und D_1 begegnen. Zwei solche Punkte sind offenbar die Mittelpunkte D, D_1 der Strahlbüschel selber, indem ihr gemeinschaftlicher Strahl DD_1, nämlich e, von dem entsprechenden Strahle e_1 im Punkte D_1, und dieselbe Gerade, nämlich f_1, von dem entsprechenden Strahle f in D geschnitten wird.

Durch die Gerade DD_1 gehe eine beliebige Ebene, welche α oder α_1' heisse, jenachdem sie zu D oder zu D_1 gerechnet wird. Die der α entsprechende Ebene α_1 schneidet die α_1' in einem Strahle a_1, welchem, als zu α_1 gehörig, ein in α liegender Strahl a entsprechen muss. Also schneiden sich die Strahlen a, a_1 in einem Punkte $\mathfrak{a}$, welcher auch einer der fraglichen Punkte ist. Denkt man sich nun um DD_1, als Achse, einen Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$ von stetig aufeinander folgenden Ebenen α, β, γ, δ...., so erhält man eine stetige Reihe von Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$...., in deren jedem zwei entsprechende Strahlen a, a_1; b, b_1; c, c_1; d, d_1.... von D, D_1 sich schneiden. Diese Punkte bilden also eine Curve, und, weil sie in einer beliebigen Ebene des Raumes im Allgemeinen

Digitized by Google

und höchstens drei zu drei liegen, eine Curve doppelter Krümmung der dritten Ordnung.

Der Punkt D_1 heisse e, als Durchschnitt der Strahlen e, e_1; ein Punkt m der Curve, Durchschnitt von m, m_1, nähere sich dem e ins Unendliche; so wird die Sekante em oder m_1 allmählig in die Tangente für e übergehen, und gleichzeitig m mit e, m_1 mit e_1 zusammenfallen. Also ist der dem gemeinschaftlichen Strahle e beider Strahlbüschel entsprechende Strahl e_1 Tangente der Curve im Punkte D_1.

Es sei ε diejenige Ebene des Ebenenbüschels 𝔄, welche den Strahl e mit seinem entsprechenden e_1 verbindet; und es sei ε_1 die der ε entsprechende Ebene in D_1. Da jede durch e_1 gehende Ebene bereits die beiden längs e_1 vereinigten Punkte der Curve enthält, so muss jede noch einen dritten Punkt derselben enthalten. Es sei 𝔵 dieser dritte, der Ebene ε_1 zugehörige Punkt; so liegt derselbe entweder auf der Geraden e_1, oder irgend wo ausserhalb e_1 auf ε_1, oder fällt mit e zusammen. Im ersten Falle aber würde einem von e verschiedenem Strahle x ein mit e_1 identischer Strahl x_1 entsprechen, was unmöglich ist; im zweiten würde dem in ε_1 liegenden Strahle x_1 ein nicht in ε liegender Strahl x entsprechen, was gleichfalls unmöglich; also fallen auf ε_1 drei Punkte in e zusammen, und es ist ε_1 die Berührungsebene in D_1.

Lehrsatz 1.

Sind im Raume zwei collineare räumliche Strahlbüschel in beliebiger schiefer Lage gegeben, so gibt es in denselben unzählige Paare entsprechender Strahlen, welche einander begegnen, und zwar bilden die Durchschnittspunkte aller dieser Strahlenpaare nebst den Mittelpunkten der beiden Strahlbüschel eine Curve doppelter Krümmung der dritten Ordnung, und diese wird in jenen Mittelpunkten von denjenigen Strahlen, deren entsprechende sich vereinigen, und von denjenigen Ebenen berührt, deren entsprechende den gemeinschaftlichen Strahl mit den betreffenden Tangenten verbinden.

Dem Ebenenbüschel 𝔄 von D entspricht in D_1 ein Ebenenbüschel $𝔄_1$, dessen Achse e_1, und der mit ersterem in Ansehung der entsprechenden Ebenenpaare α, β, γ, δ.... und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... projektivisch ist; also bilden die Durchschnittslinien a_1, b_1, c_1, d_1.... der entsprechenden Ebenenpaare Linien, welche, wie oben gezeigt, den Punkt D_1 mit sämmtlichen Punkten der Curve verbinden, einen Kegel des zweiten Grades K_1, welcher auch die Strahlen e_1 und e enthält und längs den Strahlen e_1 und e bezüglich von denjenigen Ebenen ε_1 und ε' berührt wird, denen in D und D_1 die Ebene ee_1 (ε und ε_1') entspricht. Aus demselben Grunde bilden auch die den vorigen entsprechenden und nach denselben Punkten der Curve gehenden Strahlen a, b, c, d.... einen Kegel zweiten Grades K, welcher längs f und f_1 bezüglich von zwei Ebenen φ' und φ_1 berührt wird, denen in D_1 und D die Ebene ff_1 (φ_1' und φ) entspricht. Diese beiden Kegel haben also einen

Digitized by Google

Strahl DD_1 gemein. Der Ebene ff_1 oder $fe(\varphi)$ entspricht in D_1 die Ebene f_1e_1 oder ee_1 (ε_1'); also fällt die Ebene φ_1, welche K längs f_1 berührt, mit der Ebene ε_1' oder ee_1; und ebenso die ε', welche K_1 längs e berührt, mit der Ebene φ oder ff_1 zusammen. Die Tangenten e_1, f der Curve sind also die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen ε_1 und ε, φ' und φ_1', welche die beiden Kegel K_1 und K, K und K_1, berühren.

Das nämliche gilt nun aber auch von allen übrigen Tangenten der Curve. Denn sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ irgend zwei Punkte der letzteren, und man denkt sich den $\mathfrak{m}$ ins Unendliche dem $\mathfrak{a}$ genähert, so geht die Sekante $\mathfrak{am}$ allmählig in die Tangente für $\mathfrak{a}$, und gleichzeitig die die Strahlen a und m, a_1 und m_1 verbindenden entsprechenden Ebenen in die Berührungsebenen von K und K_1 längs a und a_1 über. In der That: legt man durch die Durchschnittslinie dieser zwei Berührungsebenen irgend eine Ebene, so schneidet letztere die beiden Kegel in zwei Kegelschnitten, welche beide von jener Linie in $\mathfrak{a}$ berührt werden und einen auf DD_1 liegenden, zur Curve nicht gehörigen Punkt gemein haben. Da nun ein Kegelschnitt durch vier seiner Punkte und die Tangente in dem einen auf einzige Weise bestimmt ist, so können jene beiden keine zwei neuen Punkte, müssen aber einen Punkt noch nothwendig gemeinschaftlich besitzen, und dieser Punkt gehört auch unserer Curve an. Die Ebene hat also ausser $\mathfrak{a}$ noch einen Punkt mit der Curve gemein und muss daher auch noch einen dritten besitzen; dieser letztere würde aber ein neuer Durchschnittspunkt jener Kegelschnitte sein, was unmöglich ist; also muss derselbe sich mit dem Punkte $\mathfrak{a}$ vereinigen.

Und da endlich eine solche Vereinigung auf jeder Ebene, welche durch jene Linie geht, stattfindet, so muss diese eine Tangente der Curve sein.

Auf ähnliche Weise, nämlich mittels zweier Kegelschnitte, zeigt man, dass die Curve in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Tangente besitzt.

Lehrsatz 2.

Die Curve, welche die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlenpaare zweier schiefliegenden collinearen räumlichen Strahlbüschel enthält, gehört den Oberflächen zweier Kegel des zweiten Grades an, welche einen Strahl gemein haben, und deren Scheitel die Mittelpunkte jener Strahlbüschel sind. Sämmtliche Tangenten der Curve sind die Durchschnittslinien der nach einerlei Punkte derselben gehenden Berührungsebenen beider Kegel; insbesondere sind die Tangenten in den Mittelpunkten der Strahlbüschel diejenigen Strahlen der Kegel, in welchen ein jeder von der den anderen im gemeinschaftlichen Strahle berührenden Ebene geschnitten wird, und die Berührungsebenen der Curve in diesen Mittelpunkten sind die, die beiden Kegel längs jenen Strahlen berührenden Ebenen.

Digitized by Google

Die in Rede stehende Curve — man mag nun ihre Erzeugung durch räumliche Strahlbüschel oder durch zwei Kegel im Auge haben — hat grosse Aehnlichkeit mit derjenigen ebenen Curve, welche durch zwei projektivische ebene Strahlbüschel und zugleich auch durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene erzeugt wird. Man kann sie daher, um sie einerseits von den ebenen Schnitten des Kegels dritten Grades, andererseits von der Durchschnittslinie zweier beliebiger Kegel des zweiten, welche eine Curve doppelter Krümmung der vierten Ordnung ist und durch räumliche Strahlbüschel von höherer Verwandtschaft erzeugt wird, zu unterscheiden, den räumlichen Kegelschnitt der dritten Ordnung heissen.

Dass der letzte Satz auch umgekehrt gelte, hiervon wird man sich mittels des Ebenenbüschels $\mathfrak{A}$ leicht überzeugen können.

2. Es seien jetzt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ irgend zwei entsprechende und in einem Punkte D_2 sich treffende Strahlen von D, D_1; so bilden die denselben angehörigen entsprechenden Ebenenpaare der räumlichen Strahlbüschel zwei Ebenenbüschel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, welche in Ansehung dieser Ebenenpaare α, β, γ, δ.... und α_1, β_1, γ_1, δ_1.... projektivisch sind. Also bilden die Durchschnittslinien von α, α_1; β, β_1; γ, γ_1; δ, δ_1 einen Kegel zweiten Grades K_2, welcher auch die Strahlen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ enthält und z. B. längs $\mathfrak{A}$ von derjenigen Ebene berührt wird, welche, der Ebene $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ von D_1 entsprechend, den Strahl $\mathfrak{A}$ mit der Tangente f verbindet. Bedenkt man nun noch, dass man die Ebenen α, α_1; β, β_1.... erhält, wenn man die Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$.... der Curve mit den Geraden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1'$ verbindet, und dass die Curve in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Tangente hat, so gelangt man zu folgendem merkwürdigen Satze:

Lehrsatz 3.

Ein jeder Punkt eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung ist der Scheitel eines Kegels zweiten Grades, dessen Strahlen nach den übrigen Punkten, und dessen Berührungsebenen nach den Tangenten der Curve gehen.

Die Punkte D, D_1 sind also keine eigenthümlichen Punkte der Curve; vielmehr wird der Punkt D_2 und der Kegel K_2 die nämlichen Eigenschaften haben müssen, als D und K oder D_1 und K_1; unter anderen folgende:

Lehrsatz 4.

Je zwei Punkte eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung sind die Mittelpunkte zweier collinearen räumlichen Strahlbüschel, und zwar sind die nach einerlei Punkten und Tangenten des ersteren gehenden Strahlen- und Ebenenpaare entsprechende Elemente der letzteren.

Digitized by Google

Lehrsatz 5.

Die Berührungsebene in einem beliebigen Punkte eines räumlichen Kegelschnittes dritter Ordnung berührt den durch jenen Punkt, als Scheitel, und die Curve selbst erzeugten Kegel längs der jenem Punkte zugehörigen Tangente der Curve.

Aufgabe.

Durch sechs im Raume beliebig gegebene Punkte einen räumlichen Kegelschnitt dritter Ordnung zu legen, nämlich: α) auf jeder Ebene, welche durch zwei der gegebenen Punkte geht, den der Curve angehörigen dritten Punkt; β) die Tangenten und γ) die Berührungsebenen in diesen Punkten; δ) die Punkte, welche eine im Raume beliebig gegebene Ebene mit der Curve gemein hat, und insbesondere ε) die unendlich entfernten Punkte, die Asymptotenlinien und Asymptotenebenen der Curve zu finden.

Auflösung.

Verbindet man irgend zwei der gegebenen Punkte, z. B. D, D_1, mit den vier übrigen 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 durch gerade Linien a, b, c, d und a_1, b_1, c_1, d_1, so sind hierdurch zwei collin. räumliche Strahlbüschel D, D_1 bestimmt, in denen diese vier Linienpaare einander entsprechen, und diese Strahlbüschel erzeugen nach Lehrs. 2. einen räumlichen Kegelschnitt dritter Ordnung, welcher durch jene sechs Punkte geht. Gäbe es nun einen zweiten solchen Kegelschnitt, welcher durch dieselben sechs Punkte ginge, so würden nicht nur alle Geraden, welche den Punkt D mit den Punkten des ersteren verbinden, einen Kegel zweiten Grades K, sondern auch alle Strahlen, welche D mit den Punkten des zweiten verbinden, einen Kegel zweiten Grades K' kraft Lehrs. 3. erzeugen. Diese beiden Kegel aber würden fünf Strahlen a, b, c, d und DD_1 gemein haben; also würden sie zusammenfallen müssen. d. h. der zweite räumliche Kegelschnitt würde auch der Oberfläche von K angehören. Ebenso zeigt man aber auch, dass derselbe der Oberfläche des Kegels K_1 angehört, welcher um D_1 als Scheitel durch den ersten räumlichen Kegelschnitt erzeugt wird. Also fallen beide räumlichen Kegelschnitte in allen ihren Punkten zusammen.

α) Es sei ν eine beliebige, durch D und D_1 gehende Ebene, deren dritter Durchschnitt 𝔫 mit der Curve gesucht wird. Denkt man sich unter n und n_1 die Strahlen, welche von D und D_1 nach 𝔫 gehen, und den Strahl DD_1, jenachdem er dem Kegel K oder K_1 angehört, mit e oder f_1 bezeichnet, so bilden einerseits die Strahlen a, b, c, d, e, n ein dem Kegel K, andererseits die Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, n_1 ein dem Kegel K_1 eingeschriebenes **einfaches 6-Flach im Strahlbüschel** *). Kraft des sogenann-

*) Siehe Steiner's Systemat. Entwickelung d. Abh. u. s. w. Thl. I. S. 236.

Digitized by Google

ten mystischen Sechsecks liegen die drei Geraden, in denen sich die drei Paar Hauptgegenflächen eines solchen 6-Flachs schneiden, in einer und derselben Ebene. Legt man also durch a und b, b und c, c und d, d und e vier Ebenen ab, bc, cd, de, so erhält man als Durchschnittslinien von ab und de, bc und v zwei Gerade p und q, und legt man durch letztere eine Ebene pqr, so schneidet diese die Ebene cd in einer Geraden r, und verbindet man r mit a durch eine neue Ebene an, so schneidet diese die v in dem Strahle n, welcher durch den gesuchten Punkt $\mathfrak{n}$ geht. Auf gleiche Weise findet man auch den Strahl n_1 und somit den Punkt $\mathfrak{n}$.

Am Einfachsten wird es sein, statt im Raume, in einer der Ebenen (Taf. IV. Fig. 7.) zu operiren, welche drei der Punkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, z. B. $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, verbinden. Nämlich: hat man die Geraden DD_1, $D\mathfrak{a}$ und $D_1\mathfrak{a}$ gezogen, welche diese Ebene in den Punkten $(\mathfrak{e}\mathfrak{f}_1)$, $\mathfrak{a}'$ und $\mathfrak{a}_1'$ schneiden, und ist $(n'n_1')$ der Durchschnitt derselben Ebene mit v, so ziehe man die Geraden $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$; den Durchschnitt $\mathfrak{q}$ von n' und $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ verbinde man mit dem Durchschnitte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ durch eine Gerade, und den Punkt $\mathfrak{r}$, wo letztere die $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ trifft, mit dem Punkte $\mathfrak{a}'$ durch eine andere Gerade; so trifft letztere die n' in einem Punkte $\mathfrak{n}'$. Sodann ziehe man die Gerade $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1$ $(\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b})$, welche die $\mathfrak{d}_1\mathfrak{f}_1$ $(\mathfrak{d}\mathfrak{e})$ in $\mathfrak{p}_1$ schneidet, verbinde $\mathfrak{p}_1$ mit $\mathfrak{q}_1$ ($\mathfrak{q}$ durch eine Gerade und den Punkt $\mathfrak{r}_1$, wo letztere die $\mathfrak{c}_1\mathfrak{d}_1$ $(\mathfrak{c}\mathfrak{d})$ trifft, mit $\mathfrak{a}_1'$ durch eine neue Gerade; so schneidet letztere die n_1' (oder n') in einem Punkte $\mathfrak{n}_1'$. Endlich verbinde man im Raume den Punkt D mit $\mathfrak{n}'$, den Punkt D_1 mit $\mathfrak{n}_1'$ durch zwei Gerade n und n_1; so schneiden sich diese in dem gesuchten Punkte $\mathfrak{n}$ der Curve.

β) Um die Tangente der Curve im Punkte $\mathfrak{n}$ zu finden, konstruire man die beiden Ebenen, welche den Kegel K längs n, K_1 längs n_1 berühren; so ist sie deren Durchschnittslinie. Bedenkt man nämlich, dass bei einem, einem Kegelschnitte eingeschriebenen Fünfeck die Tangente in der einen Ecke die Hauptgegenseite dieser Ecke in einem Punkte trifft, welcher mit den Durchschnittspunkten zweier anderer Seitenpaare in gerader Linie liegt, und überträgt man diese Eigenschaft auf das dem Kegel K eingeschriebene Fünf-Flach, dessen Kanten der Reihe nach n, a, b, c, d sein mögen, so findet man die erstere von jenen beiden Berührungsebenen, wenn man noch die Ebene nd legt, welche die ab in der Linie s schneidet, diese letztere mit dem bereits gefundenen Durchschnitte r von cd und an durch eine Ebene verbindet, und durch die Gerade t, wo letztere die bc schneidet, und durch n eine neue Ebene legt; diese nämlich berührt K längs n. Die andere Berührungsebene ergibt sich auf ähnliche Weise.

In der Ebene der Punkte $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ist zu dem gegenwärtigen Zwecke nur noch Folgendes hinzuzufügen. Man ziehe die Gerade $\mathfrak{d}\mathfrak{n}'$, welche die $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{s}$ schneidet, sofort die Gerade $\mathfrak{s}\mathfrak{r}$, welche die $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{t}$ schneidet, und verbinde $\mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{n}'$ durch eine Gerade. Wiederum ziehe man $\mathfrak{d}_1\mathfrak{n}_1'$, welche die $\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1$ in $\mathfrak{s}_1$ schneidet, sofort $\mathfrak{s}_1\mathfrak{r}_1$, welche die $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{t}_1$ schneidet, und verbinde $\mathfrak{t}_1$ mit $\mathfrak{n}_1'$ durch eine Gerade. Endlich verbinde man den Durchschnittspunkt der Geraden $\mathfrak{t}\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{n}_1'$ mit dem Punkte $\mathfrak{n}$ durch eine Gerade; so ist letztere die gesuchte Tangente.

Digitized by Google

γ) Die Tangente in $\mathfrak{n}$ und irgend vier Gerade, welche diesen Punkt mit vier der gegebenen sechs Punkte verbinden, bestimmen einen Kegel K_2. Man suche wie oben diejenige Ebene, welche diesen Kegel längs jener Tangente berührt; so ist dieselbe nach Lehrsatz 5. die Berührungsebene der Curve im Punkte $\mathfrak{n}$.

δ) Man ziehe aus zweien der gegebenen sechs Punkte, z. B. aus D und D_1, zweimal fünf Gerade a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 nach den jedesmaligen fünf übrigen Punkten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, D_1 und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, D; so treffen diese Geraden die im Raume beliebig gegebene Ebene in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{a}_1'$, $\mathfrak{b}_1'$, $\mathfrak{c}_1'$, $\mathfrak{d}_1'$, $\mathfrak{f}_1'$, wo $\mathfrak{e}'$ und $\mathfrak{f}_1'$, ebensowie e und f_1, sich vereinigen. Jetzt lege man durch die ersteren fünf Punkte einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, und durch die letzteren fünf Punkte einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, und suche die drei (resp. zwei oder einen) übrigen Punkte, welche $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ ausser dem Punkte ($\mathfrak{e}'\mathfrak{f}_1'$) gemein haben; so sind diese die Durchschnittspunkte jener Ebene mit der durch die gegebenen sechs Punkte gehenden Curve. Denn diese Kegelschnitte gehören den durch die Punkte D, D_1, als Scheitel, und durch die Curve erzeugten Kegeln, und folglich ein jeder den ersteren gemeinschaftliche Punkt, welcher nicht auf dem gemeinschaftlichen Strahle der Kegel liegt, der Curve selber an. — Es muss aber bemerkt werden, dass die Aufgabe: Wenn von zwei Kegelschnitten ein Durchschnittspunkt bekannt ist, die übrigen zu finden — eine Aufgabe, auf welche auch die **Verdoppelung des Würfels** zurückkommt — schwerlich mittels des blossen Lineals und eines festen Kreises gelöst werden kann. Doch lassen sich jedesmal ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel finden, deren Durchschnitte jene Punkte sind, wovon der Grund im 8ten Theile des Archivs S. 10., Lehrs. 3., a) und f) und S. 24. zu suchen ist.

ε) Die Strahlen eines Punktes, welche den sämmtlichen Strahlen eines Kegels zweiten Grades parallel sind, bilden einen dem letzteren congruenten Kegel; sind daher fünf Paar Strahlen zweier Kegel zweiten Grades parallel, so ist jeder Strahl des einen einem Strahle des anderen parallel. Hierauf beruht folgende Konstruktion: Man ziehe, wie vorhin, die Geraden a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, und sodann durch einen der Punkte D, D_1, z. B. durch D, mit den Strahlen a_1, b_1, c_1, d_1 des anderen die parallelen Strahlen a'', b'', c'', d''. Eine beliebige feste Ebene werde von a, b, c, d, a'', b'', c'', d'' und (ef_1) der Reihe nach in den Punkten $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ und ($\mathfrak{e}'\mathfrak{f}''$) geschnitten. Man lege durch $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$, $\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{e}'$ einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}'$, und durch $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$, $\mathfrak{f}''$ einen zweiten $\mathfrak{K}''$, suche die Punkte $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, welche $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ ausser ($\mathfrak{e}'\mathfrak{f}''$) gemein haben, und ziehe durch D nach diesen Punkten die Strahlen p, q, r (mit welchen die Strahlen p_1, q_1, r_1 des Punktes D_1 parallel sein mögen); so bestimmen p, q, r die Richtungen dreier **unendlich entfernter Punkte der Curve**. Sucht man ferner die beiden Ebenen, welche die durch a, b, c, d, e und a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 bestimmten Kegel K, K_1 längs p und p_1 (oder q und q_1, r und r_1) berühren, so ist ihre Durchschnittslinie die Tangente der Curve in dem Punkte, nach welchem $p(q,r)$ gerichtet ist, d. h. eine **Asymptotenlinie** derselben; und zieht man durch zwei der Punkte $\mathfrak{a}$

Digitized by Google

𝔟, 𝔠, 𝔡 mit p die Parallelen m, n und sucht die Ebene, welche den durch jene Asymptote und die Geraden p, p_1, m, n bestimmten Cylinder längs der ersteren berührt, so hat man die Berührungsebene der Curve in jenem unendlich entfernten Punkte, d. h. eine Asymptotenebene der Curve.

Die unter α) angestellte Betrachtung hat zugleich ergeben:

Lehrsatz 6.

Durch sechs im Raume beliebig gegebene Punkte, von welchen keine vier in einer Ebene liegen, lässt sich allemal einer, aber auch nur ein einziger räumlicher Kegelschnitt der dritten Ordnung legen.

Ferner folgt aus δ) und Lehrsatz 3.

Lehrsatz 7.

Sind im Raume 6 beliebige Punkte gegeben, so sind in jeder beliebigen Ebene 15 Punkte gegeben, in welchen die Verbindungslinien der ersteren die Ebene schneiden; durch je fünf dieser Punkte, welche den Strahlen je eines der gegebenen sechs Punkte angehören, geht ein bestimmter Kegelschnitt, im Ganzen sechs Kegelschnitte; und diese letzteren haben nicht nur paarweise jene 15, sondern alle zugleich im Allgemeinen auch noch entweder einen oder drei besondere Punkte gemein.

Die unendlich entfernten Punkte der in Rede stehenden Curve bieten den natürlichsten Eintheilungsgrund ihrer Arten dar. — Von den Durchschnittspunkten 𝔭, 𝔮, 𝔯 der unter ε) gedachten Kegelschnitte 𝔎′, 𝔎″ sind im Allgemeinen entweder nur einer oder alle drei vorhanden. Im Besonderen aber können auch zwei derselben oder alle drei sich vereinigen, d. h. mit andern Worten: jene Kegelschnitte können ausser dem Punkte (𝔢′𝔣″) einen Punkt 𝔭 und einen Punkt (𝔮𝔯), in welchem sie einander berühren, oder aber nur noch einen einzigen Punkt (𝔭𝔮𝔯), in welchem sie sich oskuliren, gemein haben. Ein fünfter Fall, dass einer der Punkte 𝔭, 𝔮, 𝔯 sich mit (𝔢′𝔣″) vereinige, ist hier nicht zulässig, weil dann die Kegel K, K_1 einander längs ihrem gemeinschaftlichen Strahle (ef_1) berühren, und hiermit die Curve selbst in einen gewöhnlichen Kegelschnitt ausarten würde. Entweder also 1) wenn überhaupt nur ein Punkt 𝔭 existirt, hat die Curve nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt und in demselben eine Asymptotenlinie und eine Asymptotenebene von endlicher Entfernung. Unter allen Kegeln, welche sie erzeugt, gibt es also nur einen einzigen Cylinder und zwar einen elliptischen. Sie mag daher selbst eine räumliche Ellipse heissen. Oder 2) wenn drei Punkte 𝔭, 𝔮, 𝔯 getrennt von einander existiren, besitzt die Curve drei unendlich entfernte Punkte mit drei Asymptotenlinien und drei Asymptotenebenen von endlicher Entfernung, und es gibt dann unter jenen Kegeln drei hyperbolische Cylinder, deren Asymptotenebe-

Digitized by Google

nen paarweise parallel sind. Die Curve heisse dann eine **räumliche Hyperbel.** 3) Wenn es einen Punkt p und einen Punkt (qr) gibt, hat die Curve nur **zwei unendlich entfernte Punkte mit einer unendlich entfernten Tangente** und einer Asymptote und zwei Asymptotenebenen von endlicher Entfernung. Unter den von ihr erzeugten Kegeln ist ein **hyperbolischer** und ein **parabolischer Cylinder,** die eine Asymptotenebene des ersteren mit den die Kegel K und K_1 längs (qr) berührenden Ebenen, die anderen mit der die Geraden p und (qr) verbindenden Ebene und zugleich mit den Durchmesserebenen des anderen Cylinders parallel. In diesem Falle möge die Curve eine (räumliche) **parabolische Hyperbel** heissen. 4) Wenn es einen Punkt (pqr) gibt, hat die Curve **nur einen unendlich entfernten Punkt** und in demselben **sowohl eine unendlich entfernte Tangente als Berührungsebene;** und es befindet sich unter den von ihr erzeugten Kegeln nur ein einziger, nämlich ein parabolischer Cylinder. Dann heisse dieselbe eine **räumliche Parabel.**

Lehrsatz 8.

Ein räumlicher Kegelschnitt dritter Ordnung hat entweder 1) drei unendlich entfernte Punkte ohne unendlich entfernte Tangenten und Berührungsebenen (räumliche Hyperbel); **oder 2) nur einen unendlich entfernten Punkt ohne dergleichen Tangente und Berührungsebene** (räumliche Ellipse); **oder 3) zwei unendlich entfernte Punkte mit einer einzigen unendlich entfernten Tangente und keiner dergleichen Berührungsebene** (parabolische Hyperbel); **oder 4) nur einen unendlich entfernten Punkt mit einer unendlich entfernten Tangente und Berührungsebene (räumliche Parabel).**

II.

Der vorigen Betrachtung steht eine andere zur Seite, welche von der Frage ausgeht: **Wenn zwei collineare Ebenen von beliebiger Lage im Raume gegeben sind, welche einander entsprechenden Geradenpaare werden dann in je einer Ebene liegen, und welche Curve oder Fläche werden diese Ebenen umhüllen?** Der Gang der Betrachtung bleibt natürlich derselbe, und es wird daher hinreichen, nur die Resultate anzugeben. Die Nummer der Sätze wird immer zugleich die der früheren reciproken Sätze sein.

Lehrsatz 1.

Sind im Raume zwei collineare Ebenen in beliebiger schiefer Lage gegeben, so gibt es in denselben unzählige Paare entsprechender Geraden, welche in einer Ebene liegen, und zwar bilden alle diese Ebenen nebst den beiden gegebenen Ebenen eine Curve dop

pelter Krümmung dritter Klasse, und diese wird in diesen beiden Ebenen von denjenigen Geraden, welche wechselseitig ihrer Durchschnittslinie entsprechen, und in denjenigen Punkten berührt, deren entsprechende in der Durchschnittslinie der Ebenen und in den betreffenden Tangenten liegen.

Lehrsatz 2.

Sämmtliche Ebenen, welche entsprechende Gerade zweier schiefliegenden collinearen Ebenen verbinden, umhüllen zwei Kegelschnitte, welche eine Tangente gemein haben und in diesen Ebenen liegen. Sämmtliche Tangenten der von jenen Ebenen gebildeten Curve doppelter Krümmung dritter Klasse sind die Verbindungslinien der Punktenpaare, in welchen je eine jener Ebenen die beiden Kegelschnitte berührt; insbesondere sind die in den beiden Ebenen liegenden Tangenten der Curve diejenigen zwei Tangenten der Kegelschnitte, welche nach den Berührungspunkten der Durchschnittslinie beider Ebenen und des jedesmaligen anderen Kegelschnittes gehen; und die Berührungspunkte der Curve in den beiden Ebenen sind die Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte und der eben genannten Tangenten.

Bedenkt man, dass ein Kegel entsteht, wenn eine Schaar von Ebenen zwei Kegelschnitte im Raume umhüllen und in einem Punkte (Scheitel, Mittelpunkt, Centrum des Kegels) sich schneiden, oder aber wenn dieselben die entsprechenden Strahlenpaare zweier im Raume beliebig liegenden concentrischen ebenen Strahlbüschel verbinden, so wird man es natürlich finden, die in Rede stehende Curve einen excentrischen Kegel dritter Klasse zu nennen.

Lehrsatz 3.

Eine jede Ebene eines excentrischen Kegels dritter Klasse wird von allen übrigen Ebenen desselben in den Tangenten, und von sämmtlichen Tangenten desselben in den Punkten eines Kegelschnittes geschnitten.

Lehrsatz 4.

Je zwei Ebenen eines excentrischen Kegels dritter Klasse sind in Ansehung der Geraden- und Punktenpaare, in denen sie von sämmtlichen Ebenen und Tangenten des ersteren geschnitten werden, collinear.

Lehrsatz 5.

Ein excentrischer Kegel dritter Klasse wird von jeder seiner Ebenen in demjenigen Punkte des in dieser Ebene von ihm erzeugten Kegelschnittes berührt,

Digitized by Google

in welchem dieser letztere von der betreffenden Tangente des ersteren berührt wird.

Aufgabe.

An sechs im Raume beliebig gegebene Ebenen einen excentrischen Kegel dritter Klasse zu legen, nämlich: α) für jeden Punkt, welcher auf der Durchschnittslinie zweier der sechs Ebenen liegt, die durch ihn gehende dritte Ebene der Curve; β) die Tangenten und γ) die Berührungspunkte der Curve in diesen Ebenen; δ) die Ebenen der Curve, welche durch einen im Raume beliebig gegebenen Punkt gehen, und insbesondere ε) diejenigen, welche mit einer gegebenen Geraden parallel sind, zu finden.

Lehrsatz 6.

An sechs im Raume beliebig gegebene Ebenen, von denen keine vier durch einerlei Punkt gehen, lässt sich allemal einer, aber auch nur ein einziger excentrischer Kegel dritter Klasse legen.

Lehrsatz 7.

Sind im Raume sechs beliebige Ebenen gegeben, so gehen von einem beliebigen Punkte des Raumes nach den Durchschnittslinien jener Ebenen 15 neue Ebenen; je fünf dieser letzteren, welche nach den Durchschnittslinien einer der sechs ersteren mit den fünf übrigen gehen, umhüllen einen bestimmten Kegel zweiten Grades, im Ganzen sechs Kegel; und diese letzteren werden nicht nur paarweise von den 15 Ebenen, sondern alle zugleich auch noch entweder von einer oder von drei besonderen Ebenen berührt.

Lehrsatz 8.
(Ohne eigentliche Reciprocität.)

Unter allen excentrischen Kegeln dritter Klasse besitzt nur derjenige eine unendlich entfernte Ebene, und daher auch eine dergleichen Tangente und Berührungspunkt, welcher von zwei Parabeln erzeugt wird.

Digitized by Google

XIX.

Einige Betrachtungen aus der höheren Geometrie.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Es sei in Taf. IV. Fig. 8. O der Anfangspunkt rechtwinklicher Coordinaten $OM=x$, $MP=y$ und PQR eine willkührliche Curve, an welche im Punkte P eine Tangente ST gelegt ist. Construirt man zu OM und der Subtangente MS, die mit s bezeichnet werden möge, die mittlere harmonische Proportionale

$$ML=\frac{2xs}{x+s},$$

so kann das Rechteck aus ML und MP, nämlich $LMPN$, in irgend einer Relation zu der über der Abscisse liegenden Fläche $OMPQR$ unserer Curve stehen; so wäre es z. B. möglich, dass für $OMPQR=u$

$$\frac{2xs}{x+s}y=u, \text{oder}=2u, \text{u. s. w.}$$

wäre, wie diess z. B. bei der Parabel der Fall ist*). Allgemeiner ausgedrückt, könnte überhaupt

$$\frac{2xs}{x+s}y=\varphi(u)$$

sein, und es würde nun darauf ankommen, diejenige Curve, d. h. ihre Gleichung $y=f(x)$, zu bestimmen, in welcher die genannte Eigenschaft statt fände. Man brauchte aber nicht gerade zwischen

---

*) Für die Parabel $y=\sqrt{px}$ ist bekanntlich $u=\frac{2}{3}xy$, $s=2x$, also

$$2u=\frac{2xs}{x+s}y.$$

Digitized by Google

x und s die mittlere harmonische Proportionale zu construiren; man könnte diess auch zwischen $2x$ und s, $3x$ und s, oder ^{1} x und s u. s. f., überhaupt zwischen irgend einer Linie z und s, vorausgesetzt, dass z auf bekannte Weise von x abhängt, also etwa $z = \psi(x)$ ist. In dieser Allgemeinheit aufgefasst, würde nun die Aufgabe lauten:

> Es wird die Gleichung derjenigen Curve gesucht, in welcher die über der Abscisse x stehende Fläche u, die Ordinate y und die Subtangente s durch die Relation
>
> $$\varphi(u) = \frac{2\psi(x).s}{\psi(x)+s} \cdot y \tag{1}$$
>
> mit einander verbunden sind, wobei $\varphi(u)$ und $\psi(x)$ zwei willkührliche Funktionen erster Dimension bezeichnen.

Die Gleichung (1) lässt sich auch in der folgenden Gestalt

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{\psi(x)} = \frac{2}{\varphi(u)} y$$

oder, nach Multiplikation mit y, in der nachstehenden

$$\frac{y}{s} + \frac{1}{\psi(x)} y = \frac{2}{\varphi(u)} y^2 \tag{2}$$

darstellen, und führt in derselben sogleich zur Differenzialgleichung der gesuchten Curve. Da nämlich

$$u = \int y dx$$

ist, so folgt umgekehrt

$$y = \frac{du}{dx}. \tag{3}$$

Ferner gilt zur Bestimmung der Subtangente einer Curve die Formel

$$s = y : \frac{dy}{dx},$$

woraus man sogleich erhält

$$\frac{y}{s} = \frac{dy}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}. \tag{4}$$

Substituiren wir jetzt die unter (3) und (4) gefundenen Ausdrücke für y und $\frac{y}{s}$ in die Gleichung (2), so wird

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{\psi(x)} \frac{du}{dx} = \frac{2}{\varphi(u)} \left(\frac{du}{dx}\right)^2.$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{d^2u}{dx^2} + X\frac{du}{dx} = U\left(\frac{du}{dx}\right)^2, \tag{5}$$

wobei der Bequemlichkeit wegen

$$X = \frac{1}{\psi(x)}, \; U = \frac{2}{\varphi(u)} \tag{6}$$

gesetzt worden ist. — Das Integral der Differenzialgleichung (5) würde uns nun u als Funktion von x, also etwa $u = F(x) + C$ geben, wobei die Constante so bestimmt werden muss, dass für $x=0$ auch $u=0$ wird, und darauf hätte man, um die Relation zwischen y und x zu finden, blos eine simple Differenziation nöthig, nämlich zufolge der Gleichung (3) wäre $y = F'(x)$.

Die Integration der Differenzialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades, auf welche wir in Nro. (5) gekommen sind, würde sehr leicht sein, wenn das Glied auf der rechten Seite $=0$, die Gleichung also von der Form

$$\frac{d^2v}{dx^2} + X\frac{dv}{dx} = 0$$

wäre; denn man hätte dann für $\frac{dv}{dx} = w$:

$$\frac{dw}{dx} + Xw = 0 \tag{7}$$

oder

$$\frac{dw}{w} = -Xdx,$$

$$lw = -\int Xdx + \text{Const},$$

$$w = e^{-\int Xdx}\, e^{\text{Const}};$$

oder, wenn man den constanten Faktor mit $\varkappa$ bezeichnet,

$$\frac{dv}{dx} = \varkappa\, e^{-\int Xdx} \tag{8}$$

und hieraus wäre v durch eine neue Integration leicht zu entwickeln. Da nun die Gleichung (7) bis auf die rechte Seite formell mit der zu integrirenden identisch ist, so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass auch ihr Integral von ähnlicher Form sein werde; wir setzen daher conform mit (8)

$$\frac{du}{dx} = \varkappa\, e^{-\int Xdx} \tag{9}$$

aber mit dem Unterschiede, dass wir hier unter $\varkappa$ nicht eine Constante, sondern eine erst noch zu bestimmende Funktion von x

oder u verstehen. Durch Differenziation von (9) ergiebt sich nun

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d\varkappa}{dx}-\varkappa X\right)e^{-\int Xdx},$$

oder, wenn man für die Exponentialgrösse ihren Werth aus Nro. (9) substituirt,

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\left(\frac{d\varkappa}{dx}-\varkappa X\right)\frac{1}{\varkappa}\frac{du}{dx}.$$

Schreibt man noch $\frac{d\varkappa}{du}\cdot\frac{du}{dx}$ für $\frac{d\varkappa}{dx}$, so wird

$$\frac{d^2u}{dx^2}+X\frac{du}{dx}=\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{du}\left(\frac{du}{dx}\right)^2. \qquad (10)$$

Soll nun die Gleichung Nro. (9) in der That das erste Integral von der Differenzialgleichung (5) darstellen, so muss die Gleichung (10) mit der in (5) identisch sein; da auf der linken Seite diese Identität bereits statt findet, so brauchen wir blos die rechten Seiten zu vergleichen, und daraus erhalten wir

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{du}=U,$$

d. h. eine Gleichung, welche zur Bestimmung von $\varkappa$ dient, nämlich:

$$\frac{d\varkappa}{\varkappa}=U\,du,$$

$$l\varkappa=\int U du+\text{Const},$$

$$\varkappa=Ce^{\int Udu};$$

wobei zur Abkürzung $e^{\text{Const}}=C$ gesetzt worden ist. Substituiren wir den Werth von $\varkappa$ in die Gleichung (9), so wird

$$\frac{du}{dx}=Ce^{\int Udu}.e^{-\int Xdx},$$

oder

$$du.e^{-\int Udu}=Cdx.e^{-\int Xdx},$$

und da hier die Variabelen getrennt sind, so ergiebt sich durch Integration

$$\int du.e^{-\int Udu}=C\int dxe^{-\int Xdx}+C' \qquad (11)$$

als vollständige Integralgleichung der Differenzialgleichung (5). Nach geschehener Integration löst man sie nach u auf, bestimmt die willkührlichen Constanten so, dass sich u mit x gleichzeitig annullirt, und erhält dann die gesuchte Gleichung zwischen y und x mit Hülfe der Formel

Digitized by Google

$$y=\frac{du}{dx}. \qquad (12)$$

Als erstes Beispiel betrachten wir die Spezialisirung $\varphi(u)=u$, $\psi(x)=x$, also

$$U=\frac{2}{u}, X=\frac{1}{x}.$$

Es giebt dasselbe

$$-\int Udu=l\left(\frac{1}{u^2}\right), -\int Xdx=l\left(\frac{1}{x}\right);$$

und folglich ist die Integralgleichung (11)

$$\int du\frac{1}{u^2}=C\int dx\frac{1}{x}+C'$$

oder

$$-\frac{1}{u}=Clx+C',$$

und wenn wir $C'=-a, C=b$ setzen:

$$u=\frac{1}{a-blx},$$

wobei in der That $u=0$ ist für $x=0$. Nach (12) ergiebt sich nun

$$y=\frac{b}{x(a-blx)^2}$$

als Gleichung derjenigen Curve, in welcher die Coordinaten mit der Fläche u und der Subtangente s durch die Relation

$$u=\frac{2xs}{x+s}y$$

verbunden sind, wovon man sich auch leicht a posteriori überzeugen kann.

Für $\varphi(u)=\frac{u}{n}$, $\psi(x)=\frac{x}{n}$, wo n eine von der Einheit verschiedene Zahl bedeutet, wird $U=\frac{2n}{u}, X=\frac{n}{x}$, und folglich

$$-\int Udu=l\left(\frac{1}{u^{2n}}\right), -\int Xdx=l\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Die Integralgleichung (10) geht dabei in

$$\int du\frac{1}{u^{2n}}=C\int dx\frac{1}{x^n}+C',$$

Digitized by Google

oder

$$-\frac{1}{2n-1}\frac{1}{u^{2n-1}}=-\frac{C}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+C'$$

über, woraus man für

$$C=\frac{n-1}{2n-1}a, C'=\frac{b}{2n-1}$$

sehr leicht

$$u^{2n-1}=\frac{x^{n-1}}{a-bx^{n-1}} \tag{13}$$

findet. Hierdurch bestimmt sich dann u und y sehr leicht. Die zugehörige Relation zwischen x, y, u, s ist

$$\frac{1}{n}u=\frac{2\frac{1}{n}xs}{\frac{1}{n}x+s}y$$

oder

$$u=\frac{2x(ns)}{x+(ns)}y, \tag{14}$$

und es ist also in diesem Falle u einem Rechtecke gleich, welches die Ordinate zur einen und die mittlere harmonische Proportionale zwischen Abscisse und $n$facher Subtangente zur anderen Seite hat. Für $n=2$ giebt diess z. B.

$$u=\sqrt[3]{\frac{x}{a-bx}},$$

wobei u mit x gleichzeitig verschwindet, und ferner

$$y=\frac{a}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2(a-bx)^4}}.$$

Giebt man den Constanten a und b spezielle Werthe, so ergeben sich besondere Formen unserer Curven; z. B. aus (13) für $b=0$

$$u=\left(\frac{x^{n-1}}{a}\right)^{\frac{1}{2n-1}},$$

woraus man durch Differenziation nach x und für

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{2n-1}}=\frac{2n-1}{n-1}k$$

sehr leicht erhält:

Digitized by Google

$$u = \frac{2n-1}{n-1} k x^{\frac{1-n}{1-2n}}, \quad y = k x^{\frac{n}{1-2n}},$$

also Curven, welche unter das Geschlecht der Parabeln gehören, wenn $1 > 2n$ ist; für $n = \frac{1}{4}$ ist z. B.

$$y = k\sqrt{x},$$

und in der That wird hierdurch die Gleichung (14) für $n = \frac{1}{4}$ befriedigt; für $n = \frac{3}{8}$ erhält man die sogenannte Neil'sche Parabel, die Evolute der Archimedeischen.

XX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Man soll die folgende Regel zur Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots$$

beweisen. Wenn die Reihe

$$\frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2} + \dots$$

convergirt, so ist diess auch mit der obigen der Fall, und wenn die Reihe

$$\frac{u_1}{u_0 + u_1} + \frac{u_2}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3} + \dots$$

divergirt, so divergirt auch die anfangs genannte.

Von dem Mittelpunkte eines dreiachsigen Ellipsoids sind Perpendikel auf die Tangentialebenen desselben gefällt; man soll nun die Gleichung derjenigen Fläche aufstellen, welche die Fusspunkte jener Senkrechten in ihrer Continuität erzeugen.

Digitized by Google

XXI.
Miscellen.

Ueber den Brinkley'schen Satz vom Mantel des schiefen Cylinders.

Von
dem Herausgeber.

Brinkley hat die folgende Bestimmung des Mantels des schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis gegeben, welche, so einfach und so leicht sich ganz von selbst darbietend dieselbe auch ist, doch verdient, allgemeiner bekannt und bei dem Elementarunterrichte benutzt zu werden, da sie auch sehr wohl eine ganz elementare Darstellung gestattet. Dieselbe scheint übrigens von dem genannten Mathematiker schon vor längerer Zeit gegeben, und nur erst jetzt in einigen französischen und englischen Journalen von Neuem hervorgehoben worden zu sein. Bei dem geometrischen Elementarunterrichte ist es wohl manchem Lehrer schon eben so unangenehm, wie oft dem Verfasser dieses Aufsatzes, gewesen, in der Lehre vom Cylinder sagen zu müssen, dass die Bestimmung des Mantels des schiefen Cylinders in den Elementen sich nicht geben lasse und nur durch Kunstgriffe der höhern Mathematik möglich sei, überhaupt den Anfänger ohne alle Auskunft über diesen Gegenstand lassen zu müssen.

In Taf. IV. Fig. 9. sei $ABA'B'$ der durch die Axe eines schiefen Cylinders geführte, auf seinen beiden parallelen Grundflächen senkrecht stehende Schnitt. Legt man nun durch die beiden Punkte B und B' zwei auf der Axe des schiefen Cylinders senkrecht stehende Ebenen, so erhält man den zweiten geraden Cylinder $BCB'C'$, und aus dem Princip der Symmetrie erhellet auf der Stelle, dass die beiden krummflächigen Mäntel der Körper ABC und $A'B'C'$ einander gleich sind, der schiefe Cylinder $ABA'B'$ und der gerade Cylinder $BCB'C'$ also offenbar gleiche Mäntel haben, so dass folglich, wenn wir die Mäntel dieser beiden Cylinder respective durch M und $\mathfrak{M}$ bezeichnen,

$$M = \mathfrak{M}$$

ist. Die Grundflächen des geraden Cylinders $BCB'C'$ sind aber Ellipsen, deren grosse und kleine Axen, wenn die Halbmesser der Grundflächen des schiefen Cylinders durch r, und der Neigungswinkel seiner Axe gegen seine Grundflächen durch J bezeichnet werden, wie sogleich in die Augen fallen wird, respective

$$2r \text{ und } 2r \sin J$$

sind. Die Höhe des geraden Cylinders $BCB'C'$ ist der Seite s des schiefen Cylinders $ABA'B'$ gleich. Bezeichnen wir nun den Perimeter einer Ellipse, deren Axen überhaupt a, b sind, durch Per. Ell. (a,b), so ist offenbar

$$\mathfrak{M}=s.\{\text{Per. Ell. } (2r,\ 2r\sin J)\};$$

also nach dem Obigen auch

$$M=s.\{\text{Per. Ell. } (2r,\ 2r\sin J)\}.$$

Ist nun aber h die Höhe des schiefen Cylinders $ABA'B'$, so ist

$$h=s\sin J,$$

und folglich

$$2r:2r\sin J=s:h=1:\sin J,$$

oder

$$2r:s=2r\sin J:h.$$

Daher sind zwei Ellipsen, welche die grossen und kleinen Axen $2r$, $2r\sin J$ und s, h haben, einander ähnlich, und es ist folglich offenbar auch

$$\text{Per. Ell. } (2r,\ 2r\sin J):\text{Per. Ell. } (s,\ h)=2r:s,$$

also

$$\text{Per. Ell. } (2r,\ 2r\sin J)=\frac{2r}{s}\{\text{Per. Ell. } (s,\ h)\}.$$

Führt man diesen Werth von

$$\text{Per. Ell. } (2r,\ 2r\sin J)$$

in den obigen Ausdruck von M ein, so erhält man sogleich

$$M=2r.\{\text{Per. Ell. } (s,\ h)\},$$

d. h. der Mantel eines schiefen Cylinders mit kreisförmiger Basis ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie und Höhe der Durchmesser einer seiner beiden gleichen Grundflächen und der Perimeter einer mit seiner Seite und Höhe als Axen beschriebenen Ellipse sind; welches der Ausdruck ist, auf den Brinkley die Bestimmung des Mantels eines solchen Cylinders gebracht hat.

Bemerken will ich nur noch, dass man bei der obigen Darstellung auch die Anwendung der Trigonometrie oder vielmehr Goniometrie, d. h. den Gebrauch des durch $\sin J$ dargestellten Verhältnissexponenten, leicht ganz vermeiden kann. Die grosse und kleine Axe der Grundflächen des geraden Cylinders sind nämlich offenbar AB und BC, also ganz wie oben

$$\mathfrak{M}=s.\{\text{Per. Ell. } (AB,\ BC)\},$$

und folglich, weil $M=\mathfrak{M}$ war, auch

$$M=s.\{\text{Per. Ell. } (AB,\ BC)\}.$$

Aus einer ganz einfachen Betrachtung der ähnlichen Dreiecke ABC und $BB'D$ folgt aber augenblicklich

$$AB:BC=BB':B'D=s:h$$

Digitized by Google

oder

$$AB:s=BC:h.$$

Folglich ist offenbar

$$\text{Per. Ell. }(AB, BC):\text{Per. Ell. }(s, h)=AB:s,$$

also

$$\text{Per. Ell. }(AB, BC)=\frac{AB}{s}\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

und daher nach dem Obigen

$$M=AB.\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

oder

$$M=AB.\{\text{Per. Ell. }(BB', B'D)\},$$

oder auch

$$M=2r.\{\text{Per. Ell. }(s, h)\},$$

ganz wie oben, woraus denn auch wieder der obige Brinkley'sche Satz folgt.

Theoretisch genommen hat übrigens der Brinkley'sche Satz nach meiner Ansicht nur wenig Werth, da er die Rectification der Ellipse voraussetzt, die ja bekanntlich nur durch unendliche Reihen möglich ist. Aber um dem Anfänger wenigstens eine deutliche Ansicht zu geben, worauf es bei der Bestimmung des Mantels eines schiefen Cylinders eigentlich ankommt, ihn überhaupt nicht ohne alle Belehrung über diesen Gegenstand lassen zu dürfen, wie bisher beim Elementarunterrichte immer geschehen ist und geschehen musste, scheint mir der Brinkley'sche Satz in der That sehr geeignet zu sein. Vielleicht werden auch andere Lehrer denselben künftig bei'm Elementarunterrichte zu benutzen und in denselben einzuführen angemessen finden. Der Umfang einer Ellipse lässt sich ja wenigstens mechanisch mittelst eines um dieselbe gelegten Fadens messen, was man in der Praxis vielleicht selbst seiner Berechnung aus den beiden Axen vorziehen dürfte.

Die Formel für den Mantel des geraden Cylinders folgt übrigens leicht aus dem Brinkleyschen Satze, da für diesen Cylinder $s=h$ ist, also Ell. (s, h) in Ell. (h, h), d. h. in den mit der Höhe h als Durchmesser beschriebenen Kreis übergeht, folglich

$$\text{Per. Ell. }(s, h)=h\pi,$$

und daher nach dem Obigen

$$M=2r.h\pi=2rh\pi=2r\pi.h$$

ist, welches ganz mit dem aus den Elementen allgemein bekannten Ausdrucke übereinstimmt.

Digitized by Google

XXII.

Ueber einige bestimmte Integrale.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

§. 1.

Die ganze Untersuchung, welche ich im Folgenden anstellen werde, basirt sich auf die Werthbestimmung des Integrals

$$\omega = \int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x} \partial x,$$

wo $p > 0$ ist. Offenbar muss dasselbe einen bestimmten endlichen Werth haben, für den man, ähnlich wie beim Integrallogarithmus, eine convergirende Reihe erhalten kann. Setzt man nämlich für $\cos x$ die bekannte Reihe, multiplicirt dieselbe mit $\frac{\partial x}{x}$, integrirt, und macht der Kürze halber

$$(a) \ldots . \quad \frac{1}{2} l.x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{1.2 \ldots 4} - \ldots = \Theta(x),$$

so kommt

$$\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x} \partial x = \Theta(p) + C_1, \text{ wo } C_1 = -\Theta(\infty) \text{ ist.}$$

Hier tritt nun bei Bestimmung der Constante C_1 dieselbe Schwierigkeit wie bei der des Integrallogarithmus ein, indem der Werth $\Theta(\infty)$ mittelst der Reihe (a) deshalb nicht bestimmt werden kann, weil alle Glieder unendlich werden. Die folgende Untersuchung wird lehren, dass diese Constante C_1 merkwürdigerweise die des Integrallogarithmus ist, was man noch nicht bemerkt zu haben scheint. Um die Identität der beiden in Rede stehenden Constanten darzuthun, stellen wir jede derselben durch ein bestimmtes Integral dar, was für den Integrallogarithmus schon geschehen ist, hier aber nothwendig mit aufgenommen werden muss.

Digitized by Google

Bezeichnet nämlich C die Constante des Integrallogarithmus, so ist

$$\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-y}\partial y}{y} = C + \frac{1}{2} l.p^2 - p + \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{p^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

wo $p > 0$ sein muss. Könnte man nun eine Function von y, $f(y)$, so bestimmen, dass $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 + \varphi(p)$, wobei $\varphi(p)$ für $p=0$ nicht unendlich würde, so hätte man $\int_{\infty}^{p}\left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\}\partial y = C - \varphi(p) - p + \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{p^3}{1.2.3} + \text{etc.}$, folglich, wenn man $p=0$ setzte:

$$\int_{\infty}^{0}\left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\}\partial y = C - \varphi(0),$$

oder

$$(b) \ldots\ldots \quad C = \varphi(0) - \int_{0}^{\infty}\left\{\frac{e^{-y}}{y} - f(y)\right\}\partial y,$$

und C wäre somit durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt.

Eine solche Function, die obigen Bedingungen genügt, ist nun $f(y) = \frac{1}{y(1+y)}$; denn man findet leicht $\int_{\infty}^{p}\frac{\partial y}{y(1+y)} = \frac{1}{2} l.p^2 - l(p+1)$, also $\varphi(p) = -l(p+1)$, $\varphi(0)=0$, folglich

$$1.\quad C = -\int_{0}^{\infty}\left(e^{-y} - \frac{1}{1+y}\right)\frac{\partial y}{y},$$

wie schon bekannt.

Keineswegs ist dies die einzige Form, unter welcher C sich darstellen kann. Setzen wir z. B. $f(y) = \frac{1}{y(1+y^2)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}$, so kommt $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 - \frac{1}{2} l.(1+p^2)$, also $\varphi(p) = -\frac{1}{2} l(1+p^2)$, $\varphi(0)=0$, und

$$2.\quad C = -\int_{0}^{\infty}\left(e^{-y} - \frac{1}{1+y^2}\right)\frac{\partial y}{y}.$$

Auf eine ähnliche Art kann man nun für die Constante C_1 ein bestimmtes Integral finden. Denn es ist

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\cos y}{y}\partial y = C_1 + \frac{1}{2} l.p^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4} - \text{etc.}$$

Setzen wir also weiter $\int_{\infty}^{p} f(y)\partial y = \frac{1}{2} l.p^2 + \varphi(p)$, so kommt $\int_{\infty}^{p}\left\{\frac{\cos y}{y} - f(y)\right\}\partial y = C_1 - \varphi(p) - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4} - \text{etc.}$, also für $p=0$:

$$\int_{\infty}^{0}\left\{\frac{\cos y}{y}-f(y)\right\}\partial y=C_1-\varphi(0),$$

oder

$$C_1=\varphi(0)-\int_0^{\infty}\left\{\frac{\cos y}{y}-f(y)\right\}\partial y.$$

Durch die beiden Annahmen $f(y)=\frac{1}{y(1+y)}$ und $f(y)=\frac{1}{y(1+y^2)}$ erhält man also, wie vorher,

$$3.\quad C_1=-\int_0^{\infty}(\cos y-\frac{1}{1+y})\frac{\partial y}{y},$$

$$4.\quad C_1=-\int_0^{\infty}(\cos y-\frac{1}{1+y^2})\frac{\partial y}{y}.$$

Untersuchen wir jetzt die sich aus 1. und 3., oder aus 2. und 4., ergebende Differenz

$$C_1-C=\int_0^{\infty}(e^{-y}-\cos y)\frac{\partial y}{y}.$$

Man setze für $\frac{1}{y}$ das bestimmte Integral $\int_0^{\infty}e^{-uy}\partial u$, und kehre die Integration um; dann kommt

$$C_1-C=\int_0^{\infty}(e^{-y}-\cos y)\partial y\int_0^{\infty}e^{-uy}\partial u$$

$$=\int_0^{\infty}\partial u\int_0^{\infty}(e^{-y}-\cos y)e^{-uy}\partial y.$$

Nun ist

$$\int_0^{\infty}e^{-y}.e^{-uy}\partial y=\int_0^{\infty}e^{-(u+1)y}\partial y=\frac{1}{u+1},\int_0^{\infty}e^{-uy}\cos y\partial y=\frac{u}{1+u^2},$$

folglich

$$\int_0^{\infty}(e^{-y}-\cos y)e^{-uy}\partial y=\frac{1}{1+u}-\frac{u}{1+u^2}$$

und

$$C_1-C=\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u}-\frac{u}{1+u^2}\right)\partial u.$$

Da endlich $\int\left(\frac{1}{1+u}-\frac{u}{1+u^2}\right)\partial u=l(1+u)-\frac{1}{2}l.(1+u^2)=\frac{1}{2}l.\frac{(1+u)^2}{1+u^2}$, so ist offenbar $\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+u}-\frac{u}{1+u^2}\right)\partial u=0$, d. i. $C_1-C=0$, oder $C_1=C$. Demnach ist

Digitized by Google

5. $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos y}{y}\partial y = C + \frac{1}{2}\,l.p^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4} - \text{etc.},$
wo $C = 0{,}5772156\ldots$ ist.

§. 2.

Wenn im vorigen Paragraphen auch hinreichend dargethan ist, dass $C_r = C$ ist, so will ich doch eine Bestätigung dieser Wahrheit auf anderem Wege geben, der uns zu einem merkwürdigen Ausdruck der Function $\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}$ führen wird.

Bekanntlich entwickelt Lejeune-Dirichlet $\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)}$ dadurch, dass er den Ausdruck $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\partial x$ nach a differenzirt, wodurch $\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\,lx\partial x$ kommt, nun für lx das bestimmte Integral $\int_0^{\infty}(e^{-y} - e^{-xy})\frac{\partial y}{y}$ setzt, und die Integration umkehrt Statt dessen nehmen wir die Gleichung

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos y - \cos xy}{y}\partial y = lx$$

zu Hülfe, setzen also $\Gamma'(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\partial x\int_0^{\infty}\frac{\cos y - \cos xy}{y}\partial y$ $= \int_0^{\infty}\frac{\partial y}{y}\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}(\cos y - \cos xy)\partial x$. Beachtet man nun, dass $\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\cos y\partial x = \cos y\,\Gamma(a)$, und

$$\int_0^{\infty} x^{a-1}e^{-x}\cos xy\,\partial x = \Gamma(a).\frac{\cos(a\,\text{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}a}}$$

ist, so kommt

$$\frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \int_0^{\infty}\left(\cos y - \frac{\cos(a\,\text{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}a}}\right)\frac{\partial y}{y}.$$

Bekanntlich ist nun die Constante des Integrallogarithmus C der Werth, welchen $-\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}$ für $a=1$ erhält; also wird die vorhergehende Gleichung für $a=1$ folgende:

$$-C = \int_0^{\infty}\left\{\cos y - \frac{\cos(\text{arctang}\,y)}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}}\right\}\frac{\partial y}{y}.$$

Nun findet man leicht, dass $\frac{\cos(\text{arctang}\,y)}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{1+y^2}$ ist, also wird

Digitized by Google

$$C=-\int_0^\infty \left(\cos y-\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{\partial y}{y},$$

und wenn man diesen Ausdruck mit 4. vergleicht, so kommt $C_1=C$.

Herr Prof. Schlömilch ist in einer Abhandlung „Notes sur quelques intégrales définies“ (Crelle's Journ. Bd. 33. p. 316.) auf die Function $C+\frac{1}{2}l.p^2-\frac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\frac{1}{4}.\frac{p^4}{1.2....4}-$ etc. geführt worden; ich weiss nicht, ob er bemerkt hat, dass dieselbe gleich $\int_\infty^p \frac{\cos y}{y}\partial y$ ist. Ich werde im Folgenden die Schlömilchsche Bezeichnung wählen, nach welcher

$$C+\tfrac{1}{2}l.p^2-\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\tfrac{1}{4}.\frac{p^4}{1.2.....4}-\text{etc.}=Ci(p),$$

so dass also auch

$$Ci(p)=\int_\infty^p \frac{\cos y}{y}\partial y=\int_\infty^1 \frac{\cos py}{y}\partial y \text{ ist.}$$

§. 3.

Ueber die Integrale $u=\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a}$, $v=\int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a}$.

Wird $x=ay$ gesetzt, so kommt

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos aby\partial y}{1+y},\quad v=\int_0^\infty \frac{\sin aby\partial y}{1+y},$$

oder für $ab=m$:

$$u=\int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x},\quad v=\int_0^\infty \frac{\sin mx\partial x}{1+x}.$$

Setzt man ferner $1+x=y$, so kommt $u=\int_1^\infty \frac{\cos m(y-1)\partial y}{y}$, $v=\int_1^\infty \frac{\sin m(y-1)\partial y}{y}$, folglich durch Auflösung des Cosinus und Sinus:

$$u=\cos m\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y}+\sin m\int_1^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y,$$

$$v=\cos m\int_1^\infty \frac{\sin my\partial y}{y}-\sin m\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y}.$$

Von diesen beiden Integralen ist $\int_1^\infty \frac{\cos my\partial y}{y}$ in §. 1. und §. 2. entwickelt und gleich $-Ci(m)$. Was das andere betrifft, so ist

Digitized by Google

$$\int_1^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y=\int_0^\infty \frac{\sin my}{y}\partial y-\int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y=\frac{\pi}{2}-\int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y,$$

wo m positiv ist. Das Integral $\int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y$ ist eine durch Reihen entwickelbare Transcendente, welche Schlömilch a. a. O. durch $Si(m)$ bezeichnet, so dass

$$Si(m)=\int_0^1 \frac{\sin my}{y}\partial y=\int_0^m \frac{\sin y}{y}\partial y=m-\frac{1}{3}\cdot\frac{m^3}{1.2.3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{m^5}{1.2...5}-\text{etc.}$$

ist. Demnach ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x}=-\cos m\,Ci(m)+\sin m\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(m)\},$$
$$\int_0^\infty \frac{\sin mx\partial x}{1+x}=\ \ \sin m\,Ci(m)+\cos m\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(m)\};$$

oder auch

$$6.\quad\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a}=-\cos ab\,Ci(ab)+\sin ab\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(ab)\}\\ \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a}=\ \ \sin ab\,Ci(ab)+\cos ab\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(ab)\}\end{cases}$$
$$(a>0,\ b>0).$$

Diese beiden Integrale sind einer sehr bemerkenswerthen Transformation fähig, welche wir im nächsten Paragraphen versuchen.

§. 4.

Da $\frac{1}{x+a}=\int_0^\infty e^{-(x+a)u}\partial u$, so ist $\int_0^\infty \frac{f(x)}{x+a}\partial x$

$$=\int_0^\infty f(x)\partial x\int_0^\infty e^{-(x+a)u}\partial u=\int_0^\infty e^{-au}\partial u\int_0^\infty f(x)\,e^{-ux}\partial x$$

(die Integration ist umgekehrt worden). Setzen wir also $f(x)=\cos bx$ oder $f(x)=\sin bx$, und beachten, dass

$$\int_0^\infty e^{-ux}\cos bx\,\partial x=\frac{u}{b^2+u^2},\quad \int_0^\infty e^{-ux}\sin bx\partial x=\frac{b}{b^2+u^2}$$

ist, so erhalten wir

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-ax}\partial x}{x^2+b^2}=\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x+a},$$
$$\int_0^\infty \frac{be^{-ax}\partial x}{x^2+b^2}=\int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x+a}.$$

Für die Integrale linker Hand kann man auch $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$,

Digitized by Google

$\int_0^\infty \frac{ae^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$ setzen, wie man durch einfache Transformation findet; also ist nach §. 3.

$$7.\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2} = \sin ab\, Ci(ab) + \cos ab \{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\}, \\ \int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2} = -\cos ab\, Ci(ab) + \sin ab \{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\}. \end{cases}$$

Zu demselben Resultat ist Schlömilch auf ganz anderem Wege gelangt, in einer Abhandlung „Sur l'intégrale définie $\int_0^\infty \frac{\partial\Theta}{\Theta^2+a^2}e^{-x\Theta}$" (Crelle's Journal Bd. 33. p. 325.) *). Seine Methode lässt sich, wenn man einige der im Vorhergehenden entwickelten Resultate zu Hülfe nimmt, auf folgende Art vereinfachen.

Schlömilch differenzirt die Gleichung $\omega = \int_0^\infty \frac{e^{-mx}\partial x}{1+x^2}$ zweimal nach m, und findet sogleich

$$\omega + \frac{\partial^2\omega}{\partial m^2} = \int_0^\infty e^{-mx}\partial x = \frac{1}{m}.$$

Diese Differentialgleichung löst er nach Lagrange's bekannter Methode auf, und erhält

$$\omega = \sin m(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m) + \cos m(\varepsilon_2 - \int \frac{1}{m}\sin m\partial m).$$

Die Constante ε_2 ist leicht zu bestimmen; denn setzen wir $\int \frac{1}{m}\sin m\partial m = f(m)$, und machen $m=0$, so kommt $\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \varepsilon_2 - f(0) = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{\pi}{2} + f(0)$, also

$$\omega = \sin m(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m) + \cos m\{\frac{\pi}{2} - (f(m) - f(0))\},$$

oder

$$(g) \ldots \omega = \sin m(\varepsilon_1 + \int \frac{1}{m}\cos m\partial m) + \cos m\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^m \frac{\sin x}{x}\partial x\right).$$

Die Constante ε_1 könnte man dadurch zu bestimmen versuchen, dass man $\frac{\partial\omega}{\partial m} = \int_0^\infty -\frac{xe^{-mx}\partial x}{1+x^2}$ entwickelte, und $m=0$ setzte; allein dann wird $\frac{\partial\omega}{\partial m}$ unendlich, und dieser Weg führt also nicht zum Ziel. Schlömilch hat sich daher a. a. O. einer höchst sinn-

---

*) In der zweiten dieser Gleichungen sind die Vorzeichen auf p. 327. und p. 328. unrichtig.

Digitized by Google

reichen, aber freilich auch sehr künstlichen Methode, welche ziemlich weitläufige Rechnungen erfordert, bedient; kürzer gelangt man so zu dem Werthe von ε_1. Man setze in der Gleichung (g) $m=\infty$; dann geht $\int_0^m \frac{\sin x}{x}\partial x$ über in $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\partial x=\frac{\pi}{2}$, und der Factor von $\cos m$ verschwindet. Ferner muss auch ω für $m=\infty$ verschwinden; denn es ist $\omega=M\int_0^\infty e^{-mx}\partial x=M.\frac{1}{m}$, wo M einer der Werthe der Function $\frac{1}{1+x^2}$ von $x=0$ bis $x=\infty$, also offenbar endlich ist. Daher ist nach (g) $0=\sin m\{\varepsilon_1+\varphi(m)\}\,(m=\infty)$, wo $\varphi(m)=\int\frac{1}{m}\cos m\partial m$, also $\varepsilon_1+\varphi(\infty)=0$, $\varepsilon_1=-\varphi(\infty)$,

$$\omega=\sin m\int_\infty^m \frac{\cos x}{x}\partial x+\cos m\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^m\frac{\sin x}{x}\partial x\right).$$

Beachtet man nun, dass nach dem Vorhergehenden

$$\int_\infty^m \frac{\cos x}{x}\partial x=C+\tfrac{1}{2}l.m^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1.2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{m^4}{1.2....4}-\text{etc.}=Ci(m),$$

so kommt

$$\int_0^\infty \frac{e^{-mx}\partial x}{1+x^2}=\sin m\,Ci(m)+\cos m\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(m)\},$$

woraus man leicht das Integral $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2+a^2}$ ableitet.

XXIII.

Ueber einige bestimmte Integrale, welche sich auf die beiden Integrale $\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}$, $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x$ zurückführen lassen.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Das bestimmte Integral $\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}$ hat bekanntlich einen endlichen Werth, wenn $p>0$ ist, und kann durch die folgende Reihe dargestellt werden:

$$\int_{\infty}^{p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=C+lp-\frac{p}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{p^3}{1.2.3}+\text{etc.},$$

wo $C=0{,}5772156$ ist. Für $e^{-x}=z$ verwandelt es sich in $\int_{0}^{e^{-p}}\frac{\partial z}{lz}$, weshalb man es den Integrallogarithmus genannt und durch $li(e^{-p})$ bezeichnet hat.

In einer frühern Abhandlung habe ich ferner gezeigt, dass das Integral $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x$ durch die folgende unendliche Reihe dargestellt werden kann:

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x=C+lp-\frac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4}-\text{etc.},$$

wo es besonders merkwürdig ist, dass die Constante mit der des Integrallogarithmus übereinkommt. Man könnte diese Function wohl den Integralcosinus nennen, und Herr Prof. Schlömilch scheint diesen Gedanken gehabt zu haben, indem er es durch $Ci(p)$ bezeichnete.

Digitized by Google

Uebrigens habe ich a. a. O. gesagt: „Offenbar hat das Integral $\int_x^p \frac{\cos x}{x} \partial x$ einen bestimmten endlichen Werth, wenn $p > 0$ ist“; dies liegt indessen doch nicht so auf der Hand, weshalb ich den strengen Beweis dafür hier nachhole.

Nach einer bekannten Reductionsformel ist

$$\int \frac{\cos x}{x} \partial x = \frac{1}{x} \int \cos x \partial x + \int \frac{\partial x}{x^2} \int \cos x \partial x = \frac{1}{x} \sin x + \int \frac{\sin x}{x^2} \partial x,$$

folglich

$$\int_\infty^p \frac{\cos x}{x} \partial x = \frac{1}{p} \sin p + \int_\infty^p \frac{\sin x}{x^2} \partial x.$$

Es kommt also der Beweis darauf hinaus, zu zeigen, dass $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^2} \partial x$ einen endlichen Werth hat, was auf folgende Weise erhellt. Nach einem bekannten Theorem ist

$$\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^2} \partial x = M \int_\infty^p \frac{\partial x}{x^2} = -M \cdot \frac{1}{p},$$

indem M einer der Werthe von $\sin x$ ist, welche diese Function bei der stetigen Veränderung des x von ∞ bis p erlangt; da nun dieser Sinus niemals die Einheit übersteigt, so ist klar, dass $-M . \frac{1}{p}$ unter der Voraussetzung, dass p nicht verschwindet, endlich ist.

Es ist nun leicht einzusehen, dass das Integral $\int_\infty^p \frac{e^{-x} \partial x}{x^m}$ auf den Integrallogarithmus reducibel ist, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet, dass ferner die beiden Integrale $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x^{2m+1}} \partial x$, $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}} \partial x$ auf $\int_\infty^p \frac{\cos x}{x} \partial x$ zurückgeführt werden können, auch ist diese Reduction mit gar keinen Schwierigkeiten verbunden; ich werde sie aber dennoch vornehmen, um daraus einige merkwürdige bestimmte Integrale herzuleiten, zu deren Werthen man auf anderem Wege vielleicht nur mit Schwierigkeit gelangen würde.

I. Von dem Integral $\int_\infty^p \frac{e^{-x} \partial x}{x^m}$.

Man hat $\int \frac{e^{-x} \partial x}{x^m} = e^{-x} \int \frac{\partial x}{x^m} + \int e^{-x} \partial x \int \frac{\partial x}{x^m} =$

$$-\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} e^{-x} - \frac{1}{m-1} \int \frac{e^{-x} \partial x}{x^{m-1}}, \text{ also}$$

$$(a) \ldots . \int_\infty^p \frac{e^{-x} \partial x}{x^m} = -\frac{1}{m-1} \cdot \frac{e^{-p}}{p^{m-1}} - \frac{1}{m-1} \int_\infty^p \frac{e^{-x} \partial x}{x^{m-1}}.$$

Digitized by Google

Aus dieser Reductionsformel sieht man, dass das vorgelegte Integral auf $\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ reducibel ist. Führt man die Rechnung aus, so erhält man:

$$(b)\quad \int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = e^{-p}\Big[-\frac{1}{(m-1)p^{m-1}} + \frac{1}{(m-2)(m-1)p^{m-2}} - \frac{1}{(m-3)(m-2)(m-1)p^{m-3}} + \text{etc.} \pm \frac{1}{1.2.3....(m-1)p}\Big] \pm \frac{1}{1.2.3....(m-1)} \int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x}.$$

Hiernach ist die Theorie des Integrals linker Hand als abgeschlossen zu betrachten, wenn man Tafeln für den Integrallogarithmus hat; indessen führe ich diesen Gegenstand weiter aus, um neue Resultate daran zu knüpfen.

Denkt man sich e^{-p} in eine unendliche Reihe entwickelt und für den Integrallogarithmus ebenfalls die obige unendliche Reihe gesetzt, so sieht man auf der Stelle, dass das Integral durch eine unendliche Reihe von folgender Form dargestellt wird:

$$\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = \frac{a_{m-1}}{p^{m-1}} + \frac{a_{m-2}}{p^{m-2}} + ... + \frac{a_1}{p} + a_0 lp + b_1 p + b_2 p^2 + \text{etc.} + C_{m-1},$$

wo C_{m-1} eine numerische Constante ist. Unter Anwendung eines sehr bekannten Theorems über Binomialcoefficienten erhält man insbesondere:

$$(c)\quad \begin{cases} \int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = C_{m-1} + f(p), \text{ wo} \\ f(x) = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{(m-2)x^{m-2}} - \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(m-3)x^{m-3}} \\ \quad + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(m-4)x^{m-4}} - \text{etc.} + (-1)^{m-1}\cdot\frac{1}{1.2.....(m-2)}\cdot\frac{1}{x} \\ \quad + \frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-1)}\Big[lx - \frac{1}{m}x + \frac{1}{m(m+1)}\cdot\frac{1}{2}x^2 \\ \quad - \frac{1}{m(m+1)(m+2)}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \text{etc.}\Big]. \end{cases}$$

Setzen wir andrerseits für e^{-x} die unendliche Reihe, und integriren

$$\int \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = \int \frac{\partial x}{x^m}\Big(1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + ...\Big)$$

von $x = \infty$ bis $x = p$, so erhält man $\int_{\infty}^{p} \frac{e^{-x}\partial x}{x^m} = f(p) - f(\infty)$, woraus folgt $-f(\infty) = C_{m-1}$; da nun die erste Horizontalreihe in $f(x)$ für $x = \infty$ verschwindet, so folgt, dass die Function

$$\psi(x)=\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-1)}[lx-\frac{1}{m}x+\frac{1}{m(m+1)}.\tfrac{1}{2}x^2-\frac{1}{m(m+1)(m+2)}.\tfrac{1}{3}x^3+...]$$

für $x=\infty$ einen bestimmten endlichen Werth $-C_{m-1}$ erhält, der vermöge der Gleichung (b) bestimmt werden kann. Mit Hülfe der Entwickelung von e^{-p} und $\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x}$ findet man nämlich leicht

$$(d) \;....\; C_{m-1}=\frac{(-1)^m}{1.2.3....(m-1)}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+....+\frac{1}{m-1}-C).$$

Die Aufgabe ist nun, diese Zahl durch ein bestimmtes Integral auszudrücken.

Nach (c) ist:

$$\int_\infty^p \frac{e^{-x}\partial x}{x^m}+\frac{1}{(m-1)p^{m-1}}-\frac{1}{(m-2)p^{m-2}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(m-3)p^{m-3}}-\text{etc.}$$
$$+\frac{(-1)^{m-2}}{1.2.....(m-2)}\cdot\frac{1}{p}+\frac{(-1)^{m-2}}{1.2....(m-1)}lp=C_{m-1}+\Sigma,$$

wo Σ die Form $\alpha_1 p+\alpha_2 p^2+\alpha_3 p^3+......$ hat, also für $p=0$ verschwindet. Nun lassen sich alle Glieder linker Hand, vom zweiten an, durch bestimmte, von ∞ bis p sich ausdehnende Integrale ausdrücken. Denn man hat offenbar

$$-\int_\infty^p \frac{\partial x}{x^m}=\frac{1}{(m-1)p^{m-1}},\; \int_\infty^p \frac{\partial x}{x^{m-1}}=-\frac{1}{(m-2)p^{m-2}}, \text{ u. s. w.}$$
$$\int_\infty^p \frac{\partial x}{x(1+x)}=lp-l(1+p),$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\int_\infty^p \partial x\left[\frac{e^{-x}}{x^m}-\frac{1}{x^m}+\frac{1}{x^{m-1}}-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{m-2}}+\text{etc.}+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2...(m-2)}\cdot\frac{1}{x^2}\right]$$
$$+\frac{(-1)^m}{1.2....(m-1)}\left\{\int_\infty^p \frac{\partial x}{x(1+x)}+l(1+p)\right\}=C_{m-1}+\Sigma.$$

Lässt man sich in dieser Gleichung p der Null nähern, wobei Σ und $l(1+p)$ zum Verschwinden kommen, so erhält man die merkwürdige Gleichung:

$$(e)\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left[\frac{e^{-x}-1}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^{m-2}}-\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{m-3}}+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^{m-4}}-\text{etc.}\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-2)}\cdot\frac{1}{x}+\frac{(-1)^m}{1.2....(m-1))}\cdot\frac{1}{1+x}\right]=C_{m-1},$$

wo C_{m-1} eine numerische Constante bedeutet, die nach (d) berechnet wird.

Zu bemerken ist noch, dass diese Gleichung für $m=1$ eine Modification erleidet; es kommt nämlich, wenn man die obige Betrach-

Digitized by Google

tung für diesen Fall aufmerksam verfolgt, und beachtet, dass C_0 die Constante des Integrallogarithmus (c) ist:

$$(e') \quad \dots\dots \int_{\infty}^{0} \frac{\partial x}{x}\left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right) = C.$$

In dem Falle $m=2$ endlich kommt das Glied $\frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(m-2)} \cdot \frac{1}{x}$ gar nicht vor; es ist vielmehr

$$(e'') \quad \dots \int_{\infty}^{0} \frac{\partial x}{x}\left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right) = C_1 = 1 - C.$$

Was die Werthe C_1, C_2, C_3, u. s. w. betrifft, so kann man aus (d) leicht eine Recursionsformel dafür entwickeln. Bezeichnet man nämlich die absoluten Werthe derselben durch kleine Buchstaben, so kommt leicht $c_m - \frac{1}{m} c_{m-1} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1.2....m}$, oder

$$(f) \quad \dots\dots c_m = \frac{1}{m}\left(c_{m-1} + \frac{1}{1.2....m}\right).$$

Da $C=0{,}577215664901$ ist, so findet man

$$\begin{cases} C = 0{,}577215664901, \\ c_1 = 0{,}422784335099, \\ c_2 = 0{,}461392167549, \\ c_3 = 0{,}209352944735 \end{cases}$$

u. s. w.

Diese Zahlenreihe nimmt ziemlich schnell ab; übrigens ist mit Ausnahme von C die Zahl c_2 am grössten, von c_2 an aber findet fortwährende Abnahme statt, wovon man den Grund leicht einsehen wird.

II. Von dem Integral $\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x^{2m+1}} \partial x$.

Da $\int \frac{\cos x}{x^{2m+1}} \partial x = \cos x \int \frac{\partial x}{x^{2m+1}} + \int \sin x \partial x \int \frac{\partial x}{x^{2m+1}}$, so erhält man leicht

$$\int_{\infty}^{p} \frac{\cos x \partial x}{x^{2m+1}} = -\frac{1}{2m} \cdot \frac{\cos p}{p^{2m}} - \frac{1}{2m} \int_{\infty}^{p} \frac{\sin x}{x^{2m}} \partial x.$$

Man erhält ferner

$$\int_{\infty}^{p} \frac{\sin x}{x^{2m}} \partial x = -\frac{1}{2m-1} \cdot \frac{\sin p}{p^{2m-1}} + \frac{1}{2m-1} \int_{\infty}^{p} \frac{\cos x}{x^{2m-1}} \partial x.$$

Die Substitution dieses letzten Ausdrucks in den vorhergehenden giebt die Reductionsformel

Digitized by Google

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x=-\frac{1}{2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m}}+\frac{1}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}}-\frac{1}{(2m-1)2m}\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m-1}}\partial x$$

und durch successive Anwendung derselben kommt

$$(\alpha)\ \ldots\ldots\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x=-\frac{1}{2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m}}+\frac{1}{(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}}$$
$$+\frac{1}{(2m-2)(2m-1)2m}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m-2}}-\frac{1}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)2m}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-3}}$$

u. s. w.

$$+\frac{(-1)^m}{2.3.4....2m}\cdot\frac{\cos p}{p^2}+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3....2m}\cdot\frac{\sin p}{p}$$
$$+\frac{(-1)^{m+2}}{1.2.3....2m}\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x.$$

Durch die Entwickelung von $\cos p$, $\sin p$ und $\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x}\partial x$ findet man das Integral linker Hand von folgender Form:

$$\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x=C''_{2m}+\frac{a_{2m}}{p^{2m}}+\frac{a_{2m-2}}{p^{2m-2}}+\frac{a_{2m-4}}{p^{2m-4}}+\ldots+\frac{a_2}{p^2}$$
$$+a_0 lp+b_2p^2+b_4p^4+\text{etc.},$$

und zwar

$$(\beta)\ \ldots\ C'_{2m}=\frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3....2m}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2m}-C\right);$$

die übrigen Coefficienten findet man einfacher durch die unbestimmte Integration des Differentials

$$\frac{\partial x}{x^{2m+1}}\cos x=\frac{\partial x}{x^{2m+1}}\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}\right);$$

auf diese Weise erhält man nämlich sogleich:

$$(\gamma)\ \ldots\int_{\infty}^{p}\frac{\cos x}{x^{2m+1}}\partial x=C'_{2m}-\frac{1}{2mp^{2m}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$$
$$-\frac{1}{1.2...4}\cdot\frac{1}{(2m-4)p^{2m-4}}+\text{etc.}+\frac{(-1)^m}{1.2....(2m-2)}\cdot\frac{1}{2p^2}$$
$$+\frac{(-1)^m}{1.2....2m}lp+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2....(2m+2)}\cdot\tfrac{1}{2}p^2+\frac{(-1)^{m+2}}{1.2....(2m+4)}\cdot\tfrac{1}{4}p^4+\text{in inf.}$$

Drückt man nun, wie vorher, die Glieder $-\frac{1}{2mp^{2m}}$, $\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$, u. s. w., $\frac{(-1)^m}{1.2....2m}lp$ durch bestimmte Integrale aus, die sich von

∞ bis p ausdehnen, bringt dieselben auf die linke Seite, und lässt dann p sich der Null nähern, so erhält man:

$$(\delta)\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\Big[\frac{\cos x-1}{x^{2m}}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^{2m-2}}-\frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{x^{2m-4}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-2)}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots2m}\cdot\frac{1}{1+x}\Big]=C'_{2m}.$$

Für $m=0$ hat man besonders zu beachten:

$$(\delta')\ \ldots\ldots\ldots\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}(\cos x-\frac{1}{1+x})=C,$$

und für $m=1$

$$(\delta'')\ \ldots\ldots\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left(\frac{\cos x-1}{x^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1+x}\right)=C'_2.$$

Die absoluten Werthe der Grössen C'_{2m} sind, wie aus (β) erhellt, mit den Grössen c_{2m} identisch.

III. Von dem Integral $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x$.

Da die Betrachtungen in Bezug auf dieses Integral den vorhergehenden ganz analog sind, so darf ich mich jetzt kurz fassen.

Durch die Reductionsformel $\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=-\frac{1}{2m-1}\cdot\frac{\sin p}{p^{2m-1}}$ $-\frac{1}{(2m-2)(2m-1)}\cdot\frac{\cos p}{p^{2m-2}}-\frac{1}{(2m-2)(2m-1)}\int_\infty^p\frac{\sin x}{x^{2m-2}}\partial x$ gelangt man zu

$$(a)\int_\infty^p \frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=-\frac{\sin p}{(2m-1)p^{2m-1}}-\frac{\cos p}{(2m-2)(2m-1)p^{2m-2}}$$
$$+\frac{\sin p}{(2m-3)(2m-2)(2m-1)p^{2m-3}}+\frac{\cos p}{(2m-4)(2m-3)\ldots(2m-1)p^{2m-4}}$$

u. s. w.

$$+\frac{(-1)^m}{1.2.3\ldots(2m-1)}\cdot\frac{\sin p}{p}+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2.3\ldots(2m-1)}\int_\infty^p\frac{\cos x}{x}\partial x;$$

daraus ferner

$$(b)\ \ldots\ldots\int_\infty^p\frac{\sin x}{x^{2m}}\partial x=C''_{2m-1}-\frac{1}{(2m-2)p^{2m-2}}$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{(2m-4)p^{2m-4}}-\ldots+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-3)}\cdot\frac{1}{2p^2}+\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(2m-1)}lp$$
$$+\frac{(-1)^m}{1.2\ldots(2m+1)}\cdot\tfrac{1}{2}p^2+\frac{(-1)^{m+1}}{1.2\ldots(2m+3)}\cdot\tfrac{1}{3}p^3+\text{ in infinit.},$$

Digitized by Google

wo

$$(\mathfrak{c})\quad C''_{2m-1} = \frac{(-1)^m}{1.2.3....(2m-1)}\left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+....+\frac{1}{2m-1}-C\right).$$

Endlich kommt

$$(\mathfrak{b})\;....\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left[\frac{\sin x}{x^{2m-1}} - \frac{1}{x^{2m-2}} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{x^{2m-4}} - ....\right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^{m-1}}{1.2....(2m-3)}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{(-1)^m}{1.2....(2m-1)}\cdot\frac{1}{1+x}\right] = C''_{2m-1},$$

und insbesondere:

$$(\mathfrak{b}')\;....\;\int_\infty^0 \frac{\partial x}{x}\left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{1+x}\right) = C_1'' = -(1-C)$$
$$= -\,0{,}422784335099.$$

XXIV.

Ueber eine gewisse Klasse bestimmter Integrale, bei welchen die Function unter dem Integralzeichen für einen Werth der Veränderlichen zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Im VII. Bande des Archivs p. 270 ff. hat sich Herr Professor Schlömilch mit den bestimmten Integralen: $\int_0^\infty \frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2}$, $\int_0^\infty \frac{x\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2}$ beschäftigt, und folgende Werthe gefunden:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x^2-a^2}=-\frac{\pi}{2a}\sin ab\,,\quad \int_0^\infty \frac{x\sin bx\partial x}{x^2-a^2}=\frac{\pi}{2}\cos ab$$
$$(a>0,\ b>0).$$

Im Crelle'schen Journal. Band 33. hat dieser ausgezeichnete Mathematiker denselben Gegenstand von Neuem aufgenommen und durch eine zwar weitläufige, aber sehr sinnreiche Methode auch noch die Werthe von $\int_0^\infty \frac{x\cos bx\partial x}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{\sin bx\partial x}{x^2-a^2}$ ermittelt. Es finden sich dort die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{x\cos bx\partial x}{x^2-a^2}=-\cos ab\, Ci(ab)-\sin ab\, Si(ab),$$
$$\int_0^\infty \frac{a\sin bx\partial x}{x^2-a^2}=-\sin ab\, Ci(ab)+\cos ab\, Si(ab)\ \ ^*).$$

Ich werde diese vier Integrale nach einer von der Schlömilch-schen ganz verschiedenen Methode von Neuem besonders untersuchen, und darthun, dass die so eben angegebenen Werthe nur unter einer ganz besondern Voraussetzung richtig sind. Zum besseren Verständniss des Folgenden muss ich einige Bemerkungen vorausschicken.

Alle vier Integrale sind von der Art, dass die Function unter dem Integralzeichen für $x=a$ unstetig wird, und eben deshalb ist bei der Werthbestimmung derselben ganz besondere Vorsicht nöthig.

Betrachten wir überhaupt das Integral $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x$. Wenn die Function $f(x)$ für alle Werthe von x, zwischen welchen man integrirt, endlich und stetig bleibt, so ist bekanntlich

$$(a)\quad \ldots\ldots \int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x=\psi(x_1)-\psi(x_0),$$

wenn $\psi(x)$ der allgemeine Ausdruck des unbestimmten Integrals $\int f(x)\partial x$ ist. Wird dagegen die Function $f(x)$ für einen Mittelwerth zwischen x_0 und x_1, z. B. für $x=a$, unstetig, so darf man die Formel (a), wie bekannt, im Allgemeinen nicht anwenden; vielmehr giebt sie dann häufig fehlerhafte Resultate. In diesem letztern Falle ist eine Theilung des Integrals nöthig; um nämlich seinen Werth zu finden, suche man die Grenze, welcher sich die Summe

$$\int_{x_0}^{a-u} f(x)\partial x+\int_{a+v}^{x_1} f(x)\partial x$$

nähert, indem die positiven Grössen u und v beide gegen Null convergiren und sonst ganz unabhängig von einander sind. Es sei z. B.

*) Die Bezeichnung ist bei Schlömilch etwas anders.

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x}$$

zu entwickeln, wo m, n positiv sind und für $x=0$ Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet. Da allgemein $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l.(x^2)$, so würde die Anwendung der Formel (a) geben:

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = \tfrac{1}{2} l.(n^2) - \tfrac{1}{2} l.(m^2) = \tfrac{1}{2} l \cdot \left(\frac{n}{m}\right)^2 = l \frac{n}{m},$$

da n, m positiv sind. Allein dies Resultat ist unrichtig; denn zerlegt man das Integral, so kommt

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = \int_{-m}^{-u} \frac{\partial x}{x} + \int_{v}^{n} \frac{\partial x}{x},$$

für $u=0$, $v=0$, also offenbar

$$\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = l\frac{n}{m} - l\frac{v}{u}.$$

Hier bleibt nun das Verhältniss $\frac{v}{u}$, während u, v sich beide der Null nähern, völlig unbestimmt, da die Bedingung der Aufgabe gar keine gegenseitige Abhängigkeit zwischen u und v feststellt; somit ist auch der Werth von $\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x}$ unbestimmt *). Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass man nicht etwa $u=v$ setzen darf, also auch nicht

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x = \int_{x_0}^{a-u} f(x)\partial x + \int_{a+u}^{x_1} f(x)\partial x, \text{ für } u=0.$$

Unter dieser Voraussetzung würde $\log \frac{v}{u}$ offenbar verschwinden und

---

*) Minding nimmt in seiner vortrefflichen Differential- und Integralrechnung. Berlin. 1836. auf den hier betrachteten Ausnahmefall ganz besonders Rücksicht, und die obige Definition des bestimmten Integrals $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\partial x$ für den Fall, dass für $x=a$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, verdanke ich ihm.

Merkwürdig ist, dass er unter Anwendung der Formel (a) findet: $\int_{-m}^{n} \frac{\partial x}{x} = l\left(\frac{n}{-m}\right)$, also einen imaginären Werth, der die Unzulässigkeit der Formel (a) für den vorliegenden Fall um so mehr ins Licht setzen soll. Minding kommt zu diesem Resultat, indem er das unbestimmte Integral $\int \frac{\partial x}{x} = lx$ setzt, was nur für positive x richtig ist, während für negative $\int \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2} l(x^2)$, wie schon hinlänglich bekannt ist.

der Werth $l\frac{n}{m}$ richtig sein. Dass im Allgemeinen nicht $u=v$ genommen werden darf, erhellet leicht, wenn man die bestimmten Integrale sich durch Flächenräume dargestellt denkt.

Nehmen wir nun bei den obigen vier Integralen die erwähnte Theilung vor, so werden die folgenden Betrachtungen uns zu dem Resultate führen, dass diese Integrale **unbestimmt** sind, und nur unter der Voraussetzung $u=v$ die von **Schlömilch** a. a. O. gegebenen Werthe erhalten. **Schlömilch** hat in seinen Entwickelungen auf die Unterbrechung der Stetigkeit nicht Rücksicht genommen, weshalb er zu obigen **bestimmten** Werthen geführt wurde; er setzt unter Anderm $\int_0^\infty \frac{\partial x}{x^2-a^2}=0$, was nicht richtig ist. Denn man hat durch unbestimmte Integration

$$2a\int\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)\partial x=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^2, \text{ also}$$

$$2a\int_0^{a-u}\frac{\partial x}{x^2-a^2}+2a\int_{a+v}^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\tfrac{1}{2}l.\left[\frac{u(2a+v)}{v(2a-u)}\right]^2.$$

Nähern sich nun u und v der Null, so convergirt $\frac{2a+v}{2a-u}$ gegen 1, allein das Verhältniss $\frac{u}{v}$ bleibt unbestimmt, und es ist also auch $\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}$ unbestimmt, und nur $=0$, wenn man

$$\int_0^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}=\int_0^{a-u}\frac{\partial x}{x^2-a^2}+\int_{a+u}^\infty\frac{\partial x}{x^2-a^2}$$

setzt, und die Grenze für $u=0$ bestimmt.

I.

Beschäftigen wir uns nun zuerst mit dem Integral $\int_0^\infty\frac{\cos bx\partial x}{x^2-a^2}=\omega$, wo wir offenbar a und b als positiv betrachten dürfen; auch darf a nicht verschwinden, da ω sonst unendlich wird.

Da $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, so kommt die Aufgabe auf die Entwickelung von

$$\omega_1=\int_0^\infty\frac{\cos bx\,\partial x}{x+a} \text{ und } \omega_2=\int\frac{\cos bx\,\partial x}{x-a}$$

zurück.

Was das erste Integral betrifft, so habe ich seinen Werth in einer frühern Abhandlung schon entwickelt; ich habe nämlich gefunden:

Digitized by Google

$$(1) \ldots \int_0^{\infty} \frac{\cos bx \, \partial x}{x+a} = -\cos ab \, Ci(ab) + \sin ab \left\{ \tfrac{1}{2}\pi - Si(ab) \right\},$$

wo $Ci(ab) = \int_{\infty}^{ab} \frac{\cos y}{y} \partial y = C + \tfrac{1}{2} l . (ab)^2 - \tfrac{1}{2} . \frac{(ab)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4} . \frac{(ab)^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$

$$Si(ab) = \int_0^{ab} \frac{\sin y}{y} \partial y = ab - \tfrac{1}{3} . \frac{(ab)^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5} . \frac{(ab)^5}{1.2 \ldots 5} - \text{etc.},$$

C (die Constante des Integrallogarithmus) $= 0{,}5772156$.

Um nun ferner ω_2 zu entwickeln, bei welchem für $x = a$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, müssen wir

$$\omega_2 = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx \, \partial x}{x-a} + \int_{a+v}^{\infty} \frac{\cos bx \, \partial x}{x-a}$$

setzen, und u, v sich der Null nähern lassen. Es sei also

$$\Theta = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx \, \partial x}{x-a}, \quad \Theta_1 = \int_{a+v}^{\infty} \frac{\cos bx \, \partial x}{x-a}.$$

Für $x - a = -y$ wird

$$\Theta = \int_a^u \frac{\cos b(a-y) \, \partial y}{y} = \cos ab \int_a^u \frac{\cos by}{y} \partial y + \sin ab \int_a^u \frac{\sin by}{y} \partial y.$$

Man hat nun

$$\int_a^u \frac{\cos by}{y} \partial y = \int_{\infty}^u \frac{\cos by}{y} \partial y - \int_{\infty}^a \frac{\cos by}{y} \partial y = Ci(ub) - Ci(ab),$$

$$\int_a^u \frac{\sin by}{y} \partial y = \int_0^u \frac{\sin by}{y} \partial y - \int_0^a \frac{\sin by}{y} \partial y = Si(ub) - Si(ab);$$

also durch Substitution:

$$(2) \ldots\ldots \Theta = \int_0^{a-u} \frac{\cos bx \, \partial x}{x-a} = \cos ab \left\{ Ci(ub) - Ci(ab) \right\}$$
$$+ \sin ab \left\{ Si(ub) - Si(ab) \right\}.$$

Auf der andern Seite hat man, wenn $x - a = y$ gesetzt wird,

$$\Theta_1 = \int_v^{\infty} \frac{\cos b(y+a) \, \partial y}{y} = \cos ab \int_v^{\infty} \frac{\cos by}{y} \partial y - \sin ab \int_v^{\infty} \frac{\sin by}{y} \partial y;$$

aber

$$\int_v^{\infty} \frac{\cos by}{y} \partial y = -\int_{\infty}^v \frac{\cos by}{y} \partial y = -Ci(vb),$$

$$\int_v^{\infty} \frac{\sin by}{y} \partial y = \int_0^{\infty} \frac{\sin by}{y} \partial y - \int_0^v \frac{\sin by}{y} \partial y = \tfrac{1}{2}\pi - Si(vb);$$

also durch Substitution:

$$(3) \ldots . \Theta_1 = \int_{a+v}^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} = -\cos ab\, Ci(vb) - \sin ab \{ \tfrac{1}{2}\pi - Si(vb) \}.$$

Durch Addition von (2) und (3) kommt

$$\int_0^{a-u} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} + \int_{a+v}^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} = \cos ab\,[Ci(ub) - Ci(vb) - Ci(ab)]$$
$$+ \sin ab\,[Si(ub) + Si(vb) - Si(ab) - \tfrac{1}{2}\pi].$$

Nähern sich nun u und v der Null, so verschwinden offenbar $Si(ub)$, $Si(vb)$; dagegen wird $Ci(ub) - Ci(vb) = \frac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2$, oder, wegen $u>0$, $v>0$, schlechthin $= l\left(\frac{u}{v}\right)$, wobei das Verhältniss $\frac{u}{v}$ völlig unbestimmt bleibt. Es ist folglich

$$(4) \ldots . \quad \omega_2 = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} = \cos ab \{ l\left(\frac{u}{v}\right) - Ci(ab) \}$$
$$- \sin ab \{ \tfrac{1}{2}\pi + Si(ab) \}.$$

Da nun nach dem Obigen $2a\int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2} = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x-a} - \int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x+a}$, so hat man nach den Gleichungen (1) und (4)

$$(5) \ldots\ldots \quad 2a\int_0^{\infty} \frac{\cos bx\,\partial x}{x^2-a^2} = \cos ab\, l\left(\frac{u}{v}\right) - \pi \sin ab.$$

Addirt man die Ausdrücke (1) und (4) und beachtet, dass $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{2x}{x^2-a^2}$, so findet man auf der Stelle

$$(6) \ldots . \int_0^{\infty} \frac{x \cos bx\,\partial x}{x^2-a^2} = \cos ab \{ \tfrac{1}{2}l\left(\frac{u}{v}\right) - Ci(ab) \} - \sin ab\, Si(ab).$$

2.

Auf eine ganz ähnliche Art wie vorher findet man die Formeln:

$$(1') \ldots\ldots \int_0^{a-u} \frac{\sin bx\,\partial x}{x-a} = \sin ab \{ Ci(ub) - Ci(ab) \}$$
$$- \cos ab \{ Si(ub) - Si(ab) \},$$

$$(2') \ldots \int_{a+v}^{\infty} \frac{\sin bx\,\partial x}{x-a} = -\sin ab\, Ci(vb) + \cos ab \{ \tfrac{1}{2}\pi - Si(vb) \};$$

durch Addition:

Digitized by Google

$$\int_0^{a-u} \frac{\sin bx\partial x}{x-a} + \int_{a+v}^{\infty} \frac{\sin bx\,\partial x}{x-a} = \sin ab\,[Ci(ub) - Ci(vb) - Ci(ab)]$$
$$- \cos ab\,[Si(ub) + Si(vb) - Si(ab) - \tfrac{1}{2}\pi],$$

und für $u=0$, $v=0$:

$$(3')\ldots\int_0^{\infty} \frac{\sin bx\,\partial x}{x-a} = \sin ab\,\{l\left(\frac{u}{v}\right) - Ci(ab)\} + \cos ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi + Si(ab)\}.$$

In einer frühern Abhandlung habe ich ferner entwickelt:

$$(4')\ \ldots\int_0^{\infty} \frac{\sin bx\,\partial x}{x+a} = \sin ab\,Ci(ab) + \cos ab\,\{\tfrac{1}{2}\pi - Si(ab)\}.$$

Durch Subtraction und Addition der Formeln (3′) und (4′) erhält man leicht:

$$(5')\int_0^{\infty} \frac{a\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2} = \sin ab\,\{\tfrac{1}{2}l\left(\frac{u}{v}\right) - Ci(ab)\} + \cos ab\,Si(ab),$$

$$(6')\ \ldots\ \int_0^{\infty} \frac{x\sin bx\,\partial x}{x^2-a^2} = \tfrac{1}{2}l\left(\frac{u}{v}\right)\sin ab + \tfrac{1}{2}\pi\cos ab.$$

Für $\frac{u}{v}=1$ gehen die Formeln (5), (6), (5′), (6′) in die von Schlömilch im Archiv und im Crelle'schen Journal angegebenen über, was ich bereits oben angedeutet habe.

Schliesslich will ich bemerken, dass die beiden Integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2},\ \int_0^{\infty} \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2},$$

mit denen Schlömilch sich im Crelle'schen Journal ebenfalls beschäftigt hat, unbestimmt wie die vorhergehenden sind. Ich werde sie in einem nächsten Aufsatze einer besondern Untersuchung unterwerfen.

Digitized by Google

XXV.

Ueber die Integrale $\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$ und $\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}$.

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Da bei beiden Integralen Unterbrechung der Stetigkeit für $x=a$ eintritt, so müssen wir jedes derselben in zwei andere zerlegen, deren eines sich von $x=0$ bis $x=a-u$, das andere von $x=a+v$ bis $x=\infty$ erstreckt, und die Grenze der Summe für $u=0$, $v=0$ ermitteln. Da ferner $\frac{2a}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}$, $\frac{2x}{x^2-a^2}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}$, so sieht man, dass es hier nur auf die Entwickelung folgender drei Integrale ankommt:

$$\Theta=\int_0^{a-u}\frac{e^{-bx}\partial x}{x-a},\ \Theta_1=\int_{a+v}^\infty\frac{e^{-bx}\partial x}{x-a},\ \omega=\int_0^\infty\frac{e^{-bx}\partial x}{x+a}.$$

Was das erste betrifft, so erhält man, $x-a=-y$ gesetzt, $\Theta=\int_a^u\frac{e^{-b(a-y)}\partial y}{y}=e^{-ab}\int_a^u\frac{e^{by}\partial y}{y}=e^{-ab}\int_{ab}^{ub}\frac{e^y\partial y}{y}$. Dies Integral ist nur durch Reihen entwickelbar; am einfachsten setzt man, um eine solche Reihe zu erhalten, für e^y die unendliche Reihe $1+y+\frac{y^2}{1.2}+\frac{y^3}{1.2.3}+$ etc., und integrirt zuerst unbestimmt; wird zur Abkürzung

$$\psi(y)=\tfrac{1}{2}l.(y^2)+\frac{y}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{y^2}{1.2}+\tfrac{1}{3}.\frac{y^3}{1.2.3}+\text{etc.}$$

gesetzt, so kommt $\int_{ab}^{ub}\frac{e^y\partial y}{y}=\psi(ub)-\psi(ab)$, also

Digitized by Google

$$(1) \quad \ldots\ldots \Theta = \int_0^{a-u} \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}\{\psi(ub) - \psi(ab)\}.$$

Uebrigens sieht man aus dieser Gleichung, dass das Integral $\int_0^a \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = -\infty$ wird.

Man hat ferner, $x-a=y$ gesetzt,

$$\Theta_1 = \int_v^\infty \frac{e^{-b(a+y)}\partial y}{y} = e^{-ab}\int_v^\infty \frac{e^{-by}\partial y}{y} = -e^{-ab}\int_\infty^{bv} \frac{e^{-y}\partial y}{y}.$$

Dies Integral ist bekanntlich der Integrallogarithmus von e^{-bv}, und man hat

$$\int_\infty^{bv} \frac{e^{-y}\partial y}{y} = li(e^{-bv}) = C + \tfrac{1}{2}l.(bv)^2 - \frac{bv}{1} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(bv)^2}{1.2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(bv)^3}{1.2.3} + \text{etc.},$$

wo $C=0{,}5772156$;

demnach ist

$$(2) \quad \ldots\ldots \Theta_1 = \int_{a+v}^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = -e^{-ab}\,li(e^{-bv});$$

woraus man sieht, dass das Integral $\int_a^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = +\infty$ wird.

Die Addition der beiden Ausdrücke (1) und (2) giebt

$$\int_0^{a-u} \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} + \int_{a+v}^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}[\psi(ub) - \psi(ab) - li(e^{-bv})];$$

für $u=0$, $v=0$ wird offenbar $\psi(ub) - li(e^{-bv}) = \tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C$, wo das Verhältniss $\frac{u}{v}$ unbestimmt bleibt; folglich ist

$$(3) \quad \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C - \psi(ab)].$$

Endlich findet man für $x+a=y$:

$$\omega = \int_a^\infty \frac{e^{-b(y-a)}\partial y}{y} = e^{ab}\int_a^\infty \frac{e^{-by}\partial y}{y} = -e^{ab}\int_\infty^{ab} \frac{e^{-y}\partial y}{y},$$

also

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x+a} = -e^{ab}\,li.(e^{-ab}).$$

Subtrahirt man nun (4) von (3), so entsteht:

$$(5) \ldots 2a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2} = e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2 - C - \psi(ab)] + e^{ab}\,li(e^{-ab});$$

Digitized by Google

die Addition von (3) und (4) giebt dagegen

$$(6)\ldots 2\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}=e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2-C-\psi(ab)]-e^{ab}\,li\,(e^{-ab}).$$

Setzt man jetzt mit Schlömilch

$$C+\tfrac{1}{2}l.(\omega^2)+\frac{\omega}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\omega^2}{1.2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\omega^3}{1.2.3}+\text{etc.}=Ei(\omega),$$

so ist offenbar $C+\psi(ab)=Ei(ab)$, $li(e^{-ab})=Ei(-ab)$, und die Gleichungen (5), (6) nehmen folgende Gestalt an:

$$(7)\ \ldots\ 2a\int_0^\infty \frac{e^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}=e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2-Ei(ab)]+e^{ab}Ei(-ab),$$

$$(8)\ \ldots\ 2\int_0^\infty \frac{xe^{-bx}\partial x}{x^2-a^2}=e^{-ab}[\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2-Ei(ab)]-e^{ab}Ei(-ab).$$

Die Integrale sind folglich beide unbestimmt; setzt man das Verhältniss $\frac{u}{v}=1$, so gehen die Ausdrücke in diejenigen über, welche Schlömilch im 33sten Bande des Crelle'schen Journals p. 328. gegeben hat.

Schliesslich verdient noch Folgendes bemerkt zu werden.

Da

$$Ei(-ab)=C+\tfrac{1}{2}l.(ab)^2-\frac{ab}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ab)^2}{1.2}-\text{etc.}=li.(e^{-ab}),$$

und diese Function in $Ei(ab)$ übergeht, wenn man ab negativ setzt, so könnte man sich veranlasst sehen, $Ei(ab)=li(e^{ab})$ zu setzen; allein dies ist fehlerhaft, indem der Integrallogarithmus einer die Einheit übersteigenden Grösse wiederum unbestimmt ist.

Um dies darzuthun, sei das Integral $\int_\infty^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}$ zu entwickeln, wo p positiv ist. Da für $x=0$ Unterbrechung der Stetigkeit statt findet, so setze man

$$\int_\infty^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=\int_\infty^{u}\frac{e^{-x}\partial x}{x}+\int_{-v}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x},$$

wo u, v beliebig kleine positive Grössen sind. Man hat dann

$$\int_\infty^{u}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=C+\tfrac{1}{2}l.(u^2)-\frac{u}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{1.2}-\text{etc.},$$

$$\int_{-v}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.}$$

$$-\tfrac{1}{2}l.(v^2)-\frac{v}{1}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{1.2}-\text{etc.},$$

Digitized by Google

folglich

$$\int_{\infty}^{u}\frac{e^{-x}\partial x}{x}+\int_{-v}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.}$$
$$+\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+\Sigma,$$

wo Σ für $u=0$, $v=0$ verschwindet. Daher hat man

$$\int_{\infty}^{-p}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.},$$

oder auch, wenn man $e^{-x}=y$ setzt:

$$\int_{0}^{e^p}\frac{\partial y}{ly}=\tfrac{1}{2}l.\left(\frac{u}{v}\right)^2+C+\tfrac{1}{2}l.(p^2)+\frac{p}{1}+\tfrac{1}{2}.\frac{p^2}{1.2}+\text{etc.}$$

Hier ist nun e^p grösser als die Einheit, und der Integrallogarithmus einer die Einheit übersteigenden Grösse ist folglich unbestimmt, da zwischen u und v keine Abhängigkeit irgend einer Art besteht. Ich habe diese Bemerkung hier gemacht, weil Schlömilch an verschiedenen Stellen des Archivs solche Bezeichnungen wie $li(e^p)$, $(p>0)$ angenommen hat. Der obigen Ansicht ist auch Minding. Auf p. 193. (Handbuch der Differential- und Integralrechnung. Berlin. 1836.) sagt er ausdrücklich: „Folglich ist auch das vorliegende Integral *) zwischen den Grenzen 0 und x', sobald $x'>1$, unbestimmt.“

XXVI.

Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gammafunction.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

In der berühmten Abhandlung: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam

*) $\int_0^{x'}\frac{\partial x}{lx}$.

Digitized by Google

$$1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2\gamma(\gamma+1)}x^2+\text{etc.}“$$

hat Gauss bekanntlich gefunden, dass das Product

$$\Pi(k,a)=\frac{1.2.3\ldots.k.k^a}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k)}$$

sich, wenn k ins Unendliche wächst, der Grenze $\Gamma(a+1)=\int_0^\infty x^a e^{-x}\partial x$ nähert, dass also $\Pi(\infty, a)$ oder kürzer $\Pi(a)=\Gamma(a+1)$ ist. Die Herleitung dieser Gleichung bei Gauss beruht auf Eigenschaften der obigen Reihe, die er mit einem grossen Aufwande von Scharfsinn entwickelt. Ein besonderer einfacher Beweis der in Rede stehenden Gleichung dürfte wohl wünschenswerth und vielleicht nicht ohne Interesse sein.

Ich erinnere zunächt an die bekannte Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=\int_0^1\left(\frac{1}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x.$$

Schreibt man dafür

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=\int_0^1\frac{1-x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x,$$

und beachtet, dass das erste Integral dieser Summe den Werth lk hat, so kommt

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=lk+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^a}{1-x}\right)\partial x,$$

oder, wie leicht erhellet:

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}=lk+\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a+k}}{1-x}-\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x.$$

Dies Integral kann man in zwei Theile zerlegen, nämlich in

$$\int_0^1\left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x,\ -\int_0^1\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}\partial x,$$

deren jeder einen endlichen Werth hat, wie leicht erhellet. Was den letztern betrifft, so ist

$$\frac{x^a-x^{a+k}}{1-x}=x^a+x^{a+1}+\ldots.+x^{a+k-1},$$

Digitized by Google

also

$$\int_0^1 \frac{x^a - x^{a+k}}{1-x}\partial x = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{a+k},$$

folglich

$$\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = lk - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} - \dots - \frac{1}{a+k} + \int_0^1 \left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x.$$

Nun lässt sich beweisen, dass das Integral

$$r = \int_0^1 \left(\frac{x^{k-1}}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+k}}{1-x}\right)\partial x = \int_0^1 x^{k-1}\partial x \left(\frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+1}}{1-x}\right)\partial x$$

für $k=\infty$ verschwindet. Denn da von den beiden Factoren unter dem Integralzeichen x^{k-1}, $\varphi = \frac{1}{l\frac{1}{x}} - \frac{x^{a+1}}{1-x}$, der erste sein Vorzeichen (+) zwischen den Integrationsgrenzen nicht ändert, so ist bekanntlich $r = M\int_0^1 x^{k-1}\partial x = M.\frac{1}{k}$, wo M einer der Werthe ist, welche die Function φ erlangt, indem x von 0 bis 1 sich stetig ändert. Alle diese Werthe sind aber endlich, was für jedes x, das <1, von selbst erhellet, und für $x=1$ auf bekannte Weise dargethan wird; folglich bleibt M endlich, also verschwindet $M.\frac{1}{k}$ für $k=\infty$, d. i. $r=0$ für $k=\infty$. Nach dem Obigen ist also:

$$(a)\dots \frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = lk - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} - \dots - \frac{1}{a+k} (k=\infty).$$

Bezeichnet man den Ausdruck rechter Hand durch A, multiplicirt die für jedes endliche k geltende Gleichung $\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = A + r$ mit ∂a, und integrirt von $a=0$ bis $a=a$, so kommt

$$l\Gamma(a+1) = \int_0^a A\partial a + \int_0^a r\partial a.$$

Nun wird auch das Integral $R = \int_0^a r\partial a$ für $k=\infty$ verschwinden. Setzt man nämlich $\int r\partial a = \psi(a)$, so wird $\int_0^a r\partial a = \psi(a) - \psi(0)$; aber nach dem Taylor'schen Satze

$$\psi(a) - \psi(0) = a\psi'(\vartheta a),$$

wo ϑ zwischen 0 und 1 liegt, also $R = a\psi'(\vartheta a)$. Da nun $\psi'(\vartheta a)$

$=\frac{\partial\psi(a)}{\partial a}$ (nach der Differenziation ϑa statt a gesetzt), und $\frac{\partial\psi(a)}{\partial a}$ $=r$ ist; da ferner nach dem Obigen r für jedes a, wenn $k=\infty$, verschwindet, so muss auch R für $k=\infty$ verschwinden. Demnach ist $l\Gamma(a+1)=\int_0^a A\partial a\,(k=\infty)$, oder, wenn man die Integration ausführt,

$$(b)\;\ldots\quad l\Gamma(a+1)=l.\frac{1.2.3\ldots.k.k^a}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+k)}(k=\infty).$$

Daraus ergiebt sich sogleich

$$(c)\;\ldots.\quad \Gamma(a+1)=\frac{1.2.3\ldots.k.k^a}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}(k=\infty).$$

Bekanntlich geht die Constante des Integrallogarithmus C hervor aus $-\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a}$, wenn man in diesem Ausdrucke $a=0$ setzt; nach (a) ist also

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{k}-lk\,(k=\infty),$$

was sonst auf minder strenge Weise dargethan wird.

XXVII.

Zwei Entwickelungen des bestimmten Integrals $\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Lejeune-Dirichlet's interessanter Beweis des Legendreschen Theorems über Eulersche Integrale der zweiten Art (Crelle's Journal Bd. 15. p. 258. ff.) kommt der Hauptsache nach darauf hinaus, darzuthun, dass die Ableitung

Digitized by Google

$$\frac{\partial}{\partial a} l.\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{n})\,\Gamma(a+\frac{2}{n})\ldots\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(na)}$$

eine von a unabhängige Grösse ist, deren Werth man übrigens nicht zu kennen braucht. Zu dem Ende entwickelt **Dirichlet** die Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=\int_0^1 (e^{1-\frac{1}{x}}-x^a)\frac{\partial x}{x(1-x)},$$

setzt darin $a,\ a+\frac{1}{n},\ldots a+\frac{n-1}{n}$ statt a, und bildet die Summe

$$s=\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}+\frac{\partial l\Gamma(a+\frac{1}{n})}{\partial a}+\ldots+\frac{\partial l\Gamma(a+\frac{n-1}{n})}{\partial a},$$

wofür er das bestimmte Integral erhält:

$$s=\int_0^1\left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x}}}{1-x}-\frac{x^a}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{\partial x}{x}.$$

Dieser Ausdruck wird durch die Substitution von x^n statt x in den folgenden transformirt:

$$s=n\int_0^1\left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x}-\frac{x^{na}}{1-x}\right)\frac{\partial x}{x};$$

zieht man nun von dieser Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)}=k\int_0^1(e^{1-\frac{1}{x}}-x^{na})\frac{\partial x}{x(1-x)}$$

ab, so kommt

$$s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=n\int_0^1\left(\frac{ne^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x^n}-\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{1-x}\right)\frac{\partial x}{x},$$

welches in der That eine von a unabhängige Grösse ist.

Hierauf hat **Schlömilch** in diesem **Archiv** Thl. VII. p. 348. ff. darauf aufmerksam gemacht, dass man sich auch der bekannten Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=-C+\int_0^1\frac{1-x^{a-1}}{1-x}\partial x \text{ *)}$$

zum Beweise des Legendre'schen Theoremes bedienen könnte. Man findet hier nämlich

---

*) C bedeutet die Constante des Integrallogarithmus.

$$s=-nC+\int_0^1\left(\frac{n}{1-x}-\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\partial x,$$

oder, x^n statt x gesetzt,

$$s=-nC+n\int_0^1\left(\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}-\frac{x^{na-1}}{1-x}\right)\partial x.$$

Zieht man von der letztern Gleichung

$$\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-nC+n\int_0^1\frac{1-x^{na-1}}{1-x}\partial x$$

ab, so kommt

$$s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-n\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}-\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x,$$

wo das Integral sich leicht unbestimmt entwickeln, und dann zwischen den Grenzen 0 und 1 nehmen lässt.

Ein dritter Weg ist folgender. Unter Anwendung der bekannten Formel

$$\frac{\partial l\Gamma(a)}{\partial a}=\int_0^1\left(\frac{1}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a-1}}{1-x}\right)\partial x$$

findet man leicht

$$s=\int_0^1\left(\frac{n}{l\frac{1}{x}}-\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\partial x.$$

oder, x^n statt x gesetzt,

$$s=\int_0^1\left(\frac{nx^{n-1}}{l\frac{1}{x}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x.$$

Zieht man von dieser Gleichung $\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=\int_0^1\left(\frac{n}{l\frac{1}{x}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x$ ab, so erhält man

$$s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-n\int_0^1\frac{1-x^{n-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x,$$

also eine von a unabhängige Grösse. Uebrigens ist das in dieser Gleichung vorkommende bestimmte Integral bekannt. Eine sehr einfache Entwickelung desselben ist folgende. Für $l\frac{1}{x}=z$ wird

$$\int_0^1\frac{1-x^{n-1}}{l\frac{1}{x}}\partial x=\int_0^\infty\frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z.$$

Digitized by Google

Dies Integral darf nicht in seine beiden Theile zerlegt werden, da jeder unendlich wird; integriren wir deshalb von $z=p$ bis $z=\infty$, wo $p>0$, und setzen

$$\int_p^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=\int_p^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}-\int_p^\infty \frac{e^{-nz}\partial z}{z}.$$

Nun geht das Integral $\int_p^\infty \frac{e^{-nz}\partial z}{z}$, wenn man z statt nz setzt, über in $\int_{np}^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}$, folglich wird

$$\int_p^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=\int_p^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}-\int_{np}^\infty \frac{e^{-z}\partial z}{z}=\int_p^{np} \frac{e^{-z}\partial z}{z}.$$

Was endlich das letzte Integral betrifft, so ist es nach einem bekannten Theorem gleich $M\int_p^{np}\frac{\partial z}{z}=Mln$, wo M einer der Werthe ist, welche die Function e^{-z} von $z=p$ bis $z=np$ erlangt. Da also M zwischen den Grenzen $\frac{1}{e^p}$, $\frac{1}{e^{np}}$ liegt, und diese sich derselben Grenze 1 nähern, wenn p gegen Null convergirt, so ist $M=1$ für $p=0$, folglich $\int_p^{np}\frac{e^{-z}\partial z}{z}=ln$ für $p=0$, d. i. nach dem Obigen

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-nz}}{z}\partial z=ln,$$

wie bekannt.

Ich habe mich über diesen Gegenstand hier nur deshalb so weit ausgelassen, um daran eine Bemerkung zu schliessen, die mich in diesem Aufsatze weiter beschäftigen soll.

Bei allen dreien im Vorhergehenden vorgezeichneten Verfahrungsweisen wurde der erste Ausdruck von s dadurch transformirt, dass man x^n statt x setzte, und in der That erreicht man seinen Zweck so auf die einfachste Art. Wird nämlich diese Transformation unterlassen, oder der erste Ausdruck von s unmittelbar angewandt, so ergiebt sich, man mag nun Dirichlet's oder Schlömilch's Weg, oder den meinigen betreten,

$$s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x,$$

und nun stellt sich die Aufgabe dar, zu zeigen, dass dies Integral eine von a unabhängige Grösse ist. Die Combination dieser Gleichung mit der obigen $s-\frac{\partial l\Gamma(na)}{\partial a}=-nln$ lehrt zwar, dass

$$(a)\ \ldots\ldots\ldots\int_0^1\left(\frac{x^{a-1}}{1-x^{\frac{1}{n}}}-\frac{nx^{na-1}}{1-x}\right)\partial x=nln$$

Digitized by Google

sein muss, aber die ganze vorhergehende Betrachtung hat zur nothwendigen Voraussetzung, dass n eine **positive ganze Zahl** ist, und die Gleichung (a) bedarf deshalb mit Rücksicht auf gebrochene n einer besondern Untersuchung. Zu dem Ende werde ich im Folgenden zwei Entwickelungen der Gleichung

$$(b) \quad \ldots\ldots \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln,$$

welche aus (a) durch die Substitution von x^n statt x hervorgeht, mittheilen, welche die Richtigkeit derselben für den Fall, dass a eine positive Grösse und n eine **positive**, aber **sonst beliebige** Zahl ist, verbürgen. Die in Rede stehende Gleichung ist übrigens bekannt, die Art ihrer Entwickelung mir aber nicht gegenwärtig. Leitet man sie nicht gewöhnlich nach einem, dem Obigen vielleicht ähnlichen Verfahren unter Zuziehung der Gammafunctionen ab?

Noch eine Bemerkung, bevor ich zum Beweise schreite. Die beiden Theile, in welche das Integral (b) zerlegt werden kann, nämlich

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x}\partial x, \int_0^1 \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\partial x,$$

sind so beschaffen, dass das erste Integral in das zweite übergeht, wenn x^n statt x gesetzt wird; allein man darf nicht schliessen, dass das Integral selbst verschwindet; ein solcher Schluss wäre nur zulässig, wenn das Integral $\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1-x}\partial x$ einen endlichen Werth hätte, was nicht der Fall ist. Ueberhaupt darf man, nach einer Bemerkung von **Dirichlet**, die beiden Theile des Integrals

$$\int_a^b \{f(x)-\varphi(x)\}\partial x, \text{ nämlich} \int_a^b f(x)\partial x, \int_a^b \varphi(x)\partial x,$$

nicht verschiedenen Transformationen unterwerfen, wenn einer derselben einen unendlichen oder unbestimmten Werth hat.

Erste Methode, das bestimmte Integral

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right)\partial x$$

zu entwickeln.

Der Werth von ω für $a=1$ ist leicht zu entdecken; es ist nämlich $\int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x = \frac{1}{2}l.\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)^2$, also

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right)\partial x = ln,$$

wo n **positiv** sein muss, damit x^n für $x=0$ verschwinde. Setzen wir nun

Digitized by Google

$$\omega_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{nx^{n-1}}{1-x^n}\right) \partial x = ln,$$

und untersuchen die Differenz

$$\omega_1 - \omega = \int_0^1 \left(\frac{1-x^{a-1}}{1-x} - n \cdot \frac{x^{n-1} - x^{na-1}}{1-x^n}\right) \partial x.$$

Zuvörderst lässt sich zeigen, dass $\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x} \partial x$ unter Voraussetzung, dass a positiv ist, einen endlichen Werth hat. Dies ist unmittelbar klar, wenn $a-1>0$, indem dann die Function $\frac{1-x^{a-1}}{1-x}$ für alle Werthe der Veränderlichen von 0 bis 1 endliche Werthe erlangt; allein für ein positives ächt gebrochenes a wird $\frac{1-x^{a-1}}{1-x} = -\infty$ für $x=0$, und dieses Falls wegen ist noch eine besondere Betrachtung nöthig. Es sei $a=\frac{p}{q}$, wo p, q positive ganze Zahlen bedeuten; wird dann $x=z^q$ gemacht, so kommt

$$\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x} \partial x = q \int_0^1 \frac{z^{q-1} - z^{p-1}}{1-z^q} \partial z.$$

Nun ist $q-1 \overline{\gtrless} 0$, $p-1 \overline{\gtrless} 0$, die Function $\frac{z^{q-1}-z^{p-1}}{1-z^q}$ erlangt also nicht nur für alle von Null verschiedenen Werthe des z, sondern auch für $z=0$ selbst, endliche Werthe, und $\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x} \partial x$ hat mithin einen bestimmten e n d l i c h e n Werth Θ. Macht man jetzt $x=z^n$, so wird $\int_0^1 n \cdot \frac{z^{n-1} - z^{na-1}}{1-z^n} \partial z$, da n positiv ist; also

$$\int_0^1 \frac{1-x^{a-1}}{1-x} \partial x = \Theta, \int_0^1 n \cdot \frac{x^{n-1} - x^{na-1}}{1-x^n} \partial x = \Theta;$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1-x^{a-1}}{1-x} - n \cdot \frac{x^{n-1} - x^{na-1}}{1-x^n}\right) \partial x = \Theta - \Theta = 0;$$

d. i. $\omega_1 - \omega = 0$. Nach dem obigen Werthe von ω_1 ist folglich

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right) \partial x = ln$$

$$(a>0,\ n>0).$$

Zweite Methode.

Differenzirt man die Gleichung

$$\omega = \int_0^1 \left(\frac{x^{a-1}}{1-x} - \frac{nx^{na-1}}{1-x^n}\right) \partial x$$

Digitized by Google

auf bekannte Weise nach n, so erhält man

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = -\int_0^1 \frac{x^{na-1}\partial x}{(1-x^n)^2} \{1 - x^n + nlx\{a(1-x^n) + x^n\}\},$$

oder, $x^n = z$ gesetzt,

$$\frac{\partial\omega}{\partial n} = -\frac{1}{n}\int_0^1 \frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz) + zlz],$$

wo wegen der gemachten Substitution n positiv sein muss. Bei aufmerksamer Betrachtung des Bildungsgesetzes der Function unter dem Integralzeichen erkennt man bald, dass das complicirt aussehende Integral sich auf folgende Weise unbestimmt entwickeln lässt. Bezeichnet man es einstweilen durch J, und setzt $z^a lz = u$, so kommt $z^{a-1}(1 + alz)\partial z = \partial u$, folglich

$$J = \int \frac{(1-z)\partial u + u\partial z}{(1-z)^2} = \frac{u}{1-z},$$

oder, für u seinen Werth gesetzt,

$$\int \frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz) + zlz] = \frac{z^a lz}{1-z}.$$

Für $z=0$ verschwindet die Function $\frac{z^a lz}{1-z}$ unter Voraussetzung, dass a positiv ist, wie man leicht findet; für $z=1$ wird dieselbe gleich -1, wie man durch Differentiation von Zähler und Nenner findet; also ist

$$\int_0^1 \frac{z^{a-1}\partial z}{(1-z)^2}[(1-z)(1+alz) + zlz] = -1\ (a > 0),$$

folglich $\frac{\partial\omega}{\partial n} = \frac{1}{n}$, $\omega = ln + \text{Const.}$ Da aber die Constante verschwinden muss, indem ω für $n=1$ verschwindet, so kommt $\omega = ln$, wie vorher.

XXVIII.

Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Stereometrie.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

Herr Fabriken-Kommissionsrath Brix in Berlin hat das Verdienst, in der neuen Ausgabe des, verschiedene arithmetische und geometrische Lehren enthaltenden, Anhangs zu seinem ausgezeichneten Elementar-Lehrbuche der dynamischen Wissenschaften (S. 130.—S. 148.) zuerst einen allgemeinen stereometrischen Lehrsatz zur Sprache gebracht zu haben, mittelst dessen sich die Inhaltsbestimmung einer grossen Anzahl von Körpern, namentlich aller derjenigen, welche in der elementaren Stereometrie betrachtet zu werden pflegen, und solcher, die durch Umdrehung der Kegelschnitte entstehen, mit aller zu wünschenden Leichtigkeit ausführen lässt. Dieser Satz hat bisher, wie es wenigstens scheint, nicht die Beachtung gefunden, welche er jedenfalls in hohem Grade verdient. Nur erst in diesem Augenblicke fällt mir eine so eben erschienene kleine Schrift: „Ueber die Inhaltsberechnung der Körper nach einer *einzigen* Formel. Mit besonderer Rücksicht für die Praxis bearbeitet von W. Ligowsky, Feuerwerker in der 7ten Artillerie-Brigade. Berlin. 1847.“ in die Hände, in welcher dieser sehr bemerkenswerthe Satz von Neuem zur Sprache gebracht wird, und da Herr Ligowsky in der Vorrede sagt, „dass die Aufmunterung, welche ihm zur Bearbeitung dieses Gegenstandes Seitens seiner Hohen Gönner zu Theil geworden sei, die erste Veranlassung zur Herausgabe der vorher genannten kleinen Schrift gegeben habe“; so scheint das allgemeine Gesetz, um welches es sich hier handelt, und namentlich seine nach meiner Ueberzeugung grosse Bedeutung für das praktische Bedürfniss, wenigstens in Berlin, höheren Orts Aufmerksamkeit erregt zu haben, und Herr Ligowsky, um den Satz, wie er allerdings gar sehr verdient, allgemeiner in die Praxis einzuführen, zur Bearbeitung und Herausgabe seiner Schrift veranlasst worden zu sein. Nun

ist aber zu bemerken, dass die Schrift des Herrn Ligowsky, welche jedenfalls das Product eines Anfängers ist und namentlich in Rücksicht auf mathematische Strenge sehr Vieles zu wünschen übrig lässt, dem, was Herr Brix a. a. O. schon gegeben hat, nichts wesentlich Neues, was wenigstens der Beachtung einigermassen werth wäre, hinzufügt, und dass Letzterem jedenfalls das von Herrn Ligowsky in der Vorrede zu seiner Schrift nicht so deutlich und bestimmt, wie es erforderlich gewesen wäre *), hervorgehobene Verdienst bleibt, den Satz zuerst aufgestellt und seine Bedeutung für die Praxis durch eine ziemlich grosse Anzahl von Beispielen, denen Herr Ligowsky auch nicht eben etwas Neues von einiger Bedeutung hinzugefügt hat, zuerst nachgewiesen zu haben.

So sehr und so gern ich nun aber, namentlich bei den freundschaftlichen Beziehungen, in denen ich schon seit einer langen Reihe von Jahren zu Herrn Brix zu stehen die Ehre habe, dessen grosses Verdienst rücksichtlich des fraglichen Gegenstandes anzuerkennen bereit bin, so muss ich doch bemerken, dass Herr Brix den Satz nicht eigentlich allgemein bewiesen hat, und dass derselbe a. a. O., wenn auch nicht ganz, doch gewissermassen nur als das Resultat einer Induction erscheint, was auch wohl zum Theil der Grund gewesen sein mag, dass der Satz bis jetzt, wie es wenigstens scheint, wenig Eingang gefunden, und sich noch nicht Bahn in die Lehrbücher gebrochen hat. Auch scheint mir Herr Brix den Satz noch nicht auf seinen wahren Ausdruck zurückgeführt und die eigentlichen Bedingungen, unter denen er allein gültig ist, nachgewiesen zu haben, was mir nothwendig zu sein scheint, wenn der wahre Werth und die wahre Bedeutung desselben sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Beziehung gehörig hervorgehoben und in's Licht gestellt werden soll. Ich werde mir daher erlauben, diesen der Aufmerksamkeit gewiss sehr werthen Gegenstand in der vorliegenden Abhandlung einer ganz neuen Untersuchung zu unterwerfen, und in jeder Beziehung in sein gehöriges Licht zu stellen, namentlich auch den Satz auf seinen wahren Ausdruck zu bringen und die eigentliche Bedingung seiner Gültigkeit nachzuweisen suchen. Dabei wird sich dann auch zugleich, wie ich wenigstens hoffe, zeigen, was der eigentliche Grund der allerdings grossen Genauigkeit ist, welche die Formel von Chapman in den meisten Fällen bei der annähernden Bestimmung der körperlichen Räume gewährt, indem die gewöhnlichen Entwickelungen dieser bemerkenswerthen Formel mir überhaupt Vieles zu wünschen übrig zu lassen, und einen recht deutlichen Blick in das eigentliche Wesen derselben nicht zu gewähren scheinen, worin doch am Ende der wahre Werth einer jeden mathematischen Demonstration liegt. Zuerst werde ich mich bei der Darstellung der Integralrechnung bedienen, dann aber auch, was mir hier von besonderer Bedeutung zu sein scheint, zeigen, dass ein ganz elementarer Weg fast eben so leicht und eben so

*) Herr Ligowsky erinnert eigentlich nur an die längst bekannte Näherungsformel zur Inhaltsbestimmung der Körper von Chapman, und sagt, dass er dieselbe in den der Mechanik gewidmeten Werken von Eytelwein, Poncelet und Brix wiedergefunden habe.

Digitized by Google

schnell zum Ziele führt, und hoffe mich nicht zu täuschen, wenn ich mir hier zum Schluss noch die Ueberzeugung auszusprechen erlaube, dass dieser ganze Gegenstand in der ihm hier gegebenen Gestalt, oder wenigstens in einer ähnlichen, sich fernerhin gewiss in den Elementar-Unterricht der Stereometrie, namentlich auf allen mehr eine praktische oder technische Richtung verfolgenden Lehranstalten — für welche die Sache vorzugsweise von Bedeutung sein dürfte, und denen ich dieselbe daher auch besonders empfehle, — und in die Elementar-Lehrbücher dieser Wissenschaft, allgemein Bahn brechen wird, was ich wenigstens wünschen möchte.

I.

Wir wollen uns einen von einer ganz beliebigen Fläche umschlossenen Körper denken, und annehmen, dass die Flächenräume aller in einer gewissen Lage geführten, einander parallelen Queerschnitte desselben ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer normalen Entfernungen von einem gewissen bestimmten Punkte, den wir überhaupt den Pol nennen wollen, sind, wobei alle von diesem Pole aus nach der einen Seite hin liegenden Entfernungen als positiv, alle nach der entgegengesetzten Seite hin liegenden Entfernungen als negativ betrachtet, mit Rücksicht hierauf aber im Allgemeinen durch x bezeichnet werden sollen. Bezeichnen wir dann den Flächenraum des der Entfernung x von dem Pole entsprechenden Queerschnitts überhaupt durch F_x, und denken uns zwei bestimmte positive oder negative Werthe a und b von x, wobei jedoch angenommen werden soll, dass $a < b$ sei, so ist das Volumen des zwischen diesen beiden Queerschnitten enthaltenen Theils unsers Körpers, welches wir durch V bezeichnen wollen, offenbar die Gränze, der sich, indem wir n eine positive ganze Zahl bedeuten lassen, und der Kürze wegen

$$\frac{b-a}{n}=i$$

setzen, wo i unter der vorher gemachten Voraussetzung eine positive Grösse ist, die Grösse

$$i\{F_a+F_{a+i}+F_{a+2i}+F_{a+3i}+\ldots+F_{a+(n-1)i}\},$$

oder auch die Grösse

$$i\{F_{a+i}+F_{a+2i}+F_{a+3i}+F_{a+4i}+\ldots+F_{a+ni}\},$$

bis zu jedem beliebigen Grade nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, was sich so leicht und ganz von selbst aus den elementarsten Sätzen der Stereometrie von dem Inhalte des Prismas oder des Cylinders ergiebt, dass wir weitere Erläuterungen darüber an diesem Orte für völlig überflüssig halten. Bezeichnen wir also die in Rede stehenden Gränzen in der Kürze durch das den obigen Ausdrücken vorgesetzte Lim., so erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden Gleichungen:

Digitized by Google

1) $V = \text{Lim}.i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+(n-1)i}\}$

und

2) $V = \text{Lim}.i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + F_{a+4i} + \ldots + F_{a+ni}\}$,

welche die Grundlage alles Folgenden bilden.

II.

Nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen *) ist nun aber

$$\int_a^b F_x \partial x$$

$$= \text{Lim}.i\{F_a + F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\}$$
$$= \text{Lim}.iF_a + \text{Lim}.i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

d. i., weil, da F_a eine bestimmte endliche Grösse ist, i sich aber bis zu einem jeden beliebigen Grade der Null nähert, wenn man n in's Unendliche wachsen lässt, offenbar

$$\text{Lim}.iF_a = 0$$

ist,

$$\int_a^b F_x \partial x$$

$$= \text{Lim}.i\{F_{a+i} + F_{a+2i} + F_{a+3i} + \ldots + F_{a+ni}\},$$

also nach der Gleichung 2):

$$3)\quad V = \int_a^b F_x \partial x.$$

Weil nun aber F_x eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von x sein soll, so kann, indem A, B, C Constanten bezeichnen, im Allgemeinen

$$4)\quad F_x = A + Bx + Cx^2$$

gesetzt werden, und es ist folglich

$$\int F_x \partial x = Ax + \tfrac{1}{2}Bx^2 + \tfrac{1}{3}Cx^3 + \text{Const},$$

also

$$\int_a^b F_x \partial x = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3),$$

folglich nach dem Obigen

*) Archiv. Thl. II. S. 275.

Digitized by Google

$$5) \quad V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3),$$

oder

$$6) \quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b) + \tfrac{1}{3}C(a^2+ab+b^2)\}.$$

III.

Zu dem Beweise der vorhergehenden Gleichung 6) bedarf man aber in der That der Integralrechnung gar nicht, sondern kann zu derselben leicht und mit völliger Strenge durch das folgende ganz elementare Verfahren gelangen.

Einen beliebigen Werth der Entfernung x bezeichne man durch α, setze, indem n eine positive ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{\alpha}{n} = i,$$

und bezeichne das Volumen des zwischen den Queerschnitten F_0 und F_α enthaltenen Körpers durch $\mathfrak{V}$, so ist offenbar, indem man in den folgenden Gleichungen das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse α positiv oder negativ ist,

$$\mathfrak{V} = \text{Lim.} \pm i\{F_i + F_{2i} + F_{3i} + F_{4i} + \ldots + F_{ni}\},$$

oder, was Dasselbe ist,

$$\pm\mathfrak{V} = \text{Lim.}\, i\{F_i + F_{2i} + F_{3i} + F_{4i} + \ldots + F_{ni}\}.$$

Weil nun aber nach der Voraussetzung im Allgemeinen

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} i\{F_i + F_{2i} + F_{3i} + F_{4i} + \ldots + F_{ni}\} \\ = Ai + Bi^2 + Ci^3 \\ + Ai + 2Bi^2 + 2^2Ci^3 \\ + Ai + 3Bi^2 + 3^2Ci^3 \\ + Ai + 4Bi^2 + 4^2Ci^3 \\ \text{u. s. w.} \\ + Ai + nBi^2 + n^2Ci^3 \\ = nAi + (1+2+3+4+\ldots+n)Bi^2 \\ + (1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2)Ci^3, \end{aligned}$$

also, nach bekannten Elementarsätzen von der Summirung der Reihen *):

---

*) Die Summenformel für die Quadrate der natürlichen Zahlen findet man bekanntlich sehr einfach auf folgende Art.

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots+F_{ni}\}$$
$$=nAi+\tfrac{1}{2}n(n+1)Bi^2+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)Ci^3.$$

Weil aber nach dem Obigen

$$i=\frac{\alpha}{n},\ ni=\alpha$$

ist, so ist

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots+F_{ni}\}$$
$$=nA.\frac{\alpha}{n}+\tfrac{1}{2}n(n+1)B.\frac{\alpha^2}{n^2}+\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)C.\frac{\alpha^3}{n^3},$$

d. i.

$$i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots+F_{ni}\}$$
$$=A\alpha+\tfrac{1}{2}(1+\frac{1}{n})B\alpha^2+\tfrac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})C\alpha^3.$$

Lässt man nun in dieser Gleichung n in's Unendliche wachsen und geht auf beiden Seiten derselben zu den Gränzen über,

---

Es ist

$$(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1,$$
$$n^3=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1,$$
$$(n-1)^3=(n-2)^3+3(n-2)^2+3(n-2)+1,$$
u. s. w.
$$2^3=1^3+3.1^2+3.1+1;$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$(n+1)^3=n+1+3Sn+3Sn^2,$$

und folglich, weil bekanntlich

$$Sn=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

ist,

$$(n+1)^3=\tfrac{1}{2}(n+1)(3n+2)+3Sn^2,$$

also

$$6Sn^2=2(n+1)^3-(n+1)(3n+2)$$
$$=(n+1)\{2(n+1)^2-(3n+2)\}$$
$$=(n+1)(2n^2+4n+2-3n-2)$$
$$=n(n+1)(2n+1),$$

woraus sogleich

$$Sn^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

folgt.

Digitized by Google

so erhält man auf der Stelle und durch die einfachsten, hier keiner weiteren Erläuterung bedürfenden Schlüsse die Gleichung

$$\text{Lim}\,.\,i\{F_i+F_{2i}+F_{3i}+F_{4i}+\ldots+F_{ni}\}$$
$$=A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3,$$

also nach dem Obigen

$$\pm\mathfrak{V}=A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3$$

oder

$$7)\quad \mathfrak{V}=\pm(A\alpha+\tfrac{1}{2}B\alpha^2+\tfrac{1}{3}C\alpha^3),$$

wo man immer das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem α positiv oder negativ ist.

Wenn jetzt a und b zwei beliebige Werthe von x sind und $a<b$ ist, so wollen wir die Volumina der zwischen den Querschnitten F_0 und F_a, F_0 und F_b, F_a und F_b enthaltenen Körper respective durch V', V'' und V bezeichnen.

Sind dann zuerst a und b beide positiv, so ist offenbar

$$V=V''-V',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$V'=Aa+\tfrac{1}{2}Ba^2+\tfrac{1}{3}Ca^3,$$
$$V''=Ab+\tfrac{1}{2}Bb^2+\tfrac{1}{3}Cb^3;$$

Will man die Formel

$$Sn=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

nicht als bekannt voraussetzen, so kann man auf folgende Art verfahren.

Es ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet, allgemein

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=n^2,$$

also

$$\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)=n^2,$$
$$\tfrac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)=(n-1)^2,$$
$$\tfrac{1}{6}(n-2)(n-1)(2n-3)-\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5)=(n-2)^2,$$
$$\tfrac{1}{6}(n-3)(n-2)(2n-5)-\tfrac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)=(n-3)^2,$$

u. s. w.

$$\tfrac{1}{6}.2.3.(2.2+1)-\tfrac{1}{6}.1.2.(2.1+1)=2^2,$$
$$\tfrac{1}{6}.1.2.(2.1+1)\qquad\qquad=1^2;$$

also, wenn man addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=Sn^2=\tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

wie vorher.

Digitized by Google

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3).$$

Sind ferner a und b beide negativ, so ist offenbar, weil der absolute Werth von a grösser als der absolute Werth von b ist,

$$V = V' - V'',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$V' = -Aa - \tfrac{1}{2}Ba^2 - \tfrac{1}{3}Ca^3,$$
$$V'' = -Ab - \tfrac{1}{2}Bb^2 - \tfrac{1}{3}Cb^3;$$

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3).$$

Ist ferner a negativ und b positiv, so ist offenbar

$$V = V' + V'',$$

und nach der Gleichung 7) ist

$$V' = -Aa - \tfrac{1}{2}Ba^2 - \tfrac{1}{3}Ca^3,$$
$$V'' = \quad Ab + \tfrac{1}{2}Bb^2 + \tfrac{1}{3}Cb^3;$$

also

$$V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3).$$

Da nun unter den gemachten Voraussetzungen ausser den so eben betrachteten drei Fällen ein anderer Fall nicht weiter vorkommen kann, so ist völlig allgemein

$$8) \quad V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2 - a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3 - a^3)$$

oder

$$9) \quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b) + \tfrac{1}{3}C(a^2 + ab + b^2)\},$$

welche Gleichungen mit den in II. gefundenen Gleichungen 5) und 6) völlig übereinstimmen, hier aber ganz elementar bewiesen sind; und ich zweifle durchaus nicht, dass dieser Beweis wegen seiner Leichtigkeit und Einfachheit zur Aufnahme in die Elemente ganz geeignet ist.

IV.

Die drei in der Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

vorkommenden Constanten A, B, C kann man nun jederzeit bestimmen, wenn man für drei beliebige, aber bestimmte Werthe α, β, γ der Entfernung x die entsprechenden Werthe F_α, F_β, F_γ des Flächeninhalts des Queerschnitts F_x kennt, indem man näm-

Digitized by Google

lich zur Bestimmung der drei in Rede stehenden Constanten die drei folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$F_\alpha = A + B\alpha + C\alpha^2,$$
$$F_\beta = A + B\beta + C\beta^2,$$
$$F_\gamma = A + B\gamma + C\gamma^2$$

hat. Löst man aber diese drei Gleichungen nach den gewöhnlichen Regeln der Algebra in Bezug auf A, B, C als unbekannte Grössen auf, so erhält man nach leichter Rechnung für A, B, C die folgenden Werthe:

$$10)\quad \begin{cases} A = -\dfrac{\beta\gamma(\beta-\gamma)F_\alpha + \gamma\alpha(\gamma-\alpha)F_\beta + \alpha\beta(\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}, \\[2ex] B = \dfrac{(\beta^2-\gamma^2)F_\alpha + (\gamma^2-\alpha^2)F_\beta + (\alpha^2-\beta^2)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}, \\[2ex] C = -\dfrac{(\beta-\gamma)F_\alpha + (\gamma-\alpha)F_\beta + (\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}; \end{cases}$$

oder, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$10^*)\quad \begin{cases} A = \dfrac{\beta\gamma F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\alpha\gamma F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \\[2ex] B = -\dfrac{(\beta+\gamma)F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \dfrac{(\alpha+\gamma)F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} - \dfrac{(\alpha+\beta)F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}, \\[2ex] C = \dfrac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}. \end{cases}$$

Führen wir diese Ausdrücke von A, B, C in den Ausdruck 9) von V ein, so erhalten wir:

$$11)\quad \frac{V}{b-a} =$$
$$\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\{\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$+\frac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}\{\alpha\gamma - \tfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$+\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\{\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$

oder

$$11^*)\quad \frac{V}{b-a} =$$
$$-\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}\{\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$-\frac{F_\beta}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)}\{\gamma\alpha - \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}$$
$$-\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)}\{\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\}.$$

Digitized by Google

Mittelst dieser Formel lässt sich also der Inhalt V des zwischen den beiden Queerschnitten F_a und F_b enthaltenen Körpers aus den Entfernungen a und b, und drei den ganz beliebigen Entfernungen α, β, γ entsprechenden Queerschnitten F_α, F_β, F_γ berechnen, natürlich immer unter der Voraussetzung, dass die Queerschnitte der durch die Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

ausgedrückten Bedingung entsprechen.

Den Entfernungen α, β, γ kann man alle ganz beliebigen Werthe beilegen. Wir können also z. B., um einen ganz speciellen Fall der vorhergehenden allgemeinen Formel zu betrachten,

$$\alpha = a, \ \beta = \tfrac{1}{2}(a+b), \ \gamma = b$$

setzen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta &= a - \tfrac{1}{2}(a+b) = -\tfrac{1}{2}(b-a),\\
\beta - \gamma &= \tfrac{1}{2}(a+b) - b = -\tfrac{1}{2}(b-a),\\
\gamma - \alpha &= b - a;
\end{aligned}$$

so wie

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= a + \tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(3a+b),\\
\beta + \gamma &= \tfrac{1}{2}(a+b) + b = \tfrac{1}{2}(a+3b),\\
\gamma + \alpha &= b + a;
\end{aligned}$$

und wir erhalten ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}
\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\beta+\gamma)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) &= \tfrac{1}{12}(b-a)^2,\\
\gamma\alpha - \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) &= -\tfrac{1}{6}(b-a)^2,\\
\alpha\beta - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)(a+b) + \tfrac{1}{3}(a^2+ab+b^2) &= \tfrac{1}{12}(b-a)^2.
\end{aligned}$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung 11) ein, so erhält man

$$12) \quad V = \tfrac{1}{6}(b-a)\{F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b\}$$

oder

$$13) \quad V = \tfrac{1}{3}(b-a)\{2F_{\frac{1}{2}(a+b)} + \tfrac{1}{2}(F_a + F_b)\},$$

und kann die in diesen Gleichungen enthaltenen Sätze auf folgende Art aussprechen:

Wenn die Flächenräume der parallelen Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen von einem bestimmten Punkte als Pol sind, so wird der körperliche Inhalt eines jeden zwischen zwei parallelen Queerschnitten als seinen Endflächen liegenden Theils eines solchen Körpers erhalten, wenn man zu der Summe der Flächenräume der beiden Endflächen das Vierfache des Flächen-

Digitized by Google

raums des zwischen den beiden Endflächen in der Mitte liegenden Queerschnitts addirt, und die Summe mit dem sechsten Theile der Entfernung der beiden Endflächen von einander multiplicirt;

oder:

Wenn die Flächenräume der parallelen Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des zweiten Grades ihrer gehörig als positiv oder als negativ betrachteten Entfernungen von einem bestimmten Punkte als Pol sind, so wird der körperliche Inhalt eines jeden zwischen zwei parallelen Queerschnitten als seinen Endflächen liegenden Theils eines solchen Körpers erhalten, wenn man zu dem arithmetischen Mittel zwischen den Flächenräumen der beiden Endflächen das Doppelte des Flächenraums des zwischen den beiden Endflächen in der Mitte liegenden Queerschnitts addirt und die Summe mit dem dritten Theile der Entfernung der beiden Endflächen von einander multiplicirt.

Man hat aber nicht zu übersehen, dass diese Sätze, denen es auch noch besonders zur Empfehlung gereichen dürfte, dass sie sich sehr leicht dem Gedächtnisse einprägen lassen, nur ganz specielle Fälle des in der Formel 11) oder 11*), mittelst welcher sich der Inhalt eines jeden solchen Körpers wie der im Vorhergehenden betrachteten aus drei beliebigen seiner parallelen Queerschnitte berechnen lässt, enthaltenen allgemeinen Satzes sind.

V.

Die Anwendung der vorhergehenden Sätze durch Beispiele zu erläutern, dürfte an diesem Orte fast als überflüssig erscheinen, indem ein Jeder gewiss sogleich übersieht, dass die in der elementaren Stereometrie vorkommenden und die durch Umdrehung der Kegelschnitte erzeugten Körper fast alle in die im Vorhergehenden betrachtete Kategorie gehören. Jedoch mag darüber Folgendes bemerkt werden.

1. Haben wir z. B. eine Pyramide, so ist nach einem bekannten stereometrischen Elementarsatze in Bezug auf die Spitze der Pyramide als Pol

$$F_x = Cx^2,$$

wo C eine Constante bezeichnet, indem nämlich bekanntlich die einander parallelen Queerschnitte den Quadraten ihrer Entfernungen von der Spitze der Pyramide gerade proportional sind. Also haben wir in diesem Falle die folgenden Gleichungen:

$$F_a = Ca^2,$$
$$F_b = Cb^2,$$
$$F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \tfrac{1}{4}C(a+b)^2.$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt

Digitized by Google

$$F_a . F_b = C^2 a^2 b^2, \; \sqrt{F_a . F_b} = Cab;$$

und aus der dritten Gleichung ergiebt sich also

$$\begin{aligned} 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} &= Ca^2 + Cb^2 + 2Cab \\ &= F_a + F_b + 2\sqrt{F_a . F_b}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b = 2(F_a + \sqrt{F_a . F_b} + F_b);$$

also nach der Formel 12):

$$14) \quad V = \tfrac{1}{3}(b-a)(F_a + \sqrt{F_a . F_b} + F_b),$$

oder wenn die beiden Grundflächen und die Höhe einer sogenannten abgekürzten oder abgestumpften Pyramide respective durch f, f' und h bezeichnet werden, der körperliche Inhalt V einer solchen Pyramide:

$$15) \quad V = \tfrac{1}{3}h(f + \sqrt{ff'} + f'),$$

welches die aus der elementaren Stereometrie bekannte Formel ist.

Wie man von der Pyramide zum Prisma, zum Kegel und Cylinder übergehen kann, ist aus den Elementen der Stereometrie bekannt.

2. Für die Ellipse und Hyperbel ist bekanntlich, wenn m und n die beiden Halbaxen bezeichnen, die Gleichung

$$y^2 = \pm \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2),$$

wo das obere Zeichen der Ellipse, das untere der Hyperbel entspricht. Weil nun für das durch Umdrehung der Ellipse oder Hyperbel um die Axe m entstandene Ellipsoid oder Hyperboloid offenbar

$$F_x = \pi y^2$$

ist, so gilt in diesem Falle, wenn A und C Constanten bezeichnen, die Gleichung

$$F_x = A + Cx^2.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} F_a &= A + Ca^2, \\ F_b &= A + Cb^2, \\ F_{\frac{1}{2}(a+b)} &= A + \tfrac{1}{4}C(a+b)^2; \end{aligned}$$

folglich

Digitized by Google

$$A=\frac{a^2F_b-b^2F_a}{a^2-b^2},\quad C=\frac{F_a-F_b}{a^2-b^2};$$

und daher

$$4F_{\frac{1}{2}(a+b)}=\frac{(a+b)^2(F_a-F_b)+4(a^2F_b-b^2F_a)}{a^2-b^2},$$

also

$$F_a+4F_{\frac{1}{2}(a+b)}+F_b$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(F_a+F_b)+(a+b)^2(F_a-F_b)+4(a^2F_b-b^2F_a)}{a^2-b^2},$$

woraus sich ferner leicht

$$F_a+4F_{\frac{1}{2}(a+b)}+F_b$$
$$=\frac{(2a^2-4b^2+2ab)F_a-(2b^2-4a^2+2ab)F_b}{a^2-b^2}$$

oder

$$F_a+4F_{\frac{1}{2}(a+b)}+F_b$$
$$=2\,\frac{(a^2-2b^2+ab)F_a-(b^2-2a^2+ab)F_b}{a^2-b^2}$$

ergiebt. Folglich ist nach 12)

$$16)\quad V=-\frac{(a^2-2b^2+ab)F_a-(b^2-2a^2+ab)F_b}{3(a+b)}.$$

Nun ist aber, indem immer das obere Zeichen dem Ellipsoid, das untere Zeichen dem Hyperboloid entspricht:

$$F_a=\pm\pi\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

$$F_b=\pm\pi\frac{n^2}{m^2}(m^2-b^2);$$

also nach dem Vorhergehenden

$$V=\mp\frac{\pi n^2}{3m^2}\cdot\frac{(m^2-a^2)(a^2-2b^2+ab)-(m^2-b^2)(b^2-2a^2+ab)}{a+b},$$

und folglich, wie sich hieraus leicht ergiebt:

$$V=\mp\frac{\pi n^2}{3m^2}\cdot\frac{3m^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)-ab(a^2-b^2)}{a+b},$$

d. i.

$$17)\quad V=\mp\frac{\pi n^2}{3m^2}(a-b)\{3m^2-(a^2+ab+b^2)\}$$

Digitized by Google

oder

$$18)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-(a^2+ab+b^2)\}.$$

Auch ist

$$2ab=a^2+b^2-(b-a)^2,$$

und folglich

$$a^2+ab+b^2=\tfrac{1}{2}\{3(a^2+b^2)-(b-a)^2\},$$

also

$$19)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{3m^2-\tfrac{3}{2}(a^2+b^2)+\tfrac{1}{2}(b-a)^2\}.$$

Setzen wir aber

$$\alpha^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

$$\beta^2=\pm\frac{n^2}{m^2}(m^2-b^2);$$

so ist

$$a^2+b^2=2m^2\mp\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2),$$

also

$$V=\pm\frac{\pi n^2}{3m^2}(b-a)\{\tfrac{1}{2}(b-a)^2\pm\frac{3m^2}{2n^2}(\alpha^2+\beta^2)\},$$

d. i.

$$20)\quad V=\pm\frac{\pi n^2}{6m^2}(b-a)\{(b-a)^2\pm 3\frac{m^2}{n^2}(\alpha^2+\beta^2)\}.$$

Für die Kugel ist $m=n$ zu setzen und in der vorhergehenden Gleichung das obere Zeichen zu nehmen; also

$$21)\quad V=\tfrac{1}{6}\pi(b-a)\{(b-a)^2+3(\alpha^2+\beta^2)\},$$

eine aus den Elementen der Stereometrie hinreichend bekannte Formel.

3. Die Gleichung der Parabel ist bekanntlich

$$y^2=px,$$

wo p den Parameter bezeichnet; also ist für das durch Umdrehung der Parabel um ihre Axe entstandene Paraboloid in Bezug auf den Scheitel als Pol offenbar

$$F_x=Bx,$$

wo B eine Constante bezeichnet. Daher ist

Digitized by Google

$$F_a = Ba,$$
$$F_b = Bb,$$
$$F_{\frac{1}{2}(a+b)} = \tfrac{1}{2}B(a+b);$$

und folglich

$$F_a + 4F_{\frac{1}{2}(a+b)} + F_b = 3B(a+b).$$

Also ist nach 12)

$$V = \tfrac{1}{2}B(b-a)(b+a) = \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2).$$

Nun ist aber nach dem Obigen

$$F_x = \pi y^2 = \pi px = Bx,$$

also $B = \pi p$, und folglich

$$22)\quad V = \tfrac{1}{2}\pi p(b^2-a^2).$$

Setzt man

$$\alpha^2 = pa,\ \beta^2 = pb;$$

so ist

$$a+b = \frac{1}{p}(\alpha^2+\beta^2),$$

und folglich nach dem Vorhergehenden offenbar auch

$$23)\quad V = \tfrac{1}{2}\pi(b-a)(\alpha^2+\beta^2),$$

wo $b-a$ die Höhe des parabolischen Körpers von dem Inhalte V ist.

4. Uebrigens scheint mir hier der schicklichste Ort zu sein, zu bemerken, dass, wenn die Queerschnitte eines Körpers wie im vorhergehenden Beispiele bei dem Paraboloid bloss ganze rationale algebraische Functionen des ersten Grades ihrer Entfernungen von einem gewissen Pole sind, so dass im Allgemeinen

$$F_x = A + Bx$$

ist, dann schon zwei Queerschnitte im Allgemeinen zur Inhaltsbestimmung hinreichen. Auf ganz ähnliche Art wie oben, unter Anwendung ganz analoger Bezeichnungen, erhält man nämlich in diesem Falle

$$24)\quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b)\}.$$

Für zwei den Entfernungen α, β entsprechende Queerschnitte F_α, F_β hat man aber die Gleichungen

$$F_\alpha = A + B\alpha,$$
$$F_\beta = A + B\beta;$$

aus denen sich sogleich

Digitized by Google

$$A = -\frac{\beta F_\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha F_\beta}{\beta-\alpha},$$

$$B = \frac{F_\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{F_\beta}{\beta-\alpha}$$

ergiebt. Folglich ist nach 24):

$$25) \quad \frac{V}{b-a} = -\frac{F_\alpha}{\alpha-\beta}\{\beta - \tfrac{1}{2}(a+b)\}$$
$$-\frac{F_\beta}{\beta-\alpha}\{\alpha - \tfrac{1}{2}(a+b)\}.$$

Setzt man $\alpha = a$, $\beta = b$; so ist

$$\beta - \tfrac{1}{2}(a+b) = \tfrac{1}{2}(b-a),$$
$$\alpha - \tfrac{1}{2}(a+b) = -\tfrac{1}{2}(b-a);$$

folglich nach 25):

$$26) \quad V = \tfrac{1}{2}(b-a)(F_a + F_b).$$

Dass bei dem Paraboloid diese Formel auf der Stelle zu dem Ausdrucke 23) führt, fällt sogleich in die Augen.

Wären die Queerschnitte constante Grössen, und folglich im Allgemeinen

$$F_x = A,$$

so weiss man aus der Lehre vom Prisma, dass schon **ein** Queerschnitt zur Inhaltsbestimmung hinreicht, indem das Product desselben in die Höhe des Körpers bekanntlich dessen Inhalt giebt.

5. Die einander entsprechenden Winkel aller parallelen Queerschnitte eines Obelisken *) sind offenbar sämmtlich einander gleich, und die Winkel der einzelnen Queerschnitte können daher für jeden Obelisken als constante Grössen betrachtet werden

Sei nun x die Entfernung eines Queerschnitts F_x des Obelisken von derjenigen seiner beiden Endflächen, welche die kleineren Seiten hat, und h sei die Höhe des Obelisken. Ferner seien m' und m'' zwei einander parallele Seiten der beiden Endflächen des Obelisken, so dass $m' < m''$ ist, und m sei die denselben parallele Seite des Queerschnitts F_x; so erhellet mittelst einer sehr einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle die Richtigkeit der Proportion

$$m'' - m' : m - m' = h : x,$$

aus welcher ferner sogleich

$$m = m' + \frac{m'' - m'}{h} x$$

*) Archiv. Thl. IX. S. 83.

folgt. Weil nun h, m', m'' für jeden Obelisken als constante Grössen zu betrachten sind, so ist m, und eben so natürlich auch jede andere Seite des Queerschnitts F_x, eine ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von x. Aus der bekannten allgemeinen polygonometrischen Formel für den Inhalt jeder geradlinigen Figur geht aber hervor, dass der Flächeninhalt F_x alle Seiten der entsprechenden Figur nur in der zweiten Dimension enthält, d. h. bloss von den Producten dieser Seiten, zu je zweien mit einander verbunden, abhängt, wobei man die schon vorher gemachte Bemerkung, dass hier die Winkel der Figur als constante Grössen zu betrachten sind, nicht zu übersehen hat. Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich auf ganz unzweideutige Weise, dass im vorliegenden Falle F_x eine ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von x ist *), und dass folglich der in IV. bewiesene allgemeine Satz auch auf Obelisken Anwendung findet.

Sind also F, F', F'' respective die obere / untere Endfläche, der mittlere Queerschnitt, die untere / obere Endfläche eines Obelisken, h seine Höhe, und wie gewöhnlich V sein körperlicher Inhalt; so ist nach 12):

$$27) \quad V = \tfrac{1}{6}h(F + 4F' + F''),$$

welche Formel ich für die bequemste zur Inhaltsbestimmung eines Obelisken in der Praxis halte, und mich daher bei der Ableitung des im Archiv. Thl. IX. S. 85. von mir bewiesenen Koppe'schen Ausdrucks für den körperlichen Inhalt des Obelisken aus derselben jetzt nicht aufhalten will.

Ueberhaupt werden die vorhergehenden Beispiele schon hinreichend sein, um die grosse Fruchtbarkeit des in IV. bewiesenen allgemeinen Satzes bei der Inhaltsbestimmuug der Körper zu zeigen. Man kann diesen Satz auch bei der Bestimmung des Inhalts der Fässer und anderer Körper mit Vortheil in Anwendung bringen, was weiter zu entwickeln mich jedoch für jetzt zu sehr von meinem eigentlichen Zwecke abführen würde, und auch füglich dem eignen Nachdenken des Lesers überlassen werden kann.

VI.

Es erhellet leicht, dass sich die vorhergehenden Betrachtungen verallgemeinern lassen. Nimmt man nämlich, um noch einen Schritt weiter zu gehen, an, dass die Queerschnitte eines Körpers ganze rationale algebraische Functionen des dritten Grades ihrer Entfernungen von einem gewissen bestimmten Punkte als Pol seien, und setzt demzufolge im Allgemeinen

---

*) Einer ganz ähnlichen Betrachtung hat sich auch **Brix** a. a. O. S. 137. und S. 138. bedient, und das unmittelbar Vorhergehende ist im Wesentlichen ganz von ihm entlehnt, nur etwas allgemeiner gehalten.

Digitized by Google

$$28)\quad F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

so gelangt man durch ganz ähnliche Betrachtungen wie oben und mit Anwendung analoger Bezeichnungen leicht zu der Gleichung

$$29)\quad V = A(b-a) + \tfrac{1}{2}B(b^2-a^2) + \tfrac{1}{3}C(b^3-a^3) + \tfrac{1}{4}D(b^4-a^4)$$

oder

$$30)\quad V = (b-a)\{A + \tfrac{1}{2}B(a+b) + \tfrac{1}{3}C(a^2+ab+b^2) + \tfrac{1}{4}D(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\}.$$

Die vier in der Gleichung

$$F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

enthaltenen Constanten A, B, C, D kann man aber aus vier den gegebenen Entfernungen α, β, γ, δ vom Pole entsprechenden Queerschnitten F_α, F_β, F_γ, F_δ bestimmen, indem man zwischen den vier in Rede stehenden Constanten, wenn vier solcher Queerschnitte als gegeben betrachtet werden, die vier folgenden Gleichungen hat:

$$\begin{aligned} F_\alpha &= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3, \\ F_\beta &= A + B\beta + C\beta^2 + D\beta^3, \\ F_\gamma &= A + B\gamma + C\gamma^2 + D\gamma^3, \\ F_\delta &= A + B\delta + C\delta^2 + D\delta^3. \end{aligned}$$

Um diese vier Gleichungen in Bezug auf A, B, C, D als unbekannte Grössen aufzulösen, eliminire man zuerst A. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} B(\alpha-\beta) + C(\alpha^2-\beta^2) + D(\alpha^3-\beta^3) &= F_\alpha - F_\beta, \\ B(\beta-\gamma) + C(\beta^2-\gamma^2) + D(\beta^3-\gamma^3) &= F_\beta - F_\gamma, \\ B(\gamma-\delta) + C(\gamma^2-\delta^2) + D(\gamma^3-\delta^3) &= F_\gamma - F_\delta; \end{aligned}$$

also, wenn man diese Gleichungen nach der Reihe mit $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\delta$ dividirt:

$$B + C(\alpha+\beta) + D(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \frac{F_\alpha - F_\beta}{\alpha-\beta},$$

$$B + C(\beta+\gamma) + D(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2) = \frac{F_\beta - F_\gamma}{\beta-\gamma},$$

$$B + C(\gamma+\delta) + D(\gamma^2+\gamma\delta+\delta^2) = \frac{F_\gamma - F_\delta}{\gamma-\delta}.$$

Eliminirt man jetzt ferner B, so erhält man

$$C(\alpha-\gamma) + D\{\alpha^2-\gamma^2+\beta(\alpha-\gamma)\} = \frac{(\beta-\gamma)F_\alpha + (\gamma-\alpha)F_\beta + (\alpha-\beta)F_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},$$

Digitized by Google

$$C(\beta-\delta)+D\{\beta^2-\delta^2+\gamma(\beta-\delta)\}$$
$$=\frac{(\gamma-\delta)F\beta+(\delta-\beta)F\gamma+(\beta-\gamma)F\delta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)};$$

also, wenn man diese Gleichungen mit $\alpha-\gamma$, $\beta-\delta$ dividirt:

$$C+D(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$=\frac{F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$
$$C+D(\beta+\gamma+\delta)$$
$$=\frac{F\beta}{(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}+\frac{F\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}+\frac{F\delta}{(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Eliminirt man nun endlich C, so ergiebt sich

$$D=\frac{F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$
$$+\frac{F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$+\frac{F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$
$$+\frac{F\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man diesen Ausdruck von D in die eine der beiden Gleichungen ein, welche bloss die Unbekannten C, D enthalten, so ergiebt sich mittelst leichter Rechnung für C der folgende Ausdruck:

$$C=-\frac{(\beta+\gamma+\delta)F\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$
$$-\frac{(\alpha+\gamma+\delta)F\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$-\frac{(\alpha+\beta+\delta)F\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$
$$-\frac{(\alpha+\beta+\gamma)F\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man nun die beiden vorhergehenden Ausdrücke von C, D in eine der drei nur die Unbekannten B, C, D enthaltenden Gleichungen ein, so ergiebt sich für B leicht die folgende Formel:

Digitized by Google

$$B = \frac{(\beta\gamma + \gamma\delta + \delta\beta)\, F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$
$$+ \frac{(\alpha\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha)\, F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$+ \frac{(\alpha\beta + \beta\delta + \delta\alpha)\, F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$
$$+ \frac{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\, F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man endlich die gefundenen Ausdrücke von B, C, D in eine der vier die Unbekannten A, B, C, D enthaltenden Gleichungen ein, so erhält man ohne Schwierigkeit für A den folgenden Ausdruck:

$$A = -\frac{\beta\gamma\delta\, F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}$$
$$- \frac{\alpha\gamma\delta\, F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}$$
$$- \frac{\alpha\beta\delta\, F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}$$
$$- \frac{\alpha\beta\gamma\, F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Führt man nun die gefundenen Ausdrücke der vier Constanten A, B, C, D in die Gleichung 27) ein, so erhält man für

$$\frac{V}{b-a}$$

den folgenden Ausdruck:

31) $$\frac{V}{b-a} = -\frac{F_\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\beta\gamma\delta - \tfrac{1}{2}(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta)(a+b) \\ \quad + \tfrac{1}{3}(\beta+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\gamma\delta - \tfrac{1}{2}(\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)(a+b) \\ \quad + \tfrac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta\delta - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)(a+b) \\ \quad + \tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}$$
$$-\frac{F_\delta}{(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}\left\{\begin{array}{l}\alpha\beta\gamma - \tfrac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(a+b) \\ \quad + \tfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \tfrac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\end{array}\right\}.$$

Digitized by Google

Für α, β, γ, δ lassen sich in dieser allgemeinen Formel alle möglichen Werthe setzen. Setzt man nun aber

$$\alpha = a,$$
$$\beta = a + \tfrac{1}{3}(b-a) = \tfrac{1}{3}(2a+b),$$
$$\gamma = a + \tfrac{2}{3}(b-a) = \tfrac{1}{3}(a+2b),$$
$$\delta = b;$$

so erhält man nach leichter Rechnung:

$$\left.\begin{array}{l} \beta\gamma\delta - \frac{1}{2}(\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\beta)(a+b) \\ \quad + \frac{1}{3}(\beta+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\gamma\delta - \frac{1}{2}(\alpha\gamma+\gamma\delta+\delta\alpha)(a+b) \\ \quad + \frac{1}{3}(\alpha+\gamma+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \end{array}\right\} = -\tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta\delta - \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\delta+\delta\alpha)(a+b) \\ \quad + \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\delta)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{36}(b-a)^3,$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha\beta\gamma - \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(a+b) \\ \quad + \frac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)(a^2+ab+b^2) \\ \quad - \frac{1}{4}(a^3+a^2b+ab^2+b^3) \end{array}\right\} = -\tfrac{1}{36}(b-a)^3.$$

Weil nun ferner, wie man ebenfalls leicht findet,

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta) = -\tfrac{2}{9}(b-a)^3,$$
$$(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = \tfrac{2}{27}(b-a)^3,$$
$$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta) = -\tfrac{2}{27}(b-a)^3,$$
$$(\delta-\alpha)(\delta-\beta)(\delta-\gamma) = \tfrac{2}{9}(b-a)^3$$

ist; so ist nach 28):

$$32)\quad V = \tfrac{1}{8}(b-a)\{F_a + 3F_{\frac{1}{3}(2a+b)} + 3F_{\frac{1}{3}(a+2b)} + F_b\}.$$

Diese Betrachtungen noch weiter fortzuführen und noch mehr zu verallgemeinern, liegt jetzt nicht in meiner Absicht, indem ich mich in dieser Abhandlung vorzugsweise in dem Bereiche elementarer Betrachtungen halten, und das Obige zur Einführung in den Elementar-Unterricht und in die Elementar-Lehrbücher empfehlen wollte. Ich werde jedoch vielleicht späterhin in grösserer Allgemeinheit auf diesen Gegenstand zurückkommen.

VII.

Wenn man einen Körper hat, bei welchem man sich zu der

Digitized by Google

Annahme berechtigt halten darf, dass wenigstens in kleinen Intervallen seine parallelen Queerschnitte in Beziehung auf einen gewissen Pol annähernd der Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2$$

genügen, und der körperliche Inhalt V eines zwischen zwei gewissen parallelen Queerschnitten liegenden Theils desselben ermittelt werden soll; so theile man die Höhe h dieses Theils, wenn n eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet, in $2n$ gleiche Theile, und bestimme die Flächenräume

$$F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, \ldots F_{2n}$$

der allen einzelnen Theilpunkten der Höhe entsprechenden Queerschnitte; so ist nach 12) wenigstens näherungsweise und mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist:

$$\begin{aligned} V = & \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_0 + 4F_1 + F_2) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_2 + 4F_3 + F_4) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_4 + 4F_5 + F_6) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_6 + 4F_7 + F_8) \\ & \text{u. s. w.} \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_{2n-4} + 4F_{2n-3} + F_{2n-2}) \\ & + \tfrac{1}{6}.2\frac{h}{2n}(F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}), \end{aligned}$$

also

$$33)\quad V = \tfrac{1}{6}.\frac{h}{n}(F_0 + 4F_1 + 2F_2 + 4F_3 + 2F_4 + 4F_5 + \ldots + 2F_{2n-2} + 4F_{2n-1} + F_{2n}).$$

Diese Näherungsformel zur Bestimmung der körperlichen Räume ist zuerst von dem schwedischen Vice-Admiral Chapman in seinem Werke über die Schiffsbaukunst: Traité de la construction des vaisseaux, traduit du Suédois de M. Chapman par Vial de Clairbois. Brest. 1781. gegeben worden, und späterhin in mehrere andere Werke, namentlich über praktische Mechanik und Maschinenlehre, wo sie hauptsächlich in der Lehre vom Schwerpunkte zur Anwendung kommt, übergegangen. Die theoretische Bedingung, welche nothwendig erfüllt sein muss, wenn diese Formel mit Genauigkeit anwendbar sein soll, habe ich im Vorhergehenden mit möglichster Deutlichkeit und Bestimmtheit hervorzuheben gesucht. Wenn nun aber diese Formel, wie die Erfahrung gelehrt hat, in der That in den meisten Fällen zu sehr

Digitized by Google

genauen Resultaten führt, so kann nach meiner Ansicht der Grund nur darin liegen, dass die Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2,$$

wie aus dem Obigen erhellet, für die gerade Linie, den Kreis, überhaupt alle drei Kegelschnitte völlig genau erfüllt ist, und dass also die Formel von Chapman eigentlich alle die so eben genannten, in der Natur bekanntlich überhaupt sehr häufig hervortretenden Curven, und vielleicht noch mehrere andere, unter sich begreift; dieselbe muss also, wenn die Oberfläche eines Körpers wenigstens in kleinen Intervallen annähernd überhaupt nach einer dieser Curven gekrümmt ist, nothwendig immer zu sehr genauen Resultaten führen, und scheint also die Aufmerksamkeit, welche ihr namentlich von praktischen Schriftstellern vielfach geschenkt worden ist, in der That vollkommen zu verdienen.

In dem Falle, wenn für kleine Intervalle näherungsweise

$$F_x = A + Bx$$

gesetzt werden könnte, müsste man, auf ähnliche Art wie vorher in $2n$, jetzt die Höhe h des Körpers in n gleiche Theile theilen, und hätte dann nach 26) näherungsweise, und zwar desto genauer, je grösser n angenommen würde,

$$\begin{aligned} V = &\tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_0 + F_1) \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_1 + F_2) \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_2 + F_3) \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_3 + F_4) \\ &\text{u. s. w.} \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_{n-2} + F_{n-1}) \\ &+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_{n-1} + F_n), \end{aligned}$$

also

$$34)\quad V = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{h}{n}(F_0 + 2F_1 + 2F_2 + 2F_3 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n),$$

welche Formel aus, nach den vorher gemachten Bemerkungen leicht begreiflichen Gründen im Allgemeinen jedoch nicht so genaue Resultate wie die Formel 33) gewähren kann.

Digitized by Google

VIII.

Dürfte man sich zu der Annahme berechtigt halten, dass die einander parallelen Queerschnitte eines Körpers wenigstens näherungsweise in kleinen Intervallen der Bedingung

$$F_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$

genügten, so würde man, unter Anwendung ganz ähnlicher Bezeichnungen wie vorher, die Höhe h in $3n$ gleiche Theile theilen, und erhielte dann nach 29), näherungsweise und mit desto grösserer Genauigkeit, je grösser n ist, für V den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
V = {} & \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_0 + 3F_1 + 3F_2 + F_3) \\
& + \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_3 + 3F_4 + 3F_5 + F_6) \\
& + \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_6 + 3F_7 + 3F_8 + F_9) \\
& + \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_9 + 3F_{10} + 3F_{11} + F_{12}) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_{3n-6} + 3F_{3n-5} + 3F_{3n-4} + F_{3n-3}) \\
& + \tfrac{1}{8}\,.\,3\frac{h}{3n}(F_{3n-3} + 3F_{3n-2} + 3F_{3n-1} + F_{3n}),
\end{aligned}$$

also, wie hieraus leicht folgt:

$$35)\quad V = \tfrac{1}{8}\,.\,\frac{h}{n}\left\{\begin{aligned}
& F_0 + 3F_1 + 3F_2 + 2F_3 \\
& + 3F_4 + 3F_5 + 2F_6 \\
& + 3F_7 + 3F_8 + 2F_9 \\
& + 3F_{10} + 3F_{11} + 2F_{12} \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + 3F_{3n-5} + 3F_{3n-4} + 2F_{3n-3} \\
& + 3F_{3n-2} + 3F_{3n-1} + F_{n}
\end{aligned}\right\}.$$

Dass auch diese Näherungsformeln einer Verallgemeinerung fähig sein würden, bedarf nach dem Vorhergehenden kaum noch einer besondern Erinnerung.

Digitized by Google

XXIX.

Vollständige independente Auflösung der n Gleichungen des ersten Grades

$$A_1 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_1^2 + A_4\alpha_1^3 + \ldots + A_n\alpha_1^{n-1} = a_1,$$
$$A_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_2^2 + A_4\alpha_2^3 + \ldots + A_n\alpha_2^{n-1} = a_2,$$
$$A_1 + A_2\alpha_3 + A_3\alpha_3^2 + A_4\alpha_3^3 + \ldots + A_n\alpha_3^{n-1} = a_3,$$
$$A_1 + A_2\alpha_4 + A_3\alpha_4^2 + A_4\alpha_4^3 + \ldots + A_n\alpha_4^{n-1} = a_4,$$

u. s. w.

$$A_1 + A_2\alpha_n + A_3\alpha_n^2 + A_4\alpha_n^3 + \ldots + A_n\alpha_n^{n-1} = a_n$$

zwischen den n unbekannten Grössen

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n;$$

nebst einigen merkwürdigen arithmetischen Sätzen.

Von
dem Herausgeber.

I.

Wir wollen in der Kürze

$$\overset{\mu}{(n)} = \frac{\alpha_1^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_2^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_3^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$
$$+\frac{\alpha_4^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_n^\mu}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

Digitized by Google

und also in analoger Bezeichnung, wenn in der vorhergehenden Gleichung $n-1$ für n gesetzt wird,

$$(\overset{\mu}{n-1}) = \frac{\alpha_1^{\mu}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_2^{\mu}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_3^{\mu}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{n-1})}$$

$$+\frac{\alpha_4^{\mu}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{n-1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{\mu}{\alpha_{n-1}}}{(\alpha_{n-1}-\alpha_1)(\alpha_{n-1}-\alpha_2)(\alpha_{n-1}-\alpha_3)(\alpha_{n-1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})}$$

setzen.

Addirt man, um eine Relation zwischen den im Allgemeinen durch $(\overset{\mu}{n})$ bezeichneten Grössen zu finden, die beiden vorhergehenden Gleichungen zu einander, so erhält man mittelst leichter Rechnung:

$$(\overset{\mu}{n-1}) + (\overset{\mu}{n})$$

$$=\frac{\alpha_1^{\mu+1}+\alpha_1^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_2^{\mu+1}+\alpha_2^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_3^{\mu+1}+\alpha_3^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_4^{\mu+1}+\alpha_4^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_{n-1}^{\mu+1}+\alpha^{\mu}_{n-1}(1-\alpha_n)}{(\alpha_{n-1}-\alpha_1)(\alpha_{n-1}-\alpha_2)(\alpha_{n-1}-\alpha_3)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_{n-2})(\alpha_{n-1}-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\alpha_n^{\mu}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Weil man nun aber

$$\alpha_n^{\mu}=\alpha_n^{\mu+1}+\alpha_n^{\mu}(1-\alpha_n)$$

setzen kann, so lässt sich die vorhergehende Gleichung auf den folgenden Ausdruck bringen:

Digitized by Google

$$\overset{\mu}{(n-1)} + \overset{\mu}{(n)}$$

$$= \frac{\alpha_1^{\mu+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\dots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+ \frac{\alpha_2^{\mu+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\dots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+ \frac{\alpha_3^{\mu+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\dots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\alpha_n^{\mu+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

$$+ \frac{\alpha_1^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\dots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+ \frac{\alpha_2^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\dots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+ \frac{\alpha_3^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\dots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+ \frac{\alpha_n^{\mu}(1-\alpha_n)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\dots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

also in der eingeführten Bezeichnung

$$\overset{\mu}{(n-1)} + \overset{\mu}{(n)} = \overset{\mu+1}{(n)} + (1-\alpha_n).\overset{\mu}{(n)},$$

woraus sich auf der Stelle die Relation

$$\overset{\mu+1}{(n)} = \overset{\mu}{(n-1)} + \alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

ergiebt.

Zerlegt man jetzt den Bruch

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\dots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

nach einer aus der Theorie der Zerlegung der gebrochenen rationalen algebraischen Functionen in sogenannte einfache Brüche oder Partialbrüche sehr bekannten Regel *) in Partialbrüche, so erhält man ohne Schwierigkeit:

---

*) M. s. z. B. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höhern Analysis. Leipzig. 1838. S. 151.

Digitized by Google

$$\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

also

$$0=\frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots.(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots.(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots.(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{1}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots.(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{1}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots.(\alpha_n-\alpha_{n-1})};$$

folglich ist

$$\overset{0}{(n)}=0.$$

Weil nun

$$\overset{1}{(2)}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)}=1$$

ist, so erhält man mittelst der Gleichungen

$$\overset{0}{(n)}=0,\ \overset{\mu+1}{(n)}=\overset{\mu}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

leicht nach und nach:

Digitized by Google

$$\overset{0}{(2)}=0,$$

$$\overset{1}{(2)}=1;$$

$$\overset{0}{(3)}=0,$$

$$\overset{1}{(3)}=\overset{0}{(2)}+\alpha_3.\overset{0}{(3)}=0,$$

$$\overset{2}{(3)}=\overset{1}{(2)}+\alpha_3.\overset{1}{(3)}=1;$$

$$\overset{0}{(4)}=0,$$

$$\overset{1}{(4)}=\overset{0}{(3)}+\alpha_4.\overset{0}{(4)}=0,$$

$$\overset{2}{(4)}=\overset{1}{(3)}+\alpha_4.\overset{1}{(4)}=0,$$

$$\overset{3}{(4)}=\overset{2}{(3)}+\alpha_4.\overset{2}{(4)}=1;$$

$$\overset{0}{(5)}=0,$$

$$\overset{1}{(5)}=\overset{0}{(4)}+\alpha_5.\overset{0}{(5)}=0,$$

$$\overset{2}{(5)}=\overset{1}{(4)}+\alpha_5.\overset{1}{(5)}=0,$$

$$\overset{3}{(5)}=\overset{2}{(4)}+\alpha_5.\overset{2}{(5)}=0,$$

$$\overset{4}{(5)}=\overset{3}{(4)}+\alpha_5.\overset{3}{(5)}=1;$$

u. s. w.

Das Gesetz des Fortschritts liegt hier deutlich vor Augen und wir gelangen daher durch diese Betrachtung zu dem allgemeinen Resultate, dass

$$\overset{\mu}{(n)}=0$$

für $\mu<n-1$, dagegen

$$\overset{\mu}{(n)}=1$$

für $\mu=n-1$, so dass also immer

$$\overset{n-1}{(n)}=1$$

ist.

Setzt man

$$\alpha_1=1,\ \alpha_2=2,\ \alpha_3=3,\ \alpha_4=4,\ldots.\alpha_n=n;$$

so ist überhaupt

$$\frac{\alpha^{\mu}{}_k}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\ldots.(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots.(\alpha_k-\alpha_n)}$$
$$=\frac{k^{\mu}}{(k-1)(k-2)\ldots.1.-1.-2.-3\ldots.-(n-k)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.k^{\mu}}{1.2.3.4\ldots.(k-1).1.2.3.4\ldots.(n-k)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)k^{\mu}}{1.2.3.4\ldots.(k-1).1.2.3.4\ldots.(n-1)}$$
$$=\frac{(-1)^{n-k}.(n-1)_{k-1}.k^{\mu}}{1.2.3.4\ldots.(n-1)}.$$

Also ist in diesem Falle, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}1.2.3\ldots.(n-1).\overset{\mu}{(n)}=(-1)^{n-1}.\overset{\mu}{1}&+(-1)^{n-2}.(n-1)_1.2^{\mu}\\&+(-1)^{n-3}.(n-1)_2.3^{\mu}\\&+(-1)^{n-4}.(n-1)_3.4^{\mu}\\&+(-1)^{n-5}.(n-1)_4.5^{\mu}\\&+\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder

$$(-1)^{n-1}.1.2.3\ldots.(n-1).\overset{\mu}{(n)}$$
$$=1^{\mu}-(n-1)_1.2^{\mu}+(n-1)_2.3^{\mu}-(n-1)_3.4^{\mu}+(n-1)_4.5^{\mu}-\ldots.,$$

woraus sich, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, unmittelbar ein bekannter merkwürdiger, auch für die Zahlenlehre wichtiger, arithmetischer Satz ergiebt, der gewöhnlich, und allerdings auch am leichtesten, mit Hülfe der Differenzenrechnung bewiesen wird, hier aber, als hinreichend bekannt, jetzt nicht weiter erörtert werden soll.

Man hätte vorher auch

$$\alpha_1=n,\quad \alpha_2=n-1,\quad \alpha_3=n-2,\ldots.,\alpha_n=1$$

setzen können.

Wenn man in der vorher gefundenen Gleichung

$$\overset{\mu+1}{(n)}=\overset{\mu}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{\mu}{(n)}$$

$n-1$ für μ, also n für $\mu+1$ setzt, so wird dieselbe

$$\overset{n}{(n)}=\overset{n-1}{(n-1)}+\alpha_n.\overset{n-1}{(n)},$$

und folglich, weil nach dem Obigen

$$\overset{n-1}{(n)}=1$$

ist:

Digitized by Google

$$\overset{n}{(n)} = \overset{n-1}{(n-1)} + \alpha_n.$$

Durch successive Anwendung dieser Gleichung erhält man leicht

$$\overset{n}{(n)} = \overset{2}{(2)} + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_n.$$

Nun ist aber

$$\overset{2}{(2)} = \frac{\alpha_1^{\,2}}{\alpha_1 - \alpha_2} + \frac{\alpha_2^{\,2}}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\alpha_1^{\,2} - \alpha_2^{\,2}}{\alpha_1 - \alpha_2} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Also ist

$$\overset{n}{(n)} = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_n,$$

was mir auch eine bemerkenswerthe Relation zu sein scheint.

II.

Die $m$te Klasse der Kombinationen ohne Wiederholungen für die Elemente

$$\alpha_\varkappa,\ \alpha_\lambda,\ \alpha_\mu,\ \alpha_\nu, \ldots$$

wollen wir im Folgenden der Kürze wegen durch

$$\overset{m}{K}(\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots)$$

bezeichnen, und wollen, dies vorausgesetzt, überhaupt

$$\begin{aligned}
\overset{m,\mu}{(n)} = & \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)\,.\,\alpha_1^{\,\mu}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)\,.\,\alpha_2^{\,\mu}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)\,.\,\alpha_3^{\,\mu}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)\,.\,\alpha_4^{\,\mu}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)} \\
& \text{u. s. w.} \\
& + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)\,.\,\alpha_n^{\,\mu}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}
\end{aligned}$$

setzen. Ist nun

$$\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\,.\,\alpha_k^{\,\mu}}{(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)}$$

Digitized by Google

ein allgemeines Glied dieser Reihe, so kann man dasselbe unbeschadet seines Werths im Zähler und im Nenner mit $\alpha_k - \alpha_{n+1}$ multipliciren, und erhält dann als Zähler

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n).\,\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n).\,\alpha_k^{\mu}\alpha_{n+1},$$

und als Nenner

$$(\alpha_k-\alpha_1)(\alpha_k-\alpha_2)\ldots(\alpha_k-\alpha_{k-1})(\alpha_k-\alpha_{k+1})\ldots(\alpha_k-\alpha_n)(\alpha_k-\alpha_{n+1}).$$

Den Zähler aber kann man auf folgende Art umformen:

$$\left\{\begin{array}{l}\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\\ +\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n).\alpha_{n+1}\end{array}\right\}\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-\left\{\begin{array}{l}\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n)\\ +\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,k+1,\ldots,n-1,n).\alpha_k\end{array}\right\}\alpha_k^{\mu}\alpha_{n+1},$$

so dass also dieser Zähler, weil nach einem sehr bekannten Satze der Kombinationslehre

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n)$$
$$+\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n-1,n).\alpha_{n+1}$$
$$=\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,\,n,n+1)$$

und

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n)$$
$$+\overset{m-1}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n-1,n).\alpha_k$$
$$=\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n)$$

ist, sich auf die folgende Form bringen lässt:

$$\overset{m}{K}(1,2,3,\ldots,k-1,\,k+1,\ldots,n,n+1).\,\alpha_k^{\mu+1}$$
$$-K(1,2,3,4,\ldots,n).\,\alpha_k^{\mu}\,\alpha_{n+1}.$$

Wenden wir nun diese Transformation auf die oben durch

$$\overset{m,\mu}{(n)}$$

bezeichnete Grösse an, und zerlegen zugleich jeden einzelnen Bruch nach Maassgabe der beiden seinen Zähler bildenden Theile in zwei Theile, so erhalten wir ohne alle Schwierigkeit

Digitized by Google

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n+1).\alpha_1^{\mu+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n+1).\alpha_2^{\mu+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n+1).\alpha_3^{\mu+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{n+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n+1).\alpha_4^{\mu+1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha^{n+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1,n+1).\alpha_n^{\mu+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_1^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4\ldots,n).\alpha_2^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_3^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{n+1})}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_4^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{n+1})}$$

u. s. w.

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_n^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})(\alpha_n-\alpha_{n+1})}.$$

Fügt man aber dieser Reihe noch die verschwindende Grösse

$$\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_{n+1}^{\mu+1}}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_{n+1}-\alpha_3)(\alpha_{n+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}$$

$$-\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\alpha_{n+1}^{\mu}\alpha_{n+1}}{(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)(\alpha_{n+1}-\alpha_3)(\alpha_{n+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)}$$

bei, so erhält man in den oben eingeführten Zeichen auf der Stelle die sehr bemerkenswerthe Relation:

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \overset{m,\mu+1}{(n+1)} - \alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\overset{\mu}{(n+1)},$$

oder

Digitized by Google

$$\overset{m,\mu+1}{(n+1)}=\overset{m,\mu}{(n)}+\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).(n\overset{\mu}{+}1),$$

oder

$$\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).(n\overset{\mu}{+}1)=\overset{m,\mu+1}{(n+1)}-\overset{m,\mu}{(n)},$$

wobei man auch noch bemerken kann, dass diese Gleichungen noch etwas mehr Symmetrie erhalten, wenn man, was offenbar in gewisser Weise verstattet ist, $(n\overset{0,\mu}{+}1)$ für $(n\overset{\mu}{+}1)$ schreibt.

Wenn man in der Reihe

$$\overset{m,0}{(n)}=\frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

den ersten Bruch auf bekannte Weise in Partialbrüche *) zerlegt, so erhält man ohne Schwierigkeit:

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Weil nun aber nach dem schon vorher angewandten Satze der Kombinationslehre

---

*) Man vergleiche I.

Digitized by Google

$$\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(3,4,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(3,4,5,\ldots,n)-\alpha_2\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_2)\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n),$$

$$\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,4,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(2,4,5,\ldots,n)-\alpha_3\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_3)\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n),$$

$$\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,n)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,3,5,\ldots,n)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)$$
$$-\overset{m}{K}(2,3,5,\ldots,n)-\alpha_4\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_4)\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n),$$

u. s. w.

$$\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)-\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)$$
$$=\overset{m}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)+\alpha_1\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$
$$-\overset{m}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)-\alpha_n\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$
$$=(\alpha_1-\alpha_n)\overset{m-1}{K}(2,3,4,\ldots,n-1)$$

ist; so ist nach dem Vorhergehenden

$$\overset{m,0}{(n)}$$
$$=-\frac{\overset{m-1}{K}(3,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$
$$-\frac{\overset{m-1}{K}(2,4,5,\ldots,n)}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$
$$-\frac{\overset{m-1}{K}(2,3,5,\ldots,n)}{(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$-\frac{\overset{m-1}{K}2,3,4,\ldots,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Digitized by Google

Nun ist aber klar, dass man eine der vorhergehenden gan ähnliche Zerlegung jetzt wieder von Neuem in Anwendung bringen kann, und wenn man dann diese Zerlegungen weiter fortsetzt, so muss man nothwendig endlich auf die folgende Gleichung kommen:

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)^{m-1}\cdot\frac{\overset{1}{K}(m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots,n)}{(\alpha_m-\alpha_{m+1})(\alpha_m-\alpha_{m+2})(\alpha_m-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_m-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+2,\ m+3,\ldots,n)}{(\alpha_{m+1}-\alpha_m)(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+2})(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+3,\ldots,n)}{(\alpha_{m+2}-\alpha_m)(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_{m+2}-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+2,\ldots,n-1)}{(\alpha_n-\alpha_m)(\alpha_n-\alpha_{m+1})(\alpha_n-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}.$$

Wendet man nun aber die erwähnte Zerlegung nochmals an, was jedoch nur für $n>m+1$ möglich ist, und bemerkt, dass

$$\overset{1}{K}(m+1,\ m+2,\ m+3,\ldots,n)=\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\alpha_{m+3}+\ldots+\alpha_n,$$

$$\overset{1}{K}(m,\ m+2,\ m+3,\ldots,n)=\alpha_m+\alpha_{m+2}+\alpha_{m+3}+\ldots+\alpha_n,$$

$$\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+3,\ldots,n)=\alpha_m+\alpha_{m+1}+\alpha_{m+3}+\ldots+\alpha_n,$$

u. s. w.

$$\overset{1}{K}(m,\ m+1,\ m+2,\ldots,n-1)=\alpha_m+\alpha_{m+1}+\alpha_{m+2}+\ldots+\alpha_{n-1}$$

ist, so erhält man

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)\cdot\frac{1}{(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+2})(\alpha_{m+1}-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_n)}$$

$$+(-1)^m\cdot\frac{1}{(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1})(\alpha_{m+2}-\alpha_{m+3})\ldots(\alpha_{m+2}-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+(-1)^m\cdot\frac{1}{(\alpha_n-\alpha_{m+1})(\alpha_n-\alpha_{m+2})\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})},$$

und weil nun die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, wie unmittelbar aus I. hervorgeht, der Null gleich ist, so ist überhaupt für $n>m+1$:

$$\overset{m,0}{(n)}=0.$$

Digitized by Google

Für $n=m+1$ ist dagegen nach dem Obigen

$$\overset{m,0}{(n)}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m+1)}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}+(-1)^{m-1}.\frac{\overset{1}{K}(m)}{\alpha_{m+1}-\alpha_m}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_{m+1}}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}+(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_m}{\alpha_{m+1}-\alpha_m}$$

$$=(-1)^{m-1}.\frac{\alpha_{m+1}-\alpha_m}{\alpha_m-\alpha_{m+1}}=-(-1)^{m-1}=(-1)^m.$$

Es ist also

$$\overset{m,0}{(n)}=0 \text{ oder } \overset{m,0}{(n)}=(-1)^m,$$

jenachdem

$$n>m+1 \text{ oder } n=m+1$$

ist.

Ueberhaupt ist nach dem Obigen

$$\overset{m,\mu}{(m+1)}=\frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,m+1).\alpha_1{}^\mu}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,m+1).\alpha_2{}^\mu}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,m+1).\alpha_3{}^\mu}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,5,\ldots,m+1).\alpha_4{}^\mu}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{m+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,m).\alpha_{m+1}{}^\mu}{(\alpha_{m+1}-\alpha_1)(\alpha_{m+1}-\alpha_2)(\alpha_{m+1}-\alpha_3)(\alpha_{m+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_m)},$$

also, wie leicht erhellet:

$$\overset{m,\mu}{(m+1)}=\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_1{}^{\mu-1}}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_2{}^{\mu-1}}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_3{}^{\mu-1}}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_{m+1})}$$

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_4{}^{\mu-1}}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_{m+1})}$$

u. s. w.

$$+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}.\alpha_{m+1}{}^{\mu-1}}{(\alpha_{m+1}-\alpha_1)(\alpha_{m+1}-\alpha_2)(\alpha_{m+1}-\alpha_3)(\alpha_{m+1}-\alpha_4)\ldots(\alpha_{m+1}-\alpha_m)}.$$

Hieraus schliesst man mit Hülfe von I. leicht, dass

$$\overset{m,1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,2}{(m+1)}=0,\ \overset{m,3}{(m+1)}=0,\ldots,\overset{m,m}{(m+1)}=0;$$

aber

$$\overset{m,m+1}{(m+1)}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_{m+1}$$

ist.

Aus der oben bewiesenen Relation

$$\overset{m,\mu+1}{(n+1)}=\overset{m,\mu}{(n)}+\alpha_{n+1}\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n).\overset{\mu}{(n+1)}$$

ergeben sich nun die folgenden Gleichungen:

$$\overset{m,1}{(n)}=\overset{m,0}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{0}{(n)},$$

$$\overset{m,2}{(n)}=\overset{m,1}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{1}{(n)},$$

$$\overset{m,3}{(n)}=\overset{m,2}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{2}{(n)},$$

$$\overset{m,4}{(n)}=\overset{m,3}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{3}{(n)},$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-1}{(n)}=\overset{m,n-2}{(n-1)}+\alpha_n\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\overset{n-2}{(n)};$$

also, weil nach I.

$$\overset{0}{(n)}=\overset{1}{(n)}=\overset{2}{(n)}=\overset{3}{(n)}=\ldots=\overset{n-2}{(n)}=0$$

ist:

$$\overset{m,1}{(n)}=\overset{m,0}{(n-1)},$$

$$\overset{m,2}{(n)}=\overset{m,1}{(n-1)},$$

$$\overset{m,3}{(n)}=\overset{m,2}{(n-1)},$$

$$\overset{m,4}{(n)}=\overset{m,3}{(n-1)};$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-1}{(n)}=\overset{m,n-2}{(n-1)};$$

und in dem nachfolgenden Schema sind folglich offenbar die sämmtlichen in vertikalen Reihen stehenden Glieder einander gleich:

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
\overset{m,0}{(n)} , \overset{m,1}{(n)} , \overset{m,2}{(n)} , \overset{m,3}{(n)} , \ldots , \overset{m,n-m-2}{(n)} , \overset{m,n-m-1}{(n)} , \overset{m,n-m}{(n)} , \ldots , \overset{m,n-2}{(n)} , \overset{m,n-1}{n} ; \\
\overset{m,0}{(n-1)} , \overset{m,1}{(n-1)} , \overset{m,2}{(n-1)} , \ldots , \overset{m,n-m-3}{(n-1)} , \overset{m,n-m-2}{(n-1)} , \overset{m,n-m-1}{(n-1)} , \ldots , \overset{m,n-3}{(n-1)} , \overset{m,n-2}{(n-1)} ; \\
\overset{m,0}{(n-2)} , \overset{m,1}{(n-2)} , \ldots , \overset{m,n-m-4}{(n-2)} , \overset{m,n-m-3}{(n-2)} , \overset{m,n-m-2}{(n-2)} , \ldots , \overset{m,n-4}{(n-2)} , \overset{m,n-3}{(n-2)} ; \\
\overset{m,0}{(n-3)} , \ldots , \overset{m,n-m-5}{(n-3)} , \overset{m,n-m-4}{(n-3)} , \overset{m,n-m-3}{(n-3)} , \ldots , \overset{m,n-5}{(n-3)} , \overset{m,n-4}{(n-3)} ; \\
\qquad \vdots \\
\overset{m,0}{(m+2)} , \overset{m,1}{(m+2)} , \overset{m,2}{(m+2)} , \ldots , \overset{m,m}{(m+2)} , \overset{m,m+1}{(m+2)} ; \\
\overset{m,0}{(m+1)} , \overset{m,1}{(m+1)} , \ldots , \overset{m,m-1}{(m+1)} , \overset{m,m}{(m+1)} .
\end{array}
$$

Weil nun nach dem Vorhergehenden

$$\overset{m,0}{(n)}=0,\ \overset{m,0}{(n-1)}=0,\ \overset{m,0}{(n-2)}=0,\ \overset{m,0}{(n-2)}=0, \ldots \overset{m,0}{(m+2)}=0;$$

$$\overset{m,0}{(m+1)}=(-1)^m;$$

$$\overset{m,1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,2}{(m+1)}=0, \ldots \overset{m,m-1}{(m+1)}=0,\ \overset{m,m}{(m+1)}=0$$

ist; so ist

$$\overset{m,0}{(n)}=0,$$

$$\overset{m,1}{(n)}=0,$$

$$\overset{m,2}{(n)}=0,$$

$$\overset{m,3}{(n)}=0,$$

u. s. w.

$$\overset{m,n-m-2}{(n)}=0,$$

$$\overset{m,n-m-1}{(n)}=(-1)^m,$$

$$\overset{m,n-m}{(n)}=0,$$

u. s. w,

$$\overset{m,n-2}{(n)}=0,$$

$$\overset{m,n-1}{n}=0.$$

III.

Der vorhergehenden Relationen kann man sich jetzt zur allgemeinen Auflösung der n folgenden Gleichungen des ersten Grades:

$$A_1+A_2\alpha_1+A_3\alpha_1^2+A_4\alpha_1^3+\ldots\ldots+A_n\alpha_1^{n-1}=a_1,$$

$$A_1+A_2\alpha_2+A_3\alpha_2^2+A_4\alpha_2^3+\ldots\ldots+A_n\alpha_2^{n-1}=a_2,$$

$$A_1+A_2\alpha_3+A_3\alpha_3^2+A_4\alpha_3^3+\ldots\ldots+A_n\alpha_3^{n-1}=a_3,$$

$$A_1+A_2\alpha_4+A_3\alpha_4^2+A_4\alpha_4^3+\ldots\ldots+A_n\alpha_4^{n-1}=a_4,$$

u. s. w.

$$A_1+A_2\alpha_n+A_3\alpha_n^2+A_4\alpha_n^3+\ldots\ldots+A_n\alpha_n^{n-1}=a_n$$

zwischen den n unbekannten Grössen

Digitized by Google

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4, \ldots A_n$$

sehr einfach auf folgende Art bedienen.

Man multiplicire die obigen n Gleichungen nach der Reihe mit den folgenden $m$ten Kombinationsklassen, wo wir die Bezeichnung grösserer Deutlichkeit wegen gegen früher absichtlich etwas verändert haben:

$$\overset{m}{K}(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5, \ldots \alpha_n),$$

$$\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5, \ldots \alpha_n)$$

$$\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_5, \ldots \alpha_n)$$

$$\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_5, \ldots \alpha_n)$$

u. s. w.

$$\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots \alpha_{n-1});$$

dividire dieselben dann nach der Reihe durch die Producte

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n),$$

$$(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n),$$

$$(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n),$$

$$(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n),$$

u. s. w.

$$(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1});$$

und addire sie hierauf sämmtlich zusammen; so erhält man offenbar die folgende Gleichung:

$$A_1.\overset{m,0}{(n)}+A_2.\overset{m,1}{(n)}+A_3.\overset{m,2}{(n)}+\ldots+A_{n-m-1}.\overset{m,n-m-2}{(n)}$$
$$+A_{n-m}.\overset{m,n-m-1}{(n)}$$
$$+A_{n-m+1}.\overset{m,n-m}{(n)}+A_{n-m+2}.\overset{m,n-m+1}{(n)}+\ldots+A_n.\overset{m,n-1}{(n)}$$
$$=\frac{\overset{m}{K}(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots \alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}\,a_1$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots \alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}\,a_2$$
$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots \alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}\,a_3$$

Digitized by Google

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ldots\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}a_4$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}a_n,$$

und es ist folglich nach II.

$$(-1)^m.A_{n-m}=\frac{\overset{m}{K}(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots\alpha_n)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}a_1$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots\alpha_n)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}a_2$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_5,\ldots\alpha_n)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}a_3$$

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_5,\ldots\alpha_n)}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}a_4$$

u. s. w.

$$+\frac{\overset{m}{K}(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\alpha_{n-1})}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}a_n,$$

ein völlig independenter Ausdruck für jede beliebige der gesuchten n unbekannten Grössen.

Bemerkt mag noch werden, was sich übrigens auch nach dem Vorhergehenden eigentlich schon von selbst versteht, dass

$$A_n=\frac{a_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_1-\alpha_5)\ldots(\alpha_1-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_2-\alpha_5)\ldots\ldots(\alpha_2-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_3-\alpha_5)\ldots(\alpha_3-\alpha_n)}$$

$$+\frac{a_4}{(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)(\alpha_4-\alpha_5)\ldots(\alpha_4-\alpha_n)}$$

u. s. w.

$$+\frac{a_n}{(\alpha_n-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_2)(\alpha_n-\alpha_3)(\alpha_n-\alpha_4)\ldots(\alpha_n-\alpha_{n-1})}$$

ist.

Auf diese Weise sind die gegebenen n Gleichungen des ersten Grades vollständig und völlig independent aufgelöst. Zu-

Digitized by Google

gleich enthält das Obige verschiedene bemerkenswerthe arithmetische Sätze, von denen der eine von uns besonders hervorgehoben worden ist; die übrigen wird der aufmerksame Leser gewiss auch ohne besondere Erinnerung nicht unbeachtet gelassen haben.

XXX.

Ueber einige Sätze der Zahlenlehre.

Von

dem Herausgeber.

Aus den in der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen allgemeinen arithmetischen Theoremen lassen sich verschiedene bemerkenswerthe Sätze von den Zahlen ableiten, von denen ich einige in dem vorliegenden Aufsatze entwickeln will, ohne jedoch für jetzt die Absicht zu haben, diesen Gegenstand zu erschöpfen.

Wenn wir der Kürze wegen jetzt

$$\overset{1}{\Pi}_n = (a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_1-a_5)\ldots(a_1-a_n),$$

$$\overset{2}{\Pi}_n = (a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_4)(a_2-a_5)\ldots(a_2-a_n),$$

$$\overset{3}{\Pi}_n = (a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_3-a_4)(a_3-a_5)\ldots(a_3-a_n),$$

$$\overset{4}{\Pi}_n = (a_4-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_3)(a_4-a_5)\ldots(a_4-a_n),$$

u. s. w.

$$\overset{n}{\Pi}_n = (a_n-a_1)(a_n-a_2)(a_n-a_3)(a_n-a_4)\ldots(a_n-a_{n-1})$$

setzen; so ist in der in der vorhergehenden Abhandlung gebrauchten Bezeichnung

$$\overset{\mu}{(n)} = \frac{a_1{}^\mu}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{a_2{}^\mu}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{a_3{}^\mu}{\overset{3}{\Pi}_n} + \ldots + \frac{a_n{}^\mu}{\overset{n}{\Pi}_n}.$$

Wenn nun von jetzt an

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots,\ a_n$$

lauter (positive oder negative) ganze Zahlen bezeichnen, und $\mu+1$ eine in keiner dieser Zahlen aufgehende positive Primzahl ist, so ist, wenn

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4, \ldots \lambda_n$$

gewisse positive ganze Zahlen bezeichnen, nach dem Fermat'schen Satze

$$\begin{aligned} a_1{}^{\mu} &= \lambda_1(\mu+1)+1, \\ a_2{}^{\mu} &= \lambda_2(\mu+1)+1, \\ a_3{}^{\mu} &= \lambda_3(\mu+1)+1, \\ a_4{}^{\mu} &= \lambda_4(\mu+1)+1, \\ &\text{u. s. w.} \\ a_n{}^{\mu} &= \lambda_n(\mu+1)+1; \end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\overset{n}{(n)} = (\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\}$$
$$+ \frac{1}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{1}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{1}{\overset{3}{\Pi}_n} + \ldots + \frac{1}{\overset{n}{\Pi}_n},$$

d. i. in der eingeführten Bezeichnung:

$$\overset{\mu}{(n)} = (\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\} + \overset{0}{(n)}.$$

Weil nun aber, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{0}{(n)} = 0$$

ist, so ist

$$\overset{\mu}{(n)} = (\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_2}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_3}{\overset{3}{\Pi}_n} + \ldots + \frac{\lambda_n}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\},$$

und folglich

$$\overset{\mu}{(n)}.\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$
$$= (\mu+1)\left\{\begin{aligned} &\lambda_1\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ &+\lambda_2\overset{1}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ &+\lambda_3\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\ &\quad\text{u. s. w.} \\ &+\lambda_n\overset{1}{\Pi}_n\overset{2}{\Pi}_n\overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n \end{aligned}\right\}.$$

Digitized by Google

Setzen wir jetzt $\mu = n-1$, so dass also n eine in keiner der ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorhergehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{\mu}{(n)} = \overset{n-1}{(n)} = 1$$

ist:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
= n \Big\{ \quad & \lambda_1 \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
& + \lambda_2 \overset{1}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
& + \lambda_3 \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
& \quad \text{u. s. w.} \\
& + \lambda_n \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n-1}{\Pi}_n \Big\},
\end{aligned}$$

und die Primzahl n geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Nun ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}
&\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n \\
= (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} . & (\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2 \\
& \times (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2 \\
& \times (\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2 \\
& \text{u. s. w.} \\
& \times (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2,
\end{aligned}$$

und nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen kann die Primzahl n in dem Producte

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_1-\alpha_n)^2 \\
&\times (\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_2-\alpha_n)^2 \\
&\times (\alpha_3-\alpha_4)^2 \ldots (\alpha_3-\alpha_n)^2 \\
&\text{u. s. w.} \\
&\times (\alpha_{n-1}-\alpha_n)^2
\end{aligned}$$

nur dann aufgehen, wenn sie in dem Producte

Digitized by Google

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots\ldots(a_1-a_n)$$
$$\times(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots\ldots(a_2-a_n)$$
$$\times(a_3-a_4)\ldots\ldots(a_3-a_n)$$
u. s. w.
$$\times(a_{n-1}-a_n)$$

aufgeht; also ergiebt sich aus dem Obigen unmittelbar der folgende Satz:

I.

Wenn die positive oder negative Primzahl n in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots a_{(n)}$$

aufgeht, wo jetzt (n) den absoluten Werth von n bezeichnen soll; so geht diese Primzahl n jederzeit in dem Producte

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_{(n)})$$
$$\times(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_{(n)})$$
$$\times(a_3-a_4)\ldots(a_3-a_{(n)})$$
u. s. w.
$$\times(a_{(n)-1}-a_{(n)})$$

auf.

Um ein Beispiel zu geben, so sei $n=5$ und

$$a_1=+12,\ a_2=-6,\ a_3=-9,\ a_4=+8,\ a_5=+4.$$

Dann ist

$$a_1-a_2=+18,\ a_1-a_3=+21,\ a_1-a_4=+4,\ a_1-a_5=+8;$$
$$a_2-a_3=+3,\ a_2-a_4=-14,\ a_2-a_5=-10;$$
$$a_3-a_4=-17,\ a_3-a_5=-13;$$
$$a_4-a_5=+4;$$

woraus auf der Stelle die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet, da 5 in -10 aufgeht.

Digitized by Google

Wenn wir in der vorher gefundenen Gleichung

$$\begin{aligned}
\overset{\mu}{(n)}.\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n
=(\mu+1)\left\{\begin{array}{r}
\lambda_1\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
+\lambda_2\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
+\lambda_3\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
\text{u. s. w.}\\
+\lambda_n\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n-1}{\Pi}_n
\end{array}\right\}
\end{aligned}$$

aber $\mu=n$ setzen, so dass also jetzt $n+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots\alpha_n$$

aufgehende Primzahl ist, so wird die vorstehende Gleichung, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n}{(n)}=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n$$

ist:

$$\begin{aligned}
(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n
=(n+1)\left\{\begin{array}{r}
\lambda_1\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
+\lambda_2\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
+\lambda_3\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n\\
\text{u. s. w.}\\
+\lambda_n\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\ldots\overset{n-1}{\Pi}_n
\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

und die Primzahl $n+1$ geht also hiernach unter den gemachten Voraussetzungen immer in dem Producte

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots+\alpha_n)\,\overset{1}{\Pi}_n\,\overset{2}{\Pi}_n\,\overset{3}{\Pi}_n\,\overset{4}{\Pi}_n\ldots\overset{n}{\Pi}_n$$

auf.

Auf ganz ähnliche Art wie vorher leitet man hieraus mit Hülfe des Satzes des Euklides von den Primzahlen den folgenden Satz ab, wobei wir jedoch, was übrigens, — wenigstens hier —, eigentlich nicht nöthig wäre, der Kürze wegen, negative Werthe der Primzahlen ausschliessen wollen:

Digitized by Google

II.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n$$

aufgeht, und auch deren Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

durch $n+1$ nicht ohne Rest theilbar ist; so geht diese Primzahl $n+1$ jederzeit in dem Producte

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\ldots(a_1-a_n)\\ \times(a_2-a_3)(a_2-a_4)\ldots(a_2-a_n)\\ \times(a_3-a_4)\ldots(a_3-a_n)\\ \text{u. s. w.}\\ \times(a_{n-1}-a_n)\end{aligned}$$

auf.

Für $n+1=5$ und

$$a_1=-12,\ a_2=+8,\ a_3=-11,\ a_4=+3$$

also

$$a_1+a_2+a_3+a_4=-12$$

ist

$$\begin{aligned}a_1-a_2=-20,\ a_1-a_3=-1,\ a_1-a_4=-15;\\ a_2-a_3=+19,\ a_2-a_4=+5;\\ a_3-a_4=-14;\end{aligned}$$

woraus sogleich die Richtigkeit des Satzes in dem vorliegenden speciellen Falle erhellet.

Wäre $n+1=5$ und

$$a_1=-9,\ a_2=+7,\ a_3=-11,\ a_4=-2$$

also

$$a_1+a_2+a_3+a_4=-15;$$

so wäre

$$\begin{aligned}a_1-a_2=-16,\ a_1-a_3=+2,\ a_1-a_4=-7;\\ a_2-a_3=+18,\ a_2-a_4=+9;\\ a_3-a_4=-9;\end{aligned}$$

und $n+1$ würde also in diesem Falle, wo die Summe

Digitized by Google

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$

durch $n+1$ ohne Rest theilbar ist, in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4)\end{aligned}$$

nicht aufgehen.

Aus dem vorhergehenden Satze ergiebt sich nun aber auch unmittelbar der folgende Satz:

III.

Wenn die positive Primzahl $n+1$, welche grösser als 2 ist, in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots. \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in der Summe

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\ldots.+\alpha_n$$

auf.

Ginge nämlich $n+1$ in dieser Summe nicht auf, so müsste es unter den gemachten Voraussetzungen nach dem vorhergehenden Satze in dem Producte

$$\begin{aligned}(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)\ldots..(\alpha_1-\alpha_n)\\ \times(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4)\ldots..(\alpha_2-\alpha_n)\\ \times(\alpha_3-\alpha_4)\ldots..(\alpha_3-\alpha_n)\\ \text{u. s. w.}\\ \times(\alpha_{n-1}-\alpha_n),\end{aligned}$$

und folglich nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen nothwendig mindestens in einem Factor dieses Products aufgehen, was der gemachten Voraussetzung widerstreitet.

Nach einer anderen in der vorhergehenden Abhandlung eingeführten Bezeichnung ist

Digitized by Google

$$\overset{m,\mu}{(n)} = \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n).\alpha_1{}^{\mu}}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n).\alpha_2{}^{\mu}}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n).\alpha_3{}^{\mu}}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1).\alpha_n{}^{\mu}}{\overset{n}{\Pi}_n}.$$

Ist nun $\mu+1$ eine in keiner der positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots \alpha_n$$

aufgehende Primzahl, so erhalten wir ganz auf ähnliche Art wie oben mittelst des Fermat'schen Satzes die Gleichung

$$\overset{m,\mu}{(n)} = (\mu+1)\left\{\frac{\lambda_1.\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_2.\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\lambda_3.\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{\lambda_n.\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n}\right\} \\ + \frac{\overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} + \frac{\overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \frac{\overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n},$$

Digitized by Google

d. i., wie leicht erhellet:

$$\overset{m,\mu}{(n)} - \overset{m,0}{(n)} = (\mu+1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1 . \overset{m}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_2 . \overset{m}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_3 . \overset{m}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \dfrac{\lambda_n . \overset{m}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n} \end{array}\right\};$$

wo wie früher $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \lambda_n$ ganze Zahlen sind.

Setzen wir nun

$$m = n-1, \quad \mu = n;$$

so wird die vorstehende Gleichung:

$$\overset{n-1,n}{(n)} - \overset{n-1,0}{(n)} = (n+1)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_1 . \overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{1}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_2 . \overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n)}{\overset{2}{\Pi}_n} \\ + \dfrac{\lambda_3 . \overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n)}{\overset{3}{\Pi}_n} \\ \text{u. s. w.} \\ + \dfrac{\lambda_n . \overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1)}{\overset{n}{\Pi}_n} \end{array}\right\};$$

also, weil, wie in der vorhergehenden Abhandlung gezeigt worden ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = (-1)^{n-1}, \quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

d. i., weil unter der oben gemachten Voraussetzung, wenn nur die Primzahl $n+1$ grösser als 2 ist, jedenfalls $n-1$ eine ungerade Zahl ist,

$$\overset{n-1,0}{(n)} = -1, \quad \overset{n-1,n}{(n)} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n$$

Digitized by Google

ist:

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n + 1)\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

$$= (n+1)! \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n . \overset{n-1}{K}(2,3,4,5,\ldots,n) \\ + \lambda_2 \overset{1}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n . \overset{n-1}{K}(1,3,4,5,\ldots,n) \\ + \lambda_3 \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n . \overset{n-1}{K}(1,2,4,5,\ldots,n) \\ \text{u. s. w.} \\ + \lambda_n \overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n . \overset{n-1}{K}(1,2,3,4,\ldots,n-1) \end{array}\right\},$$

woraus sich ergiebt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n + 1)\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

aufgeht.

Geht nun aber die Primzahl $n+1$ in keiner der Differenzen

$$\begin{array}{l} a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ a_1-a_4,\ldots,a_1-a_n; \\ \qquad a_2-a_3,\ a_2-a_4,\ldots,a_2-a_n; \\ \qquad\qquad a_3-a_4,\ldots,a_3-a_n; \\ \qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ \qquad\qquad\qquad a_{n-1}-a_n \end{array}$$

auf, so geht dieselbe nach dem Satze des Euklides von den Primzahlen offenbar auch in dem Producte

$$\overset{1}{\Pi}_n \overset{2}{\Pi}_n \overset{3}{\Pi}_n \overset{4}{\Pi}_n \ldots\ldots \overset{n}{\Pi}_n$$

nicht auf, und muss folglich nach demselben Satze unter den oben gemachten Voraussetzungen jederzeit in

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n + 1$$

aufgehen.

Hierdurch werden wir unmittelbar zu dem folgenden merkwürdigen Satze geführt:

IV.

Wenn die positive 2 übersteigende Primzahl $n+1$ in keiner der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ldots\ a_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von ein-

Digitized by Google

ander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n+1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n\equiv-1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt. Auch ist, wenn die Primzahl $n+1=2$ ist und nur in α_1 nicht aufgeht, offenbar immer

$$\alpha_1\equiv-1 \text{ (Mod. 2)},$$

was sich von selbst versteht.

Um ein Beispiel zu diesem Satze zu geben, sei $n+1=5$ und

$$\alpha_1=+7,\ \alpha_2=-6,\ \alpha_3=+11,\ \alpha_4=+13;$$

also

$$\alpha_1-\alpha_2=+13,\ \alpha_1-\alpha_3=-4,\ \alpha_1-\alpha_4=-6;$$
$$\alpha_2-\alpha_3=-17,\ \alpha_2-\alpha_4=-19;$$
$$\alpha_3-\alpha_4=-2;$$

woraus man sieht, dass alle bei dem vorhergehenden Satze gemachten Voraussetzungen in diesem Falle erfüllt sind. Weil nun

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=+7.-6.+11.+13=-6006,$$

also

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+1=-6005$$

ist, so sieht man, dass der Satz im vorliegenden Falle richtig ist.

Wenn man für

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ldots,\ \alpha_n$$

die positiven ganzen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n$$

setzt, so sind die Voraussetzungen dieses Satzes, wenn nur $n+1$ eine Primzahl ist, offenbar vollständig erfüllt, und man erhält also aus dem Vorhergehenden die Congruenz

$$1.2.3.4\ldots n\equiv-1 \text{ (Mod. } n+1),$$

welche den bekannten Wilson'schen Satz ausspricht, der also unter dem vorhergehenden weit allgemeineren Theoreme als ein specieller Fall enthalten ist, und sich mit der grössten Leichtigkeit aus demselben ableiten lässt.

Da mir die vorhergehende Erweiterung des Wilson'schen Satzes bemerkenswerth zu sein scheint, so habe ich mich veranlasst gesehen, nachzuforschen, ob nicht vielleicht der Fermat'sche Satz einer ähnlichen Erweiterung fähig ist, und will im Folgenden das, was sich mir in dieser Beziehung bis jetzt durch ziemlich einfache Betrachtungen dargeboten hat, mittheilen.

Wir wollen annehmen, dass $n+1$ eine positive Primzahl sei, und

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$$

sollen n positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, von denen wenigstens eine, die wir durch α_k bezeichnen wollen, durch $n+1$ nicht theilbar ist. Dagegen sollen die Differenzen

$$\alpha_k-\alpha_1,\ \alpha_k-\alpha_2, \ldots,\ \alpha_k-\alpha_{k-1},\ \alpha_k-\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_k-\alpha_n$$

sämmtlich durch $n+1$ theilbar sein, woraus dann sehr leicht und ganz von selbst folgt, dass überhaupt die sämmtlichen Differenzen durch $n+1$ theilbar sind, welche man erhält, wenn man je zwei der Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$$

von einander subtrahirt, so dass man also auch bei der folgenden Betrachtung von der Annahme ausgehen kann, dass diese letztere Bedingung erfüllt sei, weil ihre Erfüllung durch die Erfüllung der ersteren allerdings einfacheren Bedingung unmittelbar und ganz von selbst herbeigeführt wird.

Setzen wir nun

$$\alpha_k-\alpha_1=\lambda_{1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k-\alpha_2=\lambda_{2,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k-\alpha_3=\lambda_{3,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_k-\alpha_{k-1}=\lambda_{k-1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k-\alpha_k=\lambda_{k,k}.(n+1),$$
$$\alpha_k-\alpha_{k+1}=\lambda_{k+1,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_k-\alpha_n=\lambda_{n,k}.(n+1);$$

wo nach der gemachten Voraussetzung

$$\lambda_{1,k}, \lambda_{2,k}, \lambda_{3,k}, \lambda_{4,k}, \ldots \lambda_{n,k}$$

lauter ganze Zahlen sind, da offenbar auch das verschwindende $\lambda_{k,k}$ in diese Kategorie gerechnet werden kann; so ist

$$\alpha_1=\alpha_k-\lambda_{1,k}.(n+1),$$
$$\alpha_2=\alpha_k-\lambda_{2,k}.(n+1),$$

Digitized by Google

$$\alpha_3 = \alpha_k - \lambda_{3,k}.(n+1),$$
$$\alpha_4 = \alpha_k - \lambda_{4,k}.(n+1),$$
u. s. w.
$$\alpha_n = \alpha_k - \lambda_{n,k}.(n+1);$$

und wenn man nun auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen multiplicirt, so erhält man offenbar eine Gleichung, welche, wenn L eine ganze Zahl bezeichnet, im Allgemeinen von der Form

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n = \alpha_k^n + L(n+1)$$

ist. Also ist auch

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n - 1 = \alpha_k^n - 1 + L(n+1),$$

und da nun nach dem Fermat'schen Satze, weil nach der Voraussetzung α_k nicht durch die Primzahl $n+1$ theilbar ist, jederzeit $\alpha_k^n - 1$ durch $n+1$ theilbar ist, so ist nach dem Vorhergehenden unter den gemachten Voraussetzungen offenbar jederzeit auch

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n - 1$$

durch die Primzahl $n+1$ theilbar. Wir erhalten daher den folgenden Satz:

V.

Wenn die positive Primzahl $n+1$ wenigstens in *einer* der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots \alpha_n$$

nicht aufgeht, dagegen die sämmtlichen Differenzen durch $n+1$ ohne Rest theilbar sind, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n - 1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_n \equiv +1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Dass unter diesem Satze, wenn man ihn unabhängig von dem Fermat'schen Satze nach seinem gewöhnlichen Ausdrucke beweisen könnte, dieser letztere Satz als ein besonderer Fall enthalten sein würde, leuchtet auf der Stelle ein.

Setzt man z. B. $n+1=5$ und

$$\alpha_1 = +12, \; \alpha_2 = +7, \; \alpha_3 = +17, \; \alpha_4 = +2;$$

Digitized by Google

so sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes offenbar vollständig erfüllt, und es ist

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 1 = 2855,$$

d. h. durch 5 ohne Rest theilbar, wie es nach dem obigen Satze erforderlich ist.

Ist aber z. B. $n+1=5$ und

$$\alpha_1 = +17, \quad \alpha_2 = +7, \quad \alpha_3 = +2, \quad \alpha_4 = +8;$$

so sind die Voraussetzungen des vorhergehenden Satzes offenbar nicht vollständig erfüllt, und es ist

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 1 = 1903$$

durch 5 nicht theilbar.

Verbindet man die Sätze V. und VI. mit einander, und beachtet, als sich von selbst verstehend, dass, wenn nur 2 in α_1 nicht aufgeht, offenbar immer

$$\alpha_1 \equiv \mp 1 \text{ (Mod. 2)}$$

ist, so ergiebt sich der folgende Satz:

VI.

Wenn die positive Primzahl $n+1$ in keiner der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

und auch in keiner der Differenzen aufgeht, welche man erhält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n + 1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_n \equiv -1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Wenn dagegen die positive Primzahl $n+1$ wenigstens in *einer* der n positiven oder negativen ganzen Zahlen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_n$$

und in allen den Differenzen aufgeht, welche man er-

Digitized by Google

hält, wenn man je zwei dieser Zahlen von einander subtrahirt; so geht die Primzahl $n+1$ jederzeit in

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n-1$$

auf, oder es findet unter den gemachten Voraussetzungen jederzeit die Congruenz

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_n\equiv+1 \text{ (Mod. } n+1)$$

Statt.

Indem ich wiederhole, dass es nicht meine Absicht ist, diesen Gegenstand in der vorliegenden Abhandlung zu erschöpfen, will ich mir nur noch erlauben, dieselbe mit den folgenden allgemeinen Bemerkungen zu schliessen. Es hat mir nämlich immer geschienen, dass viele der bereits entdeckten höchst merkwürdigen Gesetze der Zahlenlehre noch unter einer zu speciellen Form ausgedrückt und aufgefasst, und noch nicht auf ihren wahren möglichst allgemeinen Ausdruck gebracht worden sind; und so sehr ich auch die vielen trefflichen Leistungen, namentlich der neueren Zeit, auf diesem Gebiete anzuerkennen bereit bin, so scheint mir doch eine immer noch grössere Erweiterung und Verallgemeinerung der Gesichtspunkte, unter denen die Gesetze dieser herrlichen Wissenschaft gegenwärtig aufgefasst werden, nöthig zu sein, wenn dieselbe noch raschere Fortschritte als bisher machen soll. Was den obigen allgemeinen Satz VI. betrifft, so ist es mir sehr wahrscheinlich, dass sich derselbe noch mehr verallgemeineren lässt, vielleicht in ähnlicher Weise, wie schon früher der Fermat'sche und Wilson'sche Satz verallgemeinert worden sind, was ich hier, ohne mich darüber weiter zu verbreiten, als bekannt voraussetzen kann. Auch werden sich gewiss noch ganz andere einfachere, bessere, namentlich mehr als meine obige Darstellung der wahren Natur des Gegenstandes entsprechende Wege einschlagen lassen, um zu dem Beweise desselben zu gelangen, wobei zugleich die Entdeckung noch anderer Gesetze nicht ausbleiben wird, wie dies immer bei Untersuchungen dieser Art, die in der That auch eben dadurch einen ganz besonderen Reitz erhalten, der Fall zu sein pflegt, wobei ich nochmals bemerke, dass ich in dem Obigen keineswegs eine völlig erschöpfende Darstellung der betreffenden Sätze mir als Zweck vorgesetzt habe, und weitere Untersuchungen über dieselben für jetzt anderen, die sich etwa für diesen Gegenstand interessiren möchten, gern überlasse und anheimstelle.

Digitized by Google

XXXI.

Ueber strenge und gelinde Winter.

Auszug aus einem Briefe des

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischen Rechners an der Königl. Sternwarte zu Berlin

an den Herausgeber.

(Mit den beiden mit *A.* und *B.* bezeichneten lithographirten Tafeln.)

Sie wünschten meine Mittheilungen über Temperatur-Curven zu erhalten, ich werde sie diesem Briefe beifügen und die Curven mitschicken. Meine Hypothese findet, wie alles Neue, Widerspruch, doch auch zu meiner Freude bereits Anklang, ich werde mich auch künftig so lange damit beschäftigen, als ich nicht von der Fruchtlosigkeit dieser Betrachtungen überzeugt werde. Die anbei erfolgenden Zeichnungen sind übrigens die einzigen, welche ich besitze, daher mein Wunsch, sie nach der Benutzung zurückzuerhalten. — Fast jeder Winter, welcher sich entweder durch besonders strenge Kälte oder durch gelinde Witterung auszeichnet, pflegt in den öffentlichen Blättern mit den Worten besprochen zu werden, dass die ältesten Leute sich keines ähnlichen erinnern. Dies war z. B. mit dem vorjährigen (1845—1846) ziemlich gelinden Winter der Fall. Man könnte hierauf kurz antworten, dass bei alten Leuten das Gedächtniss in der Regel schwach wird und sie sich deshalb keiner ähnlichen Erscheinung erinnern. Allein aus eigener Erfahrung weiss ich, wie leicht die Leiden und Freuden einer einzelnen Jahreszeit vergessen werden, wenn man nicht durch besondere Hülfsmittel die Erinnerung daran festhält, und schon deshalb glaube ich, dass es nicht ganz uninterressant sein wird, auf den vorliegenden Blättern den Verlauf der Temperatur während der 10 vorhergehenden und des gegenwärtigen Winters (1846—47) graphisch vor Augen gestellt zu sehen. Bei etwas aufmerksamer Betrachtung dieser verschiedenen Curven wird man charakteristische Unterschiede derselben wahrnehmen, jedoch glaube ich im Stande zu sein, darzuthun, dass die entschieden gelinden Winter sich wesentlich von den strengen unterscheiden, und dass man diese Unterschiede schon in der Regel an einem verhältnissmässig kleinen Theile jeder Curve wahrnehmen könne. Sollte sich dies, was freilich wegen der ge-

ringen Anzahl der zu Grunde gelegten Curven immer noch problematisch bleibt, später bestätigen; so würde man alsdann im Stande sein, schon beim Beginnen eines jeden Winters seinen Charakter zu erlauschen.

Ehe ich zu diesen Betrachtungen übergehe, liegt es mir ob, über die Beobachtungen Rechenschaft zn geben, auf welche diese Curven begründet sind. Es sind dies die Temperaturen, welche im wahren Mittage an dem Normal-Thermometer der hiesigen Sternwarte abgelesen und welche theils bereits durch den Druck veröffentlicht, theils durch Herrn Dr. Galle mir freundlichst mitgetheilt worden sind. In den ersten bereits erschienenen Jahrgängen wurde aus drei, während des Tages angestellten Beobachtungen die jedesmalige mittlere Temperatur abgeleitet und ich würde diese zur Anlage der Curven gewählt haben, wenn nicht in den spätern Jahrgängen die Temperatur des Mittages allein angegeben wäre. Der Consequenz wegen wählte ich daher von Anfang an diese einzelne Temperatur, welche übrigens im Winter wenig von der mittlern Temperatur des Tages verschieden ist.

Es war z. B.

am 15.	Jan.	1836	die Mittagstemper.		=+2°,77,	die mittlere		=+2°,60,
„ 15.	„	1837	„	„	−2, 29,	„	„	−2, 24,
„ 15.	„	1838	„	„	−8, 50,	„	„	−9, 28,
„ 15.	Febr.	„	„	„	−3, 06,	„	„	−4, 01,
„ 15.	März	„	„	„	+6, 26,	„	„	+5, 60.

Diese Tage habe ich ohne besondere Auswahl angesetzt und die einzelnen, bis 1° ansteigenden Unterschiede würden freilich von Belang sein, wenn ich, wie es bisher meistens geschehen, die mittlern Temperaturen der ganzen Winter bestimmen und aus dem Resultat den Charakter des strengen oder gelinden ableiten wollte. Hier werden wir es jedoch mehr mit dem Gange der Temperatur von einem Tage zum andern, als mit der absoluten Grösse derselben an einzelnen Tagen zu thun haben und daher werden jene Unterschiede von keinem besonderen Belange sein.

In der Regel erstrecken sich die Curven über die fünf Monate vom 15. November bis zum 15. März, und nur in Einem Falle, im Frühjahre 1845, habe ich ein kleines Stück bis zum 23. März hinzugefügt, weil bis zu diesem Tage der damalige strenge Nachwinter anhielt. Die starke horizontale, durch jede Curve hindurchgehende Linie bezeichnet die Temperatur 0°, jedes Intervall in vertikaler Richtung entspricht 2° R., jede vertikale Linie gehört einem Tage an und die stark ausgezogenen vertikalen Linien bezeichnen den Anfang der Monate. In den Schaltjahren 1840 und 1844 gehört die Linie des 1. März dem 29. Februar an, dieselbe Anomalie findet bei den folgenden Linien bis zum 15. März in diesen Jahren statt.

Um nun von strengen und gelinden Wintern sprechen zu können, schicke ich folgende Erklärung voraus. Unter einem strengen Winter will ich einen solchen verstehen, in welchem die

Digitized by Google

Temperatur drei bis vier Wochen hindurch ganz oder fast unausgesetzt unter dem Gefrierpunkte bleibt, ohne Rücksicht auf den absolut tiefen Stand des Thermometers. Unter einem gelinden Winter verstehe ich einen solchen, in welchem die Temperatur an mehrern einzelnen Tagen auch mehr oder weniger tief unter den Gefrierpunkt sinken mag, wo aber die Dauer dieser niedrigen Temperatur beschränkt ist und die letztere mit eintretender höherer Temperatur von längerer Dauer abwechselt. Diese Erklärungen stimmen keinesweges mit denjenigen überein, welche in den meteorologischen Lehrbüchern aufgestellt zu werden pflegen, es können vielleicht selbst Fälle vorkommen, in denen ein strenger Winter nach meiner Erklärung einem gelinden nach jener entspricht und umgekehrt; allein ich wollte zunächst keine neuen Bezeichnungen einführen, wie etwa wenn ich statt eines strengen einen beständigen oder hartneckigen Winter aufgestellt hätte. Uebrigens bitte ich meine Erklärungen nur als für die hier anzustellenden Betrachtungen aufgestellt anzusehen, nur so darf ich sicher sein, nicht missverstanden zu werden.

Betrachten wir demgemäss die vorliegenden 11 Curven, so entsprechen unzweifelhaft die fünf folgenden I, III, VII, VIII und X gelinden, die vier II, V, IX und XI strengen Wintern; die zwei übrigen IV und VI weder ganz strengen noch ganz gelinden Wintern, sie neigen sich jedoch mehr den erstern zu. Die erstgenannten fünf Curven sind von den vier zweitgenannten wesentlich verschieden, allein man wird für jede dieser beiden Klassen ein gemeinschaftliches Kennzeichen herausfinden können, welches sich bald früher bald später zeigt und wonach man den weitern Verlauf des Winters beurtheilen kann.

Ich behaupte demnach, dass in den gelinden Wintern sich anfangs eine kurze Kälteperiode einstellt, welche mit einer, längere Zeit anhaltenden, wärmern Periode abwechselt. In der Curve I., von 1836—1837, dauerte die erste Periode vom 23. bis zum 27. November und die darauf folgende wärmere Periode vom 28. November bis zum 23. December. In der Curve III., von 1838—1839, fand die Kälte vom 19. bis zum 28. November, die Wärme vom 29. November bis zum 18. Januar statt. In der Curve VII., von 1842—1843, herrschte die Kälte nur 3—4 Tage und die darauf folgende Wärme 12 Tage hindurch. In der Curve VIII., von 1843—1844, stand das Thermometer nur Einen Tag unter 0 und es folgte eine warme Periode von 26tägiger Dauer. Endlich währte in der Curve X., von 1845—1846, die Kälteperiode etwa 3, die warme 18 Tage. Dieser letztgenannte Winter wurde als ein auffallend gelinder in den Zeitungen besprochen, allein mit einem Blick auf die Curven sieht man, dass er bis Ende Februar die beiden Winter von 1842—1843 und 1843—1844 in dieser Beziehung keinesweges übertraf. Zieht man die Ende Februar eingetretene hohe Temperatur in Betracht, so musste hierdurch freilich die mittlere Temperatur des ganzen Winters bedeutend erhöht werden und unter den verzeichneten Curven finden wir nur in der von 1841—1842 ein anderes in dieser Beziehung nahe kommendes Beispiel.

Von den strengen Wintern behaupte ich, dass nach dem Eintritt der ersten Kälte das Thermometer früher oder später wohl

Digitized by Google

wieder über 0 steigen mag, dass aber diese wärmere Periode, welche ich kurz die Krisis nennen will, nur von kurzer Dauer sein wird. So sehen wir in der Curve II., von 1837—1838, das Thermometer zuerst am 11. December unter 0 sinken und bis zum 27. in Perioden von wenigen Tagen auf- und niedersteigen, worauf am letztgenannten Tage die Kälte entschieden das Uebergewicht erhält und wir in dem folgenden Theile der Curve das wahre Ideal eines strengen Winters wahrnehmen. In der Curve V., von 1840—1841, sinkt das Thermometer am 9. December unter 0 und es tritt sogleich eine anhaltende Kälteperiode bis zum 1. Januar ein. Jetzt findet eine Krisis von 3 Tagen statt, wo die Wärme jedoch nicht voll 1^0 erreicht und es folgen hierauf im Januar und Februar bis Anfang März die Kälteperioden so überwiegend, dass der ganze Winter nothwendig ein sehr strenger genannt werden muss. Der dritte strenge Winter findet sich in der Curve X., von 1844—1845. Hier tritt die erste Kälte bereits am 28. November ein und währt bis zum 15. December. Nun folgt eine nur 6 Tage währende Krisis, hierauf eine achttägige Kälteperiode und dann während des ganzen Januars gelinde Kälte. Dass aber das Kennzeichen des strengen Winters richtig war, sehen wir an der folgenden Kälteperiode, welche mit sehr kurzen und geringen Unterbrechungen vom 7. Februar bis zum 23. März fortdauert. Man könnte diesen Winter als die Verbindung zweier strengen Winter, eines Früh- und Spätwinters, durch einen gelinden Januar bezeichnen. Der vierte zu betrachtende strenge Winter ist der letzte von 1846—1847, unter XI. verzeichnete. Er beginnt, ähnlich wie der eben besprochene, am letzten November und lässt sich sogleich als ein hartneckiger an, wenn er auch in den ersten zehn Tagen sich nicht als sehr streng darstellt. Die am 20. December eintretende Krisis währt nur vier Tage und von da ab tritt der strenge Winter ganz entschieden ein, indem vom 24. December bis zum 24. Januar die Temperatur sich nicht über den Gefrierpunkt erhebt. Diese vier strengen Winter entsprechen demnach dem oben aufgestellten Kennzeichen.

Es bleiben nun noch zwei Curven zu betrachten übrig. Die unter IV. verzeichnete, von 1839—1840, entspricht in ihrem Lauf vom 2. bis 21. December einem strengen Winter, man wird den ganzen Verlauf bis zum 16. Januar auch als einen solchen betrachten können, dann aber treten Wärmeperioden überwiegend ein und es kann demnach dieser Winter nur als ein kurzer und strenger Frühwinter bezeichnet werden. Aehnlich stellt uns die Curve VI., von 1841—1842, einen kurzen strengen Winter dar, welcher vorzugsweise in den Januar fällt, wo die Kälte entschieden vorherrschend ist und 16 kalte Tage ohne Unterbrechung vorliegen. Die beiden zuletzt besprochenen Winter entsprechen nun zwar, wie ich eben angedeutet habe, dem Charakter eines strengen, und können als solche betrachtet werden; ich halte es jedoch für besser, sie bei der aufzustellenden Analogie als Ausnahmefälle auszuschliessen.

Fassen wir nun das Resultat der neun andern Winter zusammen, von denen fünf gelinde und vier strenge waren, so kann man die beiderseitigen Kennzeichen auf folgende Weise mathematisch kurz aussprechen. Tritt im Anfange ein kurzes minus ein,

Digitized by Google

worauf ein grösseres plus folgt, so wird der Winter ein gelinder werden. Wird das erste, längere oder kürzere minus nur durch ein kurzes plus unterbrochen, so wird der Winter streng ausfallen. Dies ist ein schwacher Versuch, um aus dem Anfange des Winters auf den weitern Verlauf zu schliessen, was meines Wissens bis jetzt auf ähnliche Weise noch nicht geschehen ist. Ob die Erfahrung künftig die Wahrheit der aufgestellten Analogieen bestätigen wird oder nicht, steht dahin; im erstern Falle würde ich die Resultate elfjähriger Erfahrung auf eine bestimmte und fruchtbringende Weise gedeutet haben.

XXXII.

Mein letztes Wort gegen Herrn Doctor Barfuss.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

„Spät kommt Ihr, doch Ihr kommt; der weite Weg, Graf Isolan', entschuldigt Euer Säumen.“

Ich habe mich beim Lesen der nochmaligen Einreden des Herrn Dr. Barfuss verschiedene Male gefragt, ob denn eigentlich meine Wenigkeit es ist, wogegen dort polemisirt wird, denn in der That hätte ich es kaum für der Mühe werth gehalten, auf solchen Unsinn zu antworten, wie ihn Herr Dr. Barfuss (höchst siegreich natürlich) widerlegt. Der Grund dieser Verwunderung liegt aber sehr einfach in der wirklich originellen Taktik, die der Herr Doctor gegenwärtig anzunehmen sich erlaubt hat und die freilich der Art ist, dass mit ihr auch ein Drieberg über einen Humboldt — nicht den Sieg davon tragen — aber wohl zu schimpfen Gelegenheit finden würde. Das schlaue Manövre besteht nämlich darin, alles, was einem unbequem wird, mit völligem Stillschweigen zu übergehen, dafür aber dem Gegner so viel Unsinn als möglich in die Schuhe zu schieben, je toller, desto besser, denn auf Wahrheit kommt's gar nicht mehr an, und nun am Ende sich über die ungeheure Bornirtheit des anderen lustig zu machen. Auf die Dauer wird freilich diese Kunst nicht vorhalten, denn hat es auch der Eine mit noch so viel Glück und Geschick versucht,

Digitized by Google

den Anderen lächerlich zu machen, so wird doch eine einfache Darstellung des wahren Sachbestandes hinreichen, um Jenen an den verdienten Pranger der öffentlichen Meinung zu stellen. Diese Bemerkungen sind es einzig und allein, welche mich zur Redaktion der nachfolgenden wenigen Zeilen bewogen haben; ich will nur mit wenigen Worten auseinandersetzen, was ich eigentlich gemeint habe und was Herr Dr. Barfuss aus meinen Worten gemacht hat; das Uebrige ergiebt sich dann von selbst.

Es ist eine bekannte Sache, dass durch mehrmaliges Vorkommen einer Erscheinung nur die Möglichkeit, aber nie die Nothwendigkeit derselben bewiesen wird; 100 Beispiele für eine Regel (etwa die regula falsi) beweisen nur, dass dieselbe richtige Resultate liefern kann; *ein einziges* Beispiel aber, in welchem die Regel nicht trifft, reicht hin, um ihre Unsicherheit (Nichtallgemeingültigkeit) zu begründen. So habe ich a posteriori aus den Consequenzen, welche sich an die Gleichungen

$$-\frac{2x}{x^2-1}=(x-\frac{1}{x})+(x^3-\frac{1}{x^3})+(x^5-\frac{1}{x^5})+\ldots,$$

$$0=(x+\frac{1}{x})+(x^3+\frac{1}{x^3})+(x^5+\frac{1}{x^5})+\ldots$$

knüpfen, die Unsicherheit der Rechnung mit divergirenden Reihen dargethan; ich habe ferner gezeigt, dass der einzige Weg, um aus diesen Irrthümern des Calcüls herauszukommen und sich vor künftigen zu hüten, darin besteht, die Begriffe der arithmetischen Summe und der syntaktischen Entwickelung durch besondere Zeichen auseinander zu halten; das Erste war eine vollendete Thatsache, denn nur ein Blinder konnte die Resultate der mitgetheilten Rechnung leugnen und nur ein Wahnsinniger sie richtig finden, das Zweite war ein Vorschlag, und gewiss ein beachtungswerther. Würde nicht der Geometer die Hände über dem Kopfe zusammenschlagen, wenn man Gleichheit mit = und dann Aehnlichkeit auch mit = bezeichnen wollte? Nun nennen wir aber Summe einer Reihe die Gränze, welcher man sich nähert, wenn man immer mehr Glieder einer Reihe addirt und wir beweisen, dass man die Summe der ins Unendliche verlängerten Reihe gleich setzen darf. Bei einer divergirenden Reihe wie $1-1+1-$etc. giebt es keine solche Gränze, also keine arithmetische Summe und wer jetzt dies einer bestimmten Grösse gleich setzt, bringt eine eben so heillose Confusion in die Analyse, wie einer, der Gleichheit und dann auch Aehnlichkeit mit = bezeichnet, in die Geometrie. Was erwidert nun Herr Dr. Barfuss auf alles Diess? Nichts! — Die Thatsachen ignorirt er, auf den Vorschlag findet er sich nicht bewogen einzugehen, aber halt, er bringt ein Beispiel, worin die Rechnung mit divergenten Reihen etwas Richtiges giebt. — Lächerliche Polemik! als wenn ich je geläugnet hätte, dass unter Umständen bei solchen Rechnungen etwas Richtiges herauskommen könnte, dann nämlich, wenn die Reihen der Art sind, dass sie innerhalb eines, wenn auch kleinen Intervalles convergiren. Diess ist in des Herrn Doctors Beispiele der Fall, die Reihen $1-x+x^2$ etc., $1-2x+3x^2$ etc. convergiren für $x<1$, und da das unter dieser Bedingung gefundene Resultat eine blos identische Transformation

ist, so gilt dasselbe **unabhängig** von seiner Herleitungsweise, aber man darf diess nicht umkehren (Umkehrungen müssen ja immer bewiesen werden) und daraus schliessen wollen, dass $1-1+1\ldots = \frac{1}{2}$, $1-2+3-\ldots = \frac{1}{4}$ sei etc. Weit entfernt also, dass hier Herr Dr. **Barfuss** etwas gegen mich vorbringt, bestätigt er vielmehr einen der von mir aufgestellten Sätze (dass solche Reihen, welche innerhalb eines Intervalles convergiren, richtige Resultate geben), den Hauptsatz aber, dass Reihen, die jederzeit divergiren, wie

$$(x+\frac{1}{x})+(x^2+\frac{1}{x^2})+(x^3+\frac{1}{x^3})+\ldots,$$

auch immer falsche Resultate liefern, trifft das Alles gar nicht.

Ich will hier noch eine Bemerkung einschalten, welche das Phantom einer syntaktischen Bedeutung der Reihen völlig vernichtet. Man könnte sagen: allerdings sind z. B.

$$\frac{1}{1-x} \text{ und } 1+x+x^2+\ldots$$

nur für $x<1$ einander gleich, aber jenseit dieser Stelle tritt die syntaktische Verwandtschaft ein; dem gegenüber will ich zeigen, dass über die Stelle hinaus, wo die Reihe divergent wird, zwischen ihr und der Funktion links durchaus **keine** Beziehung mehr statt findet. Es sei $\varphi(x)$ eine Funktion, welche von $x=0$ bis $x=a$ stetig bleibt, hier aber diskontinuirlich wird. Dieser Beweis beruht auf einer Eigenthümlichkeit des Ausdruckes:

$$f(x)=\varphi(x).\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin at \cos xt}{t}dt+\psi(x).\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin xt\cos at}{t}dt,$$

worin $\psi(x)$ eine ganz willkührliche Funktion bezeichnet. Erinnert man sich, dass

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha t\cos\beta t}{t}dt=1 \text{ ist für } \beta<\alpha,$$
$$\text{dagegen } =0 \quad \text{für } \beta>\alpha;$$

so folgt auf der Stelle

$$f(x)=\varphi(x) \text{ für } x<a,$$
$$\text{dagegen } f(x)=\psi(x) \quad ,, \quad x>a.$$

Verwandelt man $\varphi(x)$ in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots \qquad (D)$$

so ist

$$A_0=\varphi(0),\ A_1=\frac{\varphi'(0)}{1},\ A_2=\frac{\varphi''(0)}{1.2},\ldots$$

Digitized by Google

und die Coeffizientenbestimmung geschieht also mittelst des Werthes $x=0$; daraus folgt, dass, wenn man

$$f(x)=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots.$$

setzt, $B_0=A_0$, $B_1=A_1$, ... sein muss, weil für $x<a$, mithin auch für $x=0$, die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ zusammenfallen. Gilt also die Gleichung (☽), so gilt auch die folgende:

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin at \cos xt}{t}dt+\psi(x)\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin xt \cos at}{t}dt \\ =A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.\end{array}\right\}\ (\odot)$$

Sollte nun die Gleichung (☽) über $x=a$ hinaus noch irgend eine Bedeutung haben, d. h. sollte die Reihe in irgend einer Beziehung zu $\varphi(x)$ stehen, so müsste diess in der Gleichung ($\odot$) ebenso der Fall sein, weil hier dieselbe Reihe vorkommt. Für $x>a$ reduzirt sich aber die linke Seite von ($\odot$) auf $\psi(x)$, und daher haben wir den Satz: wenn für $x>a$ eine Beziehung zwischen $A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots.$ und der Funktion $\varphi(x)$ statt finden soll, so muss dieselbe Beziehung zwischen A_0+A_1x+etc. und $\psi(x)$ vorhanden sein. Nun ist aber $\psi(x)$ eine von $\varphi(x)$ verschiedene und völlig willkührliche Funktion und zwischen einer solchen und einer ganz bestimmten Reihe (d. h. einer solchen, deren Coeffizienten unveränderliche Werthe haben) kann überhaupt gar keine Beziehung statt finden, eben weil durch die Willkührlichkeit von $\psi(x)$ jede etwa statuirte Beziehung sogleich aufgehoben werden kann. Da nun zwischen $\psi(x)$ und der Reihe kein Zusammenhang möglich ist, so giebt es auch keinen zwischen $\varphi(x)$ und der Reihe, sobald $x>a$ genommen wird. Dass aber gleichzeitig die Reihe divergirt, weiss man a priori aus dem Cauchy'schen Satze, denn der Modulus von x ist hier grösser als der Modulus a desjenigen x, für welches $\varphi(x)$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet.

Wenn sich nun bei dem Streite über die Zulässigkeit divergenter Reihen Herr Dr. Barfuss darauf beschränkt, die Hauptsachen unerörtert zu lassen und gegen Dinge zu eifern, die ich von allem Anfange her zugegeben habe, so tritt dagegen die wirklich entsetzliche Erbärmlichkeit seiner Polemik da in ihrer ganzen Glorie auf, wo er gegen das Resultat

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^2}=0$$

zu Felde zieht. Bis hieher hatte der Streit von seiner Seite doch noch einigen Schein von Ehrlichkeit, hier aber fängt er an, sich solcher Waffen zu bedienen, mit denen man, um einen gelinden Ausdruck zu brauchen, seine Moralität in ein zweideutiges Licht stellt. Ich bitte zu vergleichen. — Meine Frage war: ist

$$\int\frac{dx}{x}=lx+C \text{ oder } =\tfrac{1}{2}l(x^2)+C.$$

Digitized by Google

und ich habe darauf geantwortet: sowohl lx als $\frac{1}{2}l(x^2)$ befriedigt die Differenzialgleichung $dy=\frac{dx}{x}$, aber da lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ *verschiedene* Funktionen sind, so muss man aus anderen Eigenschaften des Integrales jene Frage entscheiden. Nun ist aber

$$\int\frac{d(-x)}{(-x)}=\int\frac{dx}{x},$$

und folglich muss, wenn $\varphi(x)$ den von x abhängigen Theil des Integrales bezeichnet, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ sein. Man kann daher nicht $\varphi(x)=lx$ setzen, weil dann diese Eigenschaft nicht statt fände, sondern muss $\varphi(x)=\frac{1}{2}l(x^2)$ nehmen. — Hier behauptet nun Herr Dr. Barfuss, ich suchte das Imaginäre dadurch zu vermeiden, dass ich sagte $l(-1)=\frac{1}{2}l(-1)^2=l1=0$, und fragt mich nachher, ob ich nicht wüsste, dass $\log(-a)$ und $\frac{1}{2}l(-a)^2$ verschiedene Funktionen seien!! Wirklich, ich traute meinen Augen kaum, als ich das sah! Nachdem ich ausdrücklich in meiner algebraischen Analysis bemerkt habe, dass lx und $\frac{1}{2}l(x^2)$ zwei sehr verschiedene Funktionen sind *), nachdem ich eben *wegen* ihrer Verschiedenheit die Frage, ob $\int\frac{dx}{x}=lx$ oder $=\frac{1}{2}l(x^2)$ sei, aufgeworfen hatte (denn sonst wäre sie überflüssig gewesen), werde ich von Herrn Dr. Barfuss des Unsinnes beschuldigt, $l(-a)$ und $\frac{1}{2}l(-a)^2$ nicht unterscheiden zu können! — Nun sind aber nur zwei Fälle möglich: entweder hat Herr Dr. Barfuss meine Exposition aus Mangel an Fassungskraft nicht verstanden, oder er hat sie nicht verstehen wollen. Im ersten Falle verbietet es mir die Beschränktheit meiner Zeit, diese Polemik zur Belehrung des Herrn Dr. Barfuss weiter fortzusetzen, im zweiten halte ich es unter meiner Würde, noch ein ferneres Wort an ihn zu verschwenden.

---

*) S. 163. heisst es: „lz und $\frac{1}{2}l(z^2)$ sind ganz *verschiedene* Funktionen von z, die wohl für positive z übereinstimmen, aber nicht für negative u. s. w. Construirt man beide Funktionen geometrisch, so hat die der ersten Funktion entsprechende Curve nur *einen* Zweig, die andere *zwei* congruente Zweige. Es ist daher *nicht* für *jedes* z, $l(z^2)=2lz$.“ Kann man sich deutlicher über die Verschiedenheit von lz und $\frac{1}{2}l(z^2)$ aussprechen?

Digitized by Google

XXXIII.

Ueber einen Satz vom Tetraeder.

Von
Herrn C. G. Flemming,
Lehrer am Conradinum zu Jenkau bei Danzig.

Lehrsatz. Halbirt man die sechs Kanten des Tetraeders und legt durch jeden Halbirungspunkt eine Ebene senkrecht gegen die gegenüberliegende Kante, so schneiden sich diese sechs Ebenen in einem Punkte, welcher mit dem Schwerpunkte des Tetraeders und dem Mittelpunkte der um das Tetraeder beschriebenen Kugel auf einer geraden Linie liegt, und der Schwerpunkt liegt in der Mitte der beiden andern.

I. Analytischer Beweis. Wenn ein Tetraeder mit einer Ecke in dem Anfangspunkte eines rechtwinkligen Coordinatensystems liegt und die Coordinaten der andern drei Eckpunkte $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$ heissen, so sind, wie man durch Betrachtung ähnlicher Dreiecke leicht sieht, die Coordinaten der Mittelpunkte seiner Kanten:

$$\tfrac{1}{2}x',\ \tfrac{1}{2}y',\ \tfrac{1}{2}z';\quad \tfrac{1}{2}x'',\ \tfrac{1}{2}y'',\ \tfrac{1}{2}z'';\quad \tfrac{1}{2}x''',\ \tfrac{1}{2}y''',\ \tfrac{1}{2}z''';$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x''),\ \tfrac{1}{2}(y'+y''),\ \tfrac{1}{2}(z'+z'');$$
$$\tfrac{1}{2}(x'+x'''),\ \tfrac{1}{2}(y'+y'''),\ \tfrac{1}{2}(z'+z''');$$
$$\tfrac{1}{2}(x''+x'''),\ \tfrac{1}{2}(y''+y'''),\ \tfrac{1}{2}(z''+z''').$$

Als Gleichungen für die Projectionen der Kanten des Tetraeders auf die xz und yz Ebene erhält man folgende:

$$x=\frac{x'}{z'}z,\quad y=\frac{y'}{z'}z;$$
$$x=\frac{x''}{z''}z,\quad y=\frac{y''}{z''}z;$$
$$x=\frac{x'''}{z'''}z,\quad y=\frac{y'''}{z'''}z;$$

Digitized by Google

$$x-x'=\frac{x'-x''}{z'-z''}(z-z'),\quad y-y'=\frac{y'-y''}{z'-z''}(z-z');$$

$$x-x'=\frac{x'-x'''}{z'-z'''}(z-z'),\quad y-y'=\frac{y'-y'''}{z'-z'''}(z-z');$$

$$x-x''=\frac{x''-x'''}{z''-z'''}(z-z''),\quad y-y''=\frac{y''-y'''}{z''-z'''}(z-z'').$$

Die sechs ersten dieser Gleichungen gehören zu den Kanten, welche durch den Anfangspunkt gehen, die sechs letzten zu den drei übrigen Kanten. Um nun die Gleichungen für die Ebenen aufzusuchen, von denen jede durch den Mittelpunkt einer Kante geht und senkrecht auf der gegenüberliegenden Kante steht, muss man sich erinnern, dass, wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht steht, auch die Projectionen der Linie senkrecht auf den Schnitten jener Ebene mit den Coordinatenebenen sein müssen. Ist nun die Gleichung der Ebene

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

so sind

$$x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A},$$

$$y=-\frac{C}{B}z-\frac{D}{B}$$

die Gleichungen für die Schnitte derselben mit der xz und yz Ebene. Es seien ferner $x=az+b$ und $y=a'z+b'$ die Gleichungen für die Projectionen der Linie auf diese Coordinatenebenen, so müssen, wenn diese auf jenen senkrecht stehen sollen, die Bedingungsgleichungen

$$-\frac{1}{a}=-\frac{C}{A},\quad -\frac{1}{a'}=-\frac{C}{B},$$

oder

$$A=aC \text{ und } B=a'C$$

statt finden. Setzt man diese Werthe für A und B in die Gleichung der Ebene hinein, so erhält man

$$ax+a'y+z+\frac{D}{C}=0$$

als Gleichung für die Ebene, welche auf der gegebenen Linie senkrecht ist. Soll sie ausserdem noch durch einen Punkt, dessen Coordinaten p, q, r sind, gehen, so müssen auch diese der gefundenen Gleichung genügen und daher

$$ap+a'q+r+\frac{D}{C}=0$$

sein. Zieht man diese Gleichung von der vorigen ab, so erhält man

Digitized by Google

$$a(x-p)+a'(x-q)+(z-r)=0$$

als Gleichung für die Ebene, welche sowohl senkrecht auf der gegebenen Linie ist als auch durch den Punkt pqr geht.

Setzen wir nun für pqr die oben angegebenen Ausdrücke für die Coordinaten der Mittelpunkte der Kanten, und für a und a' die Ausdrücke aus den Gleichungen der entsprechenden gegenüberliegenden Kante, so erhalten wir als Gleichungen für die in Rede stehenden sechs Ebenen, nachdem wir sie nach xyz geordnet haben, folgende:

$$(1)\quad x'x+y'y+z'z=\tfrac{1}{2}\{x'(x''+x''')+y'(y''+y''')+z'(z''+z''')\},$$

$$(2)\quad x''x+y''y+z''z=\tfrac{1}{2}\{x''(x'+x''')+y''(y'+y''')+z''(z'+z''')\},$$

$$(3)\quad x'''x+y'''y+z'''z=\tfrac{1}{2}\{x'''(x'+x'')+y'''(y'+y'')+z'''(z'+z'')\};$$

$$(4)\quad (x'-x'')x+(y'-y'')y+(z'-z'')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x'''(x'-x'')+y'''(y'-y'')\\+z'''(z'-z'')\end{array}\right\},$$

$$(5)\quad (x'-x''')x+(y'-y''')y+(z'-z''')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x''(x'-x''')+y''(y'-y''')\\+z''(z'-z''')\end{array}\right\},$$

$$(6)\quad (x''-x''')x+(y''-y''')y+(z''-z''')z=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}x'(x''-x''')+y'(y''-y''')\\+z'(z''-z''')\end{array}\right\}.$$

Um den Term rechter Hand zu vereinfachen, wollen wir folgende Substitutionen machen:

$$x''x'''+y''y'''+z''z'''=\beta',$$
$$x'x'''+y'y'''+z'z'''=\beta'',$$
$$x'x''+y'y''+z'z''=\beta'''.$$

Hiedurch nehmen jene sechs Gleichungen eine einfachere Gestalt an, nämlich:

$$(1)\qquad x'x+y'y+z'z=\frac{\beta'''+\beta''}{2},$$

$$(2)\qquad x''x+y''y+z''z=\frac{\beta'''+\beta'}{2},$$

$$(3)\qquad x'''x+y'''y+z'''z=\frac{\beta''+\beta'}{2};$$

$$(4)\qquad (x'-x'')x+(y'-y'')y+(z'-z'')z=\frac{\beta''-\beta'}{2},$$

$$(5)\qquad (x'-x''')x+(y'-y''')y+(z'-z''')z=\frac{\beta'''-\beta'}{2},$$

$$(6)\qquad (x''-x''')x+(y''-y''')y+(z''-z''')z=\frac{\beta'''-\beta''}{2}.$$

Man sieht nun sogleich, dass die drei letzten Gleichungen von den drei ersten abhängen, indem man diese erhält, wenn man suc-

Digitized by Google

cessive die zweite von der ersten, die dritte von der ersten und die dritte von der zweiten abzieht. Da wir also nur drei unabhängige Gleichungen haben, so muss es für jede der Coordinaten xyz einen Werth geben, welcher alle sechs Gleichungen befriedigt, oder die durch diese Gleichungen ausgedrückten Ebenen müssen sich in einem Punkte schneiden.

Wir wollen nun die drei ersten Gleichungen auflösen, um die Coordinaten des Schnittpunktes jener sechs Ebenen zu bestimmen. Damit die Rechnung vereinfacht werde, werden wir setzen:

$$x'^2+y'^2+z'^2=\alpha',\quad y''z'''-z''y'''=\xi',\quad z''x'''-x''z'''=\eta',$$
$$x''^2+y''^2+z''^2=\alpha'',\quad z'y'''-y'z'''=\xi'',\quad x'z'''-z'x'''=\eta'',$$
$$x'''^2+y'''^2+z'''^2=\alpha''',\quad y'z''-z'y''=\xi''',\quad z'x''-x'z''=\eta''',$$
$$x''y'''-y''x'''=\zeta',$$
$$y'x'''-x'y'''=\zeta'',$$
$$x'y''-y'x''=\zeta''',$$
$$x'y''z'''+y'z''x'''+z'x''y'''-x'z''y'''-y'x''z'''-z'y''x'''=\lambda,$$

und uns einiger von den Relationen bedienen, welche Lagrange zwischen diesen Grössen aufgestellt hat, nämlich:

$$(1)\quad \eta''\zeta'''-\zeta''\eta'''=\lambda x',\qquad (3)\quad x'\eta'+x''\eta''+x'''\eta'''=0,$$
$$(2)\quad \zeta''\xi'''-\xi''\zeta'''=\lambda y',\qquad (4)\quad x'\zeta'+x''\zeta''+x'''\zeta'''=0,$$
$$(5)\quad y'\zeta'+y''\zeta''+y'''\zeta'''=0,$$

$$(6)\ \begin{cases} x'=\dfrac{\alpha'\xi'+\beta'''\xi''+\beta''\xi'''}{\lambda}, \\[2ex] x''=\dfrac{\beta'''\xi'+\alpha''\xi''+\beta'\xi'''}{\lambda}, \\[2ex] x'''=\dfrac{\beta''\xi'+\beta'\xi''+\alpha'''\xi'''}{\lambda}, \end{cases}\qquad (7)\ \begin{cases} y'=\dfrac{\alpha'\eta'+\beta'''\eta''+\beta''\eta'''}{\lambda}, \\[2ex] y''=\dfrac{\beta'''\eta'+\alpha''\eta''+\beta'\eta'''}{\lambda}, \\[2ex] y'''=\dfrac{\beta''\eta'+\beta'\eta''+\alpha'''\eta'''}{\lambda}, \end{cases}$$

$$(8)\ \begin{cases} z'=\dfrac{\alpha'\zeta'+\beta'''\zeta''+\beta''\zeta'''}{\lambda}, \\[2ex] z''=\dfrac{\beta'''\zeta'+\alpha''\zeta''+\beta'\zeta'''}{\lambda}, \\[2ex] z'''=\dfrac{\beta''\zeta'+\beta'\zeta''+\alpha'''\zeta'''}{\lambda}. \end{cases}$$

Durch Elimination und Anwendung der fünf ersten Relationen erhalten wir für die Coordinaten des Schnittpunkts

$$x=\frac{(\xi'\beta'''+\beta'\xi''')+(\xi'\beta''+\beta'\xi'')+(\xi''\beta'''+\beta''\xi''')}{2\lambda},$$
$$y=\frac{(\eta'\beta'''+\beta'\eta''')+(\eta'\beta''+\beta'\eta'')+(\eta''\beta'''+\beta''\eta''')}{2\lambda},$$

Digitized by Google

$$z=\frac{(\zeta'\beta'''+\beta'\zeta''')+(\zeta'\beta''+\beta'\zeta'')+(\zeta''\beta'''+\beta''\zeta''')}{2\lambda}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich vermittelst der Relationen unter (6), (7) und (8) noch auf eine andere Form bringen, in welcher sie für unsern Zweck brauchbarer sein werden, nämlich:

$$x=\frac{\lambda(x'+x''+x''')-(\alpha'\xi'+\alpha''\xi''+\alpha'''\xi''')}{2\lambda},$$

$$y=\frac{\lambda(y'+y''+y''')-(\alpha'\eta'+\alpha''\eta''+\alpha'''\eta''')}{2\lambda},$$

$$z=\frac{\lambda(z'+z''+z''')-(\alpha'\zeta'+\alpha''\zeta''+\alpha'''\zeta''')}{2\lambda}.$$

Wir wollen jetzt zur Bestimmung des Mittelpunktes der um das Tetraeder beschriebenen Kugel übergehen. Dieser Punkt hat die Eigenschaft, dass er von jedem der vier Eckpunkte des Tetraeders gleich weit entfernt ist. Nennen wir diese Entfernung s, so finden, wie man sogleich sieht, folgende Gleichungen Statt, wenn pqr die gesuchten Coordinaten sind:

$$p^2+q^2+r^2=s^2,$$

$$(p-x')^2+(q-y')^2+(r-z')^2=s^2,$$

$$(p-x'')^2+(q-y'')^2+(r-z'')^2=s^2,$$

$$(p-x''')^2+(q-y''')^2+(r-z''')^2=s^2$$

oder

$$p^2+q^2+r^2=s^2,$$

$$p^2+q^2+r^2-2px'-2qy'-2rz'=s^2-\alpha',$$

$$p^2+q^2+r^2-2px''-2qy''-2rz''=s^2-\alpha'',$$

$$p^2+q^2+r^2-2px'''-2qy'''-2rz'''=s^2-\alpha'''.$$

Zieht man nach einander jede der drei letzten Gleichungen von der ersten ab, so erhält man:

$$x'p+y'q+z'r=\frac{\alpha'}{2},$$

$$x''p+y''q+z''r=\frac{\alpha''}{2},$$

$$x'''p+y'''q+z'''r=\frac{\alpha'''}{2}.$$

Durch Elimination und Anwendung der obigen Relationen ergeben sich für die gesuchten Coordinaten folgende Werthe:

$$p=\frac{\alpha'\xi'+\alpha''\xi''+\alpha'''\xi'''}{2\lambda},$$

Digitized by Google

$$q=\frac{\alpha'\eta'+\alpha''\eta''+\alpha'''\eta'''}{2\lambda}.$$

$$r=\frac{\alpha'\zeta'+\alpha''\zeta''+\alpha'''\zeta'''}{2\lambda}.$$

Um die Lage des Schwerpunktes des Tetraeders zu bestimmen, ist weiter nichts nöthig, als den Schwerpunkt einer Seitenfläche aufzusuchen, von diesem eine Linie nach der gegenüberstehenden Ecke des Tetraeders zu ziehen und von dieser Ecke aus auf der gezogenen Linie drei Viertel derselben abzuschneiden. Wendet man diese Methode an, so findet man durch einfache Betrachtungen ähnlicher Dreiecke für die Coordinaten des Schwerpunktes die Ausdrücke

$$t=\tfrac{1}{4}(x'+x''+x'''),$$
$$u=\tfrac{1}{4}(y'+y''+y'''),$$
$$v=\tfrac{1}{4}(z'+z''+z''').$$

Betrachten wir nun die Ausdrücke für die Coordinaten aller drei Punkte, die wir bestimmt haben, so sehen wir, dass folgende drei Gleichungen zwischen ihnen Statt finden:

$$t=\tfrac{1}{2}(p+x),$$
$$u=\tfrac{1}{2}(q+y),$$
$$v=\tfrac{1}{2}(r+z);$$

durch welche der obige Satz bewiesen ist.

II. Geometrischer Beweis. Legt man durch den Halbirungspunkt jeder Kante eine Parallele mit der gegenüberliegenden Kante, so entsteht ein neues Tetraeder. Von diesem gilt Folgendes:

1) es ist dem gegebenen Tetraeder congruent;

2) seine Kanten werden von den Kanten des andern halbirt.

Wegen des Parallelismus der entsprechenden Kanten und also auch der Flächen stehen beide Tetraeder in Collineationsverwandtschaft, und müssen daher einen Aehnlichkeitspunkt haben, d. h. einen Punkt, der zu beiden dieselbe Beziehung hat. Dass dies der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist, ist leicht nachzuweisen. Man erhält den Schwerpunkt eines Tetraeders unter andern auf folgende Weise: Man schliesse von den sechs Kanten des Tetraeders zwei einander gegenüberliegende Kanten aus, und halbire die übrigen vier. Die vier Halbirungspunkte liegen in einer Ebene, die das ganze Tetraeder halbirt und durch den Schwerpunkt geht. Indem man immer ein anderes Paar Kanten ausschliesst, kann man die Operation dreimal wiederholen. Der Schnittpunkt der so erhaltenen drei Ebenen ist also der Schwer-

Digitized by Google

punkt. Die Ebenen sind aber beiden Tetraedern gemein, folglich auch der Schwerpunkt, der mithin der Aehnlichkeitspunkt ist. — Der Schwerpunkt hat hier also die Eigenschaft, dass er in jeder geraden Linie liegt, die einen beliebigen Punkt des einen Tetraeders mit dem entsprechenden des andern verbindet. Da beide Tetraeder congruent sind, so halbirt er den Abstand zweier entsprechenden Punkte.

Unsere sechs Ebenen haben nun zu dem neuen Tetraeder die Beziehung, dass sie die Kanten halbiren und auf diesen Kanten selbst senkrecht stehen. Von solchen sechs Ebenen ist es aber bekannt, dass sie sich in einem Punkte, dem Mittelpunkte der um das Tetraeder beschriebenen Kugel, schneiden. Die Mittelpunkte der um beide Tetraeder beschriebenen Kugeln müssen einander entsprechende Punkte sein, und somit ist der Satz bewiesen.

XXXIV.

Bemerkung über die Lambertische Reihe.

Von
Herrn L. Schläfli,
Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn durch die Gleichung

$$t = y^{\alpha-\beta} - (\alpha-\beta)xy^{\alpha},$$

welche mittelst der Substitution $y^{\alpha-\beta} = z$ die Gestalt

$$t = z - x.(\alpha-\beta)z^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}$$

erhält, y in Function von t und x gegeben ist, so kann man mit Hülfe des Lagrangeschen Satzes jede beliebige Potenz von z, also auch von y, nach den steigenden Potenzen von x entwickeln. Setzt man dann $t=1$, so lassen sich die gegebene Gleichung und die aus ihr hervorgehende Reihe für eine beliebige Potenz von y so darstellen:

Digitized by Google

$$y^{-\beta}-y^{-\alpha}=(\alpha-\beta)x, \tag{1}$$

$$y^m=1+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{m[m+(n-1)\alpha+\beta][m+(n-2)\alpha+2\beta]\ldots.[m+\alpha+(n-1)\beta]}{1\;.\;2\;\;.\;\;3\;\ldots\ldots\ldots\;n}x^n \tag{2}$$

(Klügels Wörterbuch, Artikel: Lambertische Reihe.) Damit die Reihe in (2) convergire, ist nöthig und reicht hin, dass

$$x<\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

sei. Für den Fall eines unendlich klein werdenden m geht die Gleichung (2) über in

$$\log y=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{[(n-1)\alpha+\beta][(n-2)\alpha+2\beta]\ldots.[\alpha+(n-1)\beta]}{2\;\;.\;\;3\;\ldots.\;n}x^n. \tag{3}$$

Multiplicirt man die Reihen für y^p und y^q mit einander, so muss das Product mit der Reihe für y^{p+q} identisch werden. Indem man beiderseits die Coefficienten von x^n gleich setzt, erhält man die endliche Relation:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{n=i}\frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\;i}.p[p+(n-i-1)\alpha+\beta][p+(n-i-2)\alpha+2\beta]\ldots\\&\ldots.[p+\alpha+(n-i-1)\beta]\times q[q+(i-1)\alpha+\beta][q+(i-2)\alpha+2\beta]\ldots.\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots.[q+\alpha+(i-1)\beta]\\&=(p+q)(p+q+(n-1)\alpha+\beta)(p+q+(n-2)\alpha+2\beta)\ldots.(p+q+\alpha+(n-1)\beta).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wird in dieser Formel $\alpha=\beta=0$ gesetzt, so reducirt sie sich auf

$$\sum_{i=0}^{i=n}\frac{n(n-1)\ldots.(n-i+1)}{1\;.\;2\;.\;\ldots\;.\;i}p^{n-i}q^i=(p+q)^n,$$

was der binomische Satz für ganze Exponenten ist. Wird hingegen nur $\alpha=0$ gesetzt, so geht jene Formel in den analogen Satz für Facultäten über. Setzt man endlich $\alpha=\beta=1$, so verwandelt sich die Formel (4) in

$$\sum_{i=0}^{i=n}\binom{n}{i}.p(p+n-i)^{n-i-1}.q(q+i)^{i-1}=(p+q)(p+q+n)^{n-1} \tag{5}$$

wo $\binom{n}{i}$ den binomischen Coefficienten von x^i in der Entwickelung von $(1+x)^n$ bezeichnet. Diese spezielle Formel (5) lässt sich auf elementarem Wege beweisen. Es ergiebt sich nämlich, wenn man nach Potenzen von q entwickelt, als Coefficient von q^m auf der linken Seite

$$\binom{n}{m}\sum_{i=0}^{i=n-m}\left(n-m\right)p(p+n-m-i)^{n-m-i-1}m(m+i)^{i-1}$$

Digitized by Google

und auf der rechten

$$\binom{n}{m}(p+m)(p+n)^{n-m-1}.$$

Beide Ausdrücke sind aber vermöge der Formel (5) einander gleich, wenn diese bereits für alle kleinern Exponenten als n bewiesen ist; und für $m=0$ fallen sie ohnehin zusammen. Da nun die Formel (5) sich für die Werthe 1, 2 des Exponenten n sogleich verificirt, so ist sie allgemein für jeden ganzen und positiven Werth von n gültig.

Die aus der Lambertischen Reihe hervorgehende Formel (4) lässt sich demnach als die Vermittlung des binomischen Satzes für Facultäten und der Formel (5) ansehen, von welcher diese beiden letzten Formeln nur spezielle Fälle sind.

Der Formel (4) lässt sich übrigens noch eine andere zur Seite stellen, welche sich aus der Gleichung

$$y^p \cdot \frac{1}{q}\frac{\partial . y^q}{\partial x} = \frac{1}{p+q}\frac{\partial . y^{p+q}}{\partial x}$$

ergiebt, wenn man darin für y^p, y^q, y^{p+q} die entstehenden Reihen (2) substituirt und die beiderseitigen Coefficienten von x^n einander gleich setzt; sie ist aber unsymmetrisch.

Für den besondern Fall, wo $\alpha=\beta=1$, (wie man sogleich, unbeschadet der Allgemeinheit, statt bloss $\alpha=\beta$, setzen darf) gehen die Formeln (1), (2) über in

$$\log y = xy, \tag{6}$$

$$y^m = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....n} x^n. \tag{7}$$

Die Reihe (7) ist convergent, wenn $x < \frac{1}{e}$ ist, und findet daher ihre Anwendung ohne Ausnahme für alle Systeme positiver Werthe von x und y, welche der Gleichung (6) genügen; denn einmal, wenn x reell bleiben soll, so kann y nur positiv sein; nun hat aber der Quotient $\frac{\log y}{y}$ für positive endliche Werthe von y ein einziges Maximum, nämlich $\frac{1}{e}$, welches dem Werthe $y=e$ entspricht; daher sind diejenigen reellen Werthe von x, welche reellen Werthen von y entsprechen, zwischen den beiden Gränzen $-\infty$ und $\frac{1}{e}$ enthalten. — Die Formeln (6) und (7) hangen mit folgender Aufgabe zusammen:

Man soll eine Function f von x und h finden, welche, wenn h als constant vorausgesetzt wird, der Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = f(x+h)$$

genügt.

Digitized by Google

Mit Weglassung der arbiträren Integrationsconstante, die als Factor der gesuchten Function erscheint, kann man $f(x)=e^{kx}$ setzen, so erhält man für die Constante k die Bedingung

$$k=e^{hk}, \text{ oder } \log k = hk,$$

eine Gleichung, die in der Form mit (6) übereinstimmt. Setzt man nun in der Reihe für e^{kx} die aus der Formel (7) für die einzelnen Potenzen von k sich ergebenden Werthe, so erhält man folgenden nach den steigenden Potenzen von h geordneten Ausdruck für $f(x)$:

$$f(x)=e^x+\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....m}x^m\right)\frac{h^n}{1.2....n}. \tag{8}$$

Hier ist nun der Coefficient von $\frac{h^n}{1.2....n}$ das Product von e^x mit einer ganzen rationalen Function von x, die mit dem Term $(n+1)^{n-1}x$ anfängt und mit dem Term $+x^n$ endigt. Denn wenn man die beiden unendlichen Reihen

$$1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-....,$$

$$\frac{1.(n+1)^{n-1}}{1}x+\frac{2.(n+2)^{n-1}}{1.2}x^2+\frac{3.(n+3)^{n-1}}{1.2.3}x^3+....$$

mit einander multiplicirt, so bekömmt in der Entwicklung des Products die Potenz x^m den Coefficienten

$$\sum_{i=0}^{i=m-1}(-1)^i\frac{(m+n-i)^{n-1}}{\Pi i.\Pi(m-i-1)},$$

welche Summe bekanntlich verschwindet, wenn $n-1<m-1$ ist, und für $n-1=m-1$ den Werth $+1$ erhält. Demnach gestaltet sich nun die Gleichung (8) so:

$$f(x)=e^x\{1+x.\frac{h}{1}+(3x+x^2)\frac{h^2}{1.2}+(16x+9x^2+x^3)\frac{h^3}{1.2.3}....\}. \tag{9}$$

Man kann auch auf folgendem analytischen Wege zu der Lösung (9) der Gleichung $\frac{\partial f(x)}{\partial x}=f(x+h)$ gelangen. Es sei zunächst

$$f(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty}u_n h^n, \tag{10}$$

so folgt

$$\frac{\partial^i f(x)}{\partial x^i}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\partial^i u_n}{\partial x^i}h^n.$$

Digitized by Google

Es ist aber

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \frac{h^n}{1.2\ldots.n};$$

also durch Substitution der Reihen für die einzelnen Differential coefficienten von $f(x)$

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \left(\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{1.2\ldots.(n-i)} \frac{\partial^{n-i} u_i}{\partial x^{n-i}}\right) h^n,$$

also, wenn man den Coefficienten von h^n in dieser Reihe demjenigen in der Reihe für $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ gleich setzt,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{\Pi(n-i)} \frac{\partial^{n-i} u_i}{\partial x^{n-i}}. \qquad (11)$$

Man suche nun $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ durch die ursprünglichen Functionen $u, u_1, \ldots u_n$ auszudrücken. Die Formel (11) giebt nach und nach:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = u,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u + u_1, \quad \frac{\partial^m u_1}{\partial x^m} = mu + u_1,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{3}{2} u + u_1 + u_2, \quad \frac{\partial^m u_2}{\partial x^m} = \frac{m(m+2)}{1.2} u + \frac{m}{1} u_1 + u_2.$$

So gelangt man durch Induction zu der Formel:

$$\frac{\partial^m u_n}{\partial x^m} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{m(m+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{1.2.3\ldots.(n-\lambda)} u^\lambda. \qquad (12)$$

Gesetzt nun, diese Formel sei für alle Differentialcoefficienten der Functionen $u_1, u_2, \ldots. u_{n-1}$ und für die Function u_n bis zum $m$ten Differentialcoefficienten inclusive bewiesen, so substituire man die Werthe, welche dieselbe für $\frac{\partial^{m+n-i} u_i}{\partial x^{m+n-i}}$ giebt, in der aus (11) herfliessenden Gleichung

$$\frac{\partial^{m+1} u_n}{\partial x^{m+1}} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{1.2\ldots.(n-i)} \frac{\partial^{m+n-i} u_i}{\partial x^{m+n-i}};$$

dann wird

$$\frac{\partial^{m+1} u_n}{\partial x^{m+1}} = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=i} \frac{(m+n-i)(m+n-\lambda)^{i-\lambda-1}}{\Pi(n-i) \,.\, \Pi(i-\lambda)} u_\lambda.$$

Für ein constantes λ geht i von λ bis n; wenn man daher die Ordnung der Summationen vertauscht und dann $i = \lambda + \mu$ setzt, so wird

Digitized by Google

$$\frac{\partial^{m+1} u_n}{\partial x^{m+1}} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \left(\sum_{\mu=0}^{\mu=n-\lambda} \frac{(m+n-\lambda-\mu)(m+n-\lambda)^{\mu-1}}{\Pi(n-\lambda-\mu).\Pi\mu} \right) u_\lambda$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(m+1)(m+1+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{\Pi(n-\lambda)} u_\lambda.$$

Somit wäre die Richtigkeit der Formel (12) auch für den $(m+1)$ten Differentialcoefficienten von u_n bewiesen. Da die gemachten Schlüsse auch für $m=0$ ihre Geltung behalten, und da die Formel (12) für $n=1$, 2 bereits verificirt ist, so ist ihre allgemeine Richtigkeit als bewiesen anzusehen.

Wenn man nun die drei ersten der Gleichungen (12) vollständig integrirt, so erhält man

$$u = Ce^x,$$
$$u_1 = Ce^x.x + C_1 e^x,$$
$$u_2 = Ce^x(\tfrac{3}{2}x + \tfrac{1}{2}x^2) + C_1 e^x.x + C_2 e^x;$$

durch jede neue Integration wird auch eine neue arbiträre Constante C_m eingeführt, welche in allen folgenden Integralgleichungen erscheint. Man kann aber auch so integriren, dass u_1, u_2, etc. gleichzeitig mit x verschwinden, was so viel ist, als wenn man alle übrigen arbiträren Constanten ausser C gleich Null setzt. Man kann ferner $u = u_1 = u_2 \ldots = u_{r-1} = 0$ setzen und dann die Gleichung für $\frac{\partial u_r}{\partial x}$ und alle folgenden so integriren, dass für $x=0$ nur u_r nicht verschwindet, sondern $= C_r$ wird, während alle folgenden Functionen u_{r+1}, u_{r+2}, etc. zugleich mit x verschwinden, was so viel ist, als wenn man alle übrigen arbiträren Constanten ausser C_r gleich Null setzt. Im letztern Falle braucht man nur in der Formel (12) n und λ in $n+r$ und $\lambda+r$ übergehen zu lassen, um einzusehen, dass die Folge der Functionen

$$u_r,\ u_{r+1},\ u_{r+2},\ u_{r+3},\ \text{etc.},$$

abgesehen vom arbiträren Factor C_r, genau mit der Folge der Functionen

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \text{etc.}$$

übereinstimmt, wenn diese unter der frühern Voraussetzung, dass u_1, u_2,.... zugleich mit x verschwinden, berechnet sind. Wenn nun V den Werth bezeichnet, welchen $f(x)$ in der Formel (10) unter der Annahme, dass für $x=0$, $u=1$, $u_1=u_2=u_3=\ldots=0$ werde, erhält, so ist nach dem Vorigen der allgemeine Ausdruck für $f(x)$:

$$f(x) = V(C + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + \text{etc.}),$$

woraus folgt, dass man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, sämmtliche Integrationen von u_1 an mit $x=0$ anfangen lassen kann, wodurch die Constanten C_1, C_2,.... als überflüssig wegfallen.

Aus (12) folgt für $m=1$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\frac{1.(1+n-\lambda)^{n-\lambda-1}}{1.2.3....(n-\lambda)}u_\lambda.$$

Setzt man hierin $u_n=u.z_n$, so wird die Gleichung durch u theilbar und reducirt sich auf

$$\frac{\partial z_n}{\partial x}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}\frac{(\lambda+1)^{\lambda-1}}{1.2.3....\lambda}z_{n-\lambda}; \tag{13}$$

wo für z_0 immer 1 zu setzen ist; also

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=\frac{2^0}{1}.1=1,$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x}=z_1+\frac{3^1}{1.2},$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial x}=z_2+\frac{3^1}{1.2}z_1+\frac{4^2}{1.2.3},$$

$$\frac{\partial z_4}{\partial x}=z_3+\frac{3^1}{1.2}z_2+\frac{4^2}{1.2.3}z_1+\frac{5^3}{1.2.3.4},$$

u. s. f.

Man integrire diese Gleichungen von $x=0$ an und substituire die Resultate in (10), so wird

$$f(x)=Ce^x\{1+z_1h+z_2h^2+z_3h^3+\text{etc.}\},$$

wo z_n eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x ist. Wenn man nun allgemeine Formeln für die Coefficienten der Potenzen von x in dieser Function z_n sucht, so sieht man sich zur Gleichung (8) zurückgeführt.

Schliesslich möge erwähnt werden, dass die Gleichung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}=f(x+h)$$

der geometrischen Aufgabe entspricht, eine ihrer Evolute ähnliche Curve zu finden, aber so, dass diejenigen Punkte der Evolute, welche bestimmten Punkten der Evolvente vermöge der Aehnlichkeit entsprechen, diesen nicht zugleich als Krümmungsmittelpunkte zugehören, sondern um einen constanten Drehungswinkel von diesen letztern entfernt sind. Bezeichnet nämlich $\frac{x}{a}$ den Winkel, den die Tangente der Evolvente mit einer festen Richtung bildet, und $f(x)$ den zu diesem Winkel gehörenden Bogen derselben Curve, so drückt obige Gleichung aus, dass der Krümmungshalbmesser der Evolvente, d. i. der Bogen der Evolute, $a$mal so gross sei als derjenige Bogen der Evolvente, welcher zu dem um den constanten Unterschied $\frac{h}{a}$ vermehrten Winkel der

Tangente gehört. Da die logarithmische Spirale stets sich selbst ähnlich und ähnlich liegend bleibt, wenn sie um ihren Pol gedreht wird, so ist ihr auch ihre Evolute in dem oben ausgesprochenen Sinne ähnlich. — Indess scheint doch die Gleichung $f(x)=Ce^{kx}$, wo $e^{kh}=k$, keine ganz allgemeine Lösung der Aufgabe zu enthalten, wenn nur der reelle Werth von k berücksichtigt wird. Die transcendente Gleichung $e^{kh}=k$ hat nämlich ausser der betrachteten reellen noch unzählige imaginäre Wurzeln, so dass

$$f(x)=\Sigma Ce^{kx}$$

gesetzt werden darf. Man braucht nur zu zweien conjugirten imaginären Werthen von k auch für die zugehörigen arbiträren Constanten stets conjugirte imaginäre Werthe zu nehmen, um für $f(x)$ einen reellen Ausdruck zu erhalten. Da bei dieser Lösung eine unendliche Menge arbiträrer Constanten auftreten, so liegt die Vermuthung nahe, die ganz allgemeine Lösung der Aufgabe möchte eine arbiträre Function impliciren.

Sucht man die Curve, welche ihrer αten Evolute in dem obigen Sinne ähnlich ist, so wird man auf die Gleichung

$$\frac{\partial^\alpha f(x)}{\partial x^\alpha}=f(x+h)$$

geführt, welche durch das System der Gleichungen

$$p=e^{\frac{ph}{\alpha}}\cos\left(\frac{qh}{\alpha}+\frac{2n\pi}{\alpha}\right),$$

$$q=e^{\frac{ph}{\alpha}}\sin\left(\frac{qh}{\alpha}+\frac{2n\pi}{\alpha}\right),$$

$$f(x)=\Sigma e^{px}(A\cos qx+B\sin qx)$$

befriedigt wird, wo das Zeichen Σ eine doppelte Summe bezeichnet, die sich einestheils auf den Fortschritt der ganzen positiven Zahl n von 0 bis $\frac{\alpha}{2}$ oder $\frac{\alpha-1}{2}$ (je nachdem α gerade oder ungerade ist), anderntheils auf die unendliche Anzahl von zusammengehörigen Werthen bezieht, welche p und q vermöge der beiden ersten Gleichungen haben können, und wo A, B die zu jedem einzelnen Systeme von Werthen für n, p, q gehörenden arbiträren Constanten bezeichnen. Wenn aber die Function $f(x)$ für ein verschwindendes h continuirlich bleiben soll, so muss die Doppelsumme auf eine endliche einfache Summe beschränkt werden, die sich nur auf den Fortschritt von n bezieht. Es muss nämlich

$$f(x)=\Sigma Ce^{krx}$$

gesetzt werden, wo r eine Wurzel der Gleichung $r^\alpha-1=0$ und k diejenige Lösung der Gleichung

$$\frac{\log k}{k}=\frac{rh}{\alpha}$$

Digitized by Google

bezeichnet, für welche zugleich auch

$$k^m = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{m(m+n)^{n-1}}{1.2.3....n} \frac{r^n}{\alpha^n} h^n$$

ist, und wo das Summenzeichen sich auf die α Systeme von r, von k, einer zugehörigen Function von $\frac{rh}{\alpha}$, und von der arbiträren Constante C bezieht.

XXXV.
Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Man soll beweisen, dass

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} e^{-b^2x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-a^2b^2} \int_{ab}^\infty dt\, e^{-t^2}$$

ist, wo nun das Integral rechts

$$= \int_0^\infty dt\, e^{-t^2} - \int_0^{ab} dt\, e^{-t^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{ab} dt\, e^{-t^2}$$

numerisch berechnet werden kann, da bekanntlich schon **Kramp** eine Tafel für

$$\int_0^t dt\, e^{-t^2}$$

aufgestellt hat.

Es bezeichne $\overset{k}{C}_1$ die Summe der Zahlen 1, 2, 3,.... k, $\overset{k}{C}_2$ die Summe der in denselben liegenden Amben, jede Ambe als Produkt betrachtet, $\overset{k}{C}_3$ die Ternensumme u. s. f., überhaupt $\overset{k}{C}_s$ die

Digitized by Google

Summe der Combinationen $s$ter Classe ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, ... k, wobei jede Combination als Produkt gilt, ferner sei m eine positive ganze Zahl >1; man soll nun zeigen, dass sich die Reihe

$$\frac{1}{1^m}+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\ldots$$

auf folgende Gestalt bringen lässt:

$$\frac{1}{1.2....(m-1}\left[\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m^2}\overset{m-1}{C_1}+\frac{1}{m(m+1)^2}\overset{m}{C_2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{m(m+1)(m+2)^2}\overset{m+1}{C_3}+\ldots\right],$$

deren allgemeines Glied

$$\frac{1}{m(m+1)\ldots(m+s-1)(m+s)^2}\overset{m+s-1}{C_{s+1}}$$

ist. Für $m=2$ erhält man wegen $\overset{s+1}{C_{s+1}}=1.2\ldots(s+1)$ eine blosse Identität, für $m>2$ dagegen scheint die zweite Reihe rascher zu convergiren als die erste und deshalb die Transformation selbst nicht nutzlos zu sein.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Es ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x^2+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a\pi}{6}\right)}{\sin\frac{a\pi}{2}},$$

für $a>0$ und <4.

Es ist

$$\int_0^a \frac{(2x^2-a^2-b^2)\partial x}{\sqrt{a^2+b^2-x^2}\sqrt{a^2b^2-(a^2+b^2)x^2+x^4}}=\frac{\pi}{2},$$

wenn $b\geqq a$.

Wenn $F(x+iy)=U+iV$, so ist immer.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Es ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(a\operatorname{tg}\varphi)\,\partial\varphi=\frac{\pi}{2}e^{-a}.$$

XXXVI.

Miscellen.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Die Summe der Reihe $1^n+2^n+3^n+....+r^n$ lässt sich bekanntlich in Gestalt einer nach Potenzen von r verlaufenden Reihe darstellen, und man zeigt diess gewöhnlich mit Hülfe einer der inversen Differenzenrechnung angehörigen Formel; es scheint dagegen noch nicht bemerkt worden zu sein, dass man zu demselben Resultate auf einem ungleich einfacheren Wege gelangen kann. Bezeichnen wir nämlich mit $f(x)$ die Summe der Reihe

$$e^x+e^{2x}+e^{3x}+....+e^{rx}, \tag{1}$$

so ist durch $n$malige Differenziation nach x

$$f^{(n)}(x)=1^n e^x+2^n e^{2x}+3^n e^{3x}+....+r^n e^{rx},$$

und folglich für $x=0$

$$f^{(n)}(0)=1^n+2^n+3^n+...+r^n. \tag{2}$$

Hieraus geht hervor, dass es nur darauf ankommen würde, den $n$ten Differenzialquotienten der Funktion $f(x)$ zu entwickeln, was auf folgende sehr leichte Weise bewerkstelligt werden kann.

Digitized by Google

Bringt man die bekannte Formel für die Summirung der geometrischen Progression in Anwendung, indem man die Exponentialgrösse e^x an die Stelle des Progressionsexponenten setzt, so findet man leicht

$$e^x+e^{2x}+e^{3x}+\ldots+e^{rx}=\frac{e^{rx}-1}{e^x-1}e^x=f(x),$$

wofür wir schreiben wollen

$$f(x)=\frac{e^{rx}-1}{x}\cdot\frac{x}{1-e^{-x}}, \tag{3}$$

was offenbar mit dem Vorhergehenden zusammenfällt. Wenn nun überhaupt $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$ ist, so gilt bekanntlich die Formel

$$f^{(n)}(x)=n_0\varphi^{(n)}(x)\,\psi(x)+n_1\varphi^{(n-1)}(x)\,\psi'(x)+n_2\varphi^{(n-2)}(x)\,\psi''(x)+\ldots.$$

und für $x=0$

$$\left.\begin{array}{l}f^{(n)}(0)=n_0\,\varphi^{(n)}(0)\,\psi(0)+n_1\,\varphi^{(n-1)}(0)\,\psi'(0)\\ \qquad+n_2\,\varphi^{(n-2)}(0)\,\psi''(0)+\ldots\end{array}\right\} \tag{4}$$

Diess lässt sich leicht auf unseren Fall anwenden, indem man

$$\varphi(x)=\frac{e^{rx}-1}{x},\quad \psi(x)=\frac{x}{1-e^{-x}} \tag{5}$$

nimmt, und man erhält dann Folgendes.

1. Vermöge der bekannten Reihe für e^{rx} ist

$$\varphi(x)=r\left[\frac{1}{1}+\frac{rx}{1.2}+\frac{r^2x^2}{1.2.3}+\ldots\right]$$

und folglich für ein ganzes positives p

$$\varphi^{(p)}(0)=\frac{r^{p+1}}{p+1}. \tag{6}$$

2. Nimmt man in der bekannten, für $2\pi>z>-2\pi$ geltenden Reihe:

$$\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}z=\frac{1}{z}-\frac{B_1z}{1.2}-\frac{B_3z^3}{1.2.3.4}-\ldots,$$

worin $B_1, B_3, B_5, \ldots$ die Bernoullischen Zahlen bedeuten, $z=x\sqrt{-1}$, so wird

$$\tfrac{1}{2}\frac{e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}}{e^{\frac{1}{2}x}-e^{-\frac{1}{2}x}}$$

$$=\frac{1}{x}+\frac{B_1x}{1.2}-\frac{B_3x^3}{1.2.3.4}+\frac{B_5x^5}{1.2\ldots.6}-\ldots.$$

Digitized by Google

Stellt man die linke Seite in die Form

$$\frac{1}{2}\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{1-e^{-x}},$$

multiplicirt darauf mit x und transponirt $-\frac{x}{2}$, so ergiebt sich

$$\psi(x)=\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{x}{2}+\frac{B_1x^2}{1.2}-\frac{B_3x^4}{1.2.3.4}+\ldots,$$

und hieraus findet man der Reihe nach

$$\psi(0)=1,\ \psi'(0)=\tfrac{1}{2};$$

$$\psi^{(q)}(0)=(-1)^{\frac{1}{2}q+1}B_{q-1} \text{ für jedes gerade } q>0,$$

$$\psi^{(q)}(0)=0 \text{ für jedes ungerade } q>1.$$

Substituiren wir jetzt in die Gleichung (5) das, was die Formel (6) für $p=n,\ n-1,\ n-2,\ldots$ und die vorstehende für $q=2,3,4,\ldots$ giebt, so gelangt man zu der Gleichung

$$1^n+2^n+3^n+\ldots+r^n$$
$$=\frac{r^{n+1}}{n+1}+\tfrac{1}{2}r^n+n_2B_1\frac{r^{n-1}}{n-1}-n_4B_3\frac{r^{n-3}}{n-3}+n_6B_5\frac{r^{n-5}}{n-5}-\ldots,$$

und diese enthält die vollständige Lösung unserer Aufgabe.

Digitized by Google

XXXVII.

Ueber die Auflösung reiner Gleichungen, insbesondere solcher des dritten Grades durch Kettenbrüche.

Von dem
Herrn Doctor E. W. Grebe,
Gymnasiallehrer zu Cassel.

In der Gleichung $x^n = D$ wollen wir nicht allein n, sondern auch D als eine positive ganze Zahl voraussetzen, und nun die reelle positive Wurzel dieser Gleichung, die wir uns jedoch nur als irrational denken und mit x_0 bezeichnen wollen, durch den gemeinen Kettenbruch

$$[1] \quad x_0 = g_1 + \cfrac{1}{g_2 + \ldots + \cfrac{1}{g_i + \ldots}}$$

ausdrücken, zugleich aber auch die Näherungswerthe dieses Kettenbruchs durch

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots \frac{a_i}{b_i}, \ldots$$

Bezeichnen wir den auf g_i noch folgenden Kettenbruch durch $\frac{1}{x_i}$, so ist für $i \overline{\gtrless} 0$

$$[2] \quad \begin{cases} x_i = g_{i+1} + \dfrac{1}{x_{i+1}}, \\ x_{i+1} = \dfrac{1}{x_i - g_{i+1}}. \end{cases}$$

Daher ist insbesondere

Digitized by Google

$$x_2 = \frac{1}{\frac{1}{x_0 - g_1} - g_2} = \frac{x_0 - g_1}{g_1 g_2 + 1 - x_0} = \frac{b_1 x_0 - a_1}{a_2 - b_2 x_0}.$$

Der allgemeinere Satz

$$[3] \quad x_i = \frac{b_{i-1} x_0 - a_{i-1}}{a_i - b_i x_0},$$

welcher hiernach für $i=2$, und, wenn man, wie zu geschehen pflegt, $a_{-1}=0$, $b_{-1}=1$, $a_0=1$, $b_0=0$ setzt, auch für $i=0$ und $i=1$ richtig ist, lässt sich leicht durch den Schluss von i auf $i+1$ beweisen. Setzt man nämlich in die zweite Formel [2] den Werth [3] und reducirt, so erhält man

$$x_{i+1} = \frac{b_i x_0 - a_i}{(a_i g_{i+1} + a_{i-1}) - (b_i g_{i+1} + b_{i-1}) x_0},$$

woraus das zu Beweisende durch Anwendung der bekannten Formeln

$$a_{i+1} = a_i g_{i+1} + a_{i-1},$$
$$b_{i+1} = b_i g_{i+1} + b_{i-1}$$

sogleich folgt. Fast noch einfacher hätte man sich von der Richtigkeit der Formel [3] überzeugen können, wenn man von

$$\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} = \frac{a_i g_{i+1} + a_{i-1}}{b_i g_{i+1} + b_{i-1}}$$

zu

$$x_0 = \frac{a_i x_i + a_{i-1}}{b_i x_i + b_{i-1}}$$

übergegangen wäre, und nun diese letzte Gleichung nach x_i aufgelöst hätte.

In [3] lässt sich nun der Bruch rechts vom Gleichheitszeichen mit

$$a_i^{n-1} + a_i^{n-2} b_i x_0 + a_i^{n-3} b_i^2 x_0^2 + \ldots$$
$$\ldots + a_i^2 b_i^{n-3} x_0^{n-3} + a_i b_i^{n-2} x_0^{n-2} + b_i^{n-1} x_0^{n-1}$$

erweitern. Setzen wir aber der Kürze wegen

$$[4] \quad a_i^n - b_i^n D = (-1)^i k_i,$$
$$[5] \quad b_i^{n-1} b_{i-1} D - a_i^{n-1} a_{i-1} = (-1)^i h_i;$$

so erhalten wir durch die angedeutete Erweiterung, bei deren Ausführung in Beziehung auf den Zähler wir noch den bekannten Satz $a_i b_{i-1} - a_{i-1} b_i = (-1)^i$ berücksichtigen müssen,

$$[6] \quad x_i = \frac{a_i^{n-2} x_0 + a_i^{n-3} b_i x_0^2 + \ldots + a_i b_i^{n-3} x_0^{n-2} + b_i^{n-2} x_0^{n-1} + h_i}{k_i}.$$

Digitized by Google

Man kann jedoch auch den Bruch in [3] mit

$$a_{i-1}^{n-1}+a_{i-1}^{n-2}b_{i-1}x_0+\ldots+a_{i-1}b_{i-1}^{n-2}x_0^{n-2}+b_{i-1}^{n-1}x_0^{n-1}$$

erweitern. Alsdann ergibt sich auf ähnliche Weise, wenn man noch

$$[7]\quad b_{i-1}^{n-1}b_iD-a_{i-1}^{n-1}a_i=(-1)^i l_i$$

setzt,

$$[8]\quad x_i=\frac{k_{i-1}}{a_{i-1}^{n-2}x_0+a_{i-1}^{n-3}b_{i-1}x_0^2+\ldots+a_{i-1}b_{i-1}^{n-3}x_0^{n-2}+b_{i-1}^{n-2}x_0^{n-1}-l_i}.$$

Jetzt lassen sich die Formeln

$$[9]\quad \begin{cases} a_i^{n-1}=h_ib_i+k_ib_{i-1}, \\ a_i^{n-1}=k_ib_{i+1}-l_{i+1}b_i, \\ b_i^{n-1}D=h_ia_i+k_ia_{i-1}, \\ b_i^{n-1}D=k_ia_{i+1}-l_{i+1}a_i \end{cases}$$

leicht beweisen, wenn man in jeder derselben auf der rechten Seite das den Gleichungen [4], [5] und [7] Entsprechende setzt und dann reducirt.

Weil für ein ungerades i $\frac{a_i}{b_i}<x_0$ und für ein gerades i $\frac{a_i}{b_i}>x_0$, so ist k_i immer positiv. Von h_i und l_i soll in dieser Beziehung bald nachher die Rede sein.

Setzt man in [6] statt x_0 überall den Näherungswerth $\frac{a_i}{b_i}$, so setzt man, wenn i ungerade ist, zu wenig, dagegen, wenn i gerade ist, zu viel. Bezeichnen wir den begangenen Fehler absolut genommen durch α_i, so erhalten wir statt [6]

$$[10]\quad x_i=\frac{\frac{(n-1)a_i^{n-1}}{b_i}-(-1)^i\alpha_i+h_i}{k_i}.$$

Benutzen wir auf ähnliche Weise den Näherungswerth $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$ bei [8], so ergibt sich

$$[11]\quad x_i=\frac{k_{i-1}}{\frac{(n-1)a_{i-1}^{n-1}}{b_{i-1}}+(-1)^i\alpha_{i-1}-l_i}.$$

Man hätte aber auch in [6] sowohl, als in [8], zuerst $x_0=\frac{D}{x_0^{n-1}}$, $x_0^2=\frac{D}{x_0^{n-2}}$, ... $x_0^{n-2}=\frac{D}{x_0^2}$, $x_0^{n-1}=\frac{D}{x_0}$, und dann statt jedes neu

Digitized by Google

aufgetretenen x_0 den Näherungswerth, dort $\frac{a_i}{b_i}$, hier $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$, setzen können. Heissen die so begangenen absoluten Fehler β_i und β_{i-1}, so hat man

$$[12] \quad x_i = \frac{\frac{(n-1)\,b_i^{n-1}\,D}{a_i} + (-1)^i \beta_i + h_i}{k_i},$$

$$[13] \quad x_i = \frac{k_{i-1}}{\frac{(n-1)\,b_{i-1}^{n-1}\,D}{a_{i-1}} - (-1)^i \beta_{i-1} - l_i}.$$

Wenden wir bei den Gleichungen [10], [11], [12] und [13] die Formeln in [9] der Reihe nach zu Substitutionen an, so erhalten wir

$$[14] \quad \begin{cases} x_i = \frac{n h_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,b_{i-1}}{b_i} - \frac{(-1)^i\,\alpha_i}{k_i}, \\ \frac{1}{x_i} = \frac{(n-1)\,b_i}{b_{i-1}} - \frac{n l_i}{k_{i-1}} + \frac{(-1)^i \alpha_{i-1}}{k_{i-1}}, \\ x_i = \frac{n h_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,a_{i-1}}{a_i} + \frac{(-1)^i\,\beta_i}{k_i}, \\ \frac{1}{x_i} = \frac{(n-1)\,a_i}{a_{i-1}} - \frac{n l_i}{k_{i-1}} - \frac{(-1)^i \beta_{i-1}}{k_{i-1}}. \end{cases}$$

Eine wichtige Folgerung, die sich aus der Vergleichung der ersten und dritten Formel in [14] ergibt, ist nun die, dass der (irrationale) Werth von x_i immer zwischen die rationalen Grenzen

$$\frac{n h_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,b_{i-1}}{b_i} \quad \text{und} \quad \frac{n h_i}{k_i} + \frac{(n-1)\,a_{i-1}}{a_i}$$

fällt. Diese Grenzen, deren Abstand $\frac{n-1}{a_i b_i}$ ist, rücken mit dem Wachsen von i immer näher an einander. Wir wollen dieselben indessen noch auf andere Weise ausdrücken. Da

$$a_i = a_{i-1}\,g_i + a_{i-2},$$

so ist

$$\frac{a_i}{a_{i-1}} = g_i + \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}$$

und

$$\frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{1}{g_i + \frac{a_{i-2}}{a_{i-1}}}.$$

Durch wiederholte Anwendung des letzten Gesetzes bekommt man

Digitized by Google

$$\frac{a_{i-1}}{a_i}=\frac{1}{g_i}+\frac{1}{g_{i-1}}+\ldots+\frac{1}{g_1}$$

und mit Hülfe ähnlicher Schlüsse

$$\frac{b_{i-1}}{b_i}=\frac{1}{g_i}+\frac{1}{g_{i-1}}+\ldots+\frac{1}{g_2}.$$

Bezeichnen wir diese eben erhaltenen Kettenbrüche einmal durch $\frac{1}{g_{i\ldots 1}}$ und $\frac{1}{g_{i\ldots 2}}$, so fällt x_i zwischen $\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\ldots 2}}$ und $\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\ldots 1}}$. Ist nun $i \overline{\overline{>}} 2$, so hat man

$$[15]\quad \begin{cases} x_i<\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_i}, \\ x_i>\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_i+1}. \end{cases}$$

Diese Formeln setzen uns in den Stand, sobald die Rechnung einmal im Gange ist, die grösste in x_i enthaltene ganze Zahl g_{i+1} aus g_i, h_i und k_i mit Sicherheit zu ermitteln.

Zu einer andern Grenzbestimmung führt auch die Vergleichung der zweiten und vierten Formel in [14], welche wir jedoch übergehen, da die Ausdrücke minder brauchbar für die Anwendung werden.

Eine einfache zwischen g, k, h und l stattfindende Relation ergibt sich durch die Verbindung von [6] und [8]. Erhöht man in der zuletzt angeführten Formel alle Indices um eine Einheit, so stimmen die irrationalen Glieder beider Formeln überein. Drückt man dieselben auf doppelte Weise aus, so ist

$$x_i k_i - h_i=\frac{k_i}{x_{i+1}}+l_{i+1}.$$

Macht man nun eine Substitution aus der ersten Formel [2], so erhält man

$$[16]\quad g_{i+1}k_i-h_i=l_{i+1}.$$

Es lässt sich nun auch die Frage über den positiven oder negativen Werth von l_i und h_i entscheiden. Nach [14] ist, wenn wir unter $g_{i\ldots}$ gewisse zwischen $g_{i\ldots 1}$ und $g_{i\ldots 2}$ fallende Werthe verstehen,

$$x_i=\frac{nh_i}{k_i}+\frac{n-1}{g_{i\ldots}},$$

$$\frac{1}{x_i}=(n-1)g_{i\ldots}-\frac{nl_i}{k_{i-1}};$$

Digitized by Google

daher

$$[17]\quad \begin{cases} \dfrac{nh_i}{k_i} = x_i - \dfrac{n-1}{g_i\ldots.}, \\ \dfrac{nl_i}{k_{i-1}} = (n-1)g_i\ldots. - \dfrac{1}{x_i}. \end{cases}$$

Der letztere der beiden Ausdrücke in [17] ist nun, wie man sich leicht überzeugt, stets positiv, daher hat auch l_i diese Eigenschaft; der erstere aber kann positiv, negativ und auch null sein.

$$h_i \gtreqless 0, \text{ jenachdem } x_i g_i\ldots. \gtreqless n-1.$$

Für $n=2$ ist die Bedingung $x_i g_i\ldots.>n-1$ immer erfüllt, h_i also unter dieser Voraussetzung stets positiv. Für $n=3$ kann h_i nur dann null oder negativ sein, wenn sowohl g_i als $g_{i+1}=1$, jedoch bleibt auch selbst in diesem Falle ein positiver Werth von h_i noch möglich.

Für $n=2$ wird auch $h_i=l_i$, wie aus [5] und [7] sofort erhellt, und aus [6] und [8] ergibt sich alsdann

$$x_i = \frac{x_0+h_i}{k_i} = \frac{x_0+l_i}{k_i},$$

$$x_i = \frac{k_{i-1}}{x_0-l_i} = \frac{k_{i-1}}{x_0-h_i};$$

woraus weiter durch Verbindung

$$\frac{x_0+h_i}{k_i} = \frac{k_{i-1}}{x_0-h_i},$$

und dann durch Reduction und Einführung von D

$$[18]\quad D = h_i^2 + k_i k_{i-1}$$

folgt.

Für $n=3$ erhält man aus [6] und [8]

$$[19]\quad \begin{cases} x_i = \dfrac{a_i x_0 + b_i x_0^2 + h_i}{k_i}, \\ x_i = \dfrac{k_{i-1}}{a_{i-1}x_0 + b_{i-1}x_0^2 - l_i}. \end{cases}$$

Setzt man auch hier die beiden Werthe rechter Hand gleich und reducirt, so erhält man

$$\begin{aligned} 0 = \; & a_i b_{i-1} D + a_{i-1} h_i x_0 + a_i a_{i-1} x_0^2 \\ & + a_{i-1} b_i D + b_i b_{i-1} D x_0 + b_{i-1} h_i x_0^2 \\ & - h_i l_i - a_i l_i x_0 - b_i l_i x_0^2 \\ & - k_i k_{i-1}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

woraus wegen der Irrationalität von x_0 die drei Gleichungen folgen:

$$[20] \quad \begin{cases} h_i\, l_i + k_i\, k_{i-1} = (a_i\, b_{i-1} + a_{i-1}\, b_i)\, D, \\ a_i\, l_i = a_{i-1}\, h_i + b_i\, b_{i-1}\, D, \\ b_i\, l_i = a_i\, a_{i-1} + b_{i-1}\, h_i. \end{cases}$$

Für höhere Werthe von n kann man zwar ähnliche Formeln ableiten, doch zeichnen sich dieselben nicht durch besondere Einfachheit aus.

Wir wollen jetzt eine allgemeinere Bezeichnung einführen, in Beziehung auf welche die bisher mit k, h und l bezeichneten Zahlen nur besondere Fälle sind. Es soll nämlich jetzt dem Symbol $\begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix}$ die Bedeutung beigelegt werden, dass

$$[21] \quad (-1)^i \begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix} = b_i^{\,r}\, b_{i-1}^{\,n-r} D - a_i^{\,r}\, a_{i-1}^{\,n-r},$$

wobei r null und jede positive ganze Zahl, die $\overline{\overline{<}}\, n$ ist, bedeuten kann.

Es ist alsdann

$$[22] \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i \end{pmatrix} = k_{i-1}, \\ \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i \end{pmatrix} = l_i, \\ \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i \end{pmatrix} = h_i, \\ \begin{pmatrix} n \\ n \\ i \end{pmatrix} = -k_i. \end{cases}$$

Substituirt man nun auf der rechten Seite von [21] unter Anwendung des binomischen Lehrsatzes statt b_i und a_i bezüglich $b_{i-1}\, g_i + b_{i-2}$ und $a_{i-1}\, g_i + a_{i-2}$, ordnet dann das Ganze nach Potenzen von g_i, reducirt und hebt mit $(-1)^i$ auf, so erhält man

$$[23] \quad -\begin{pmatrix} r \\ n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,r} + \frac{r}{1} \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} \begin{pmatrix} n-2 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,r-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{r}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i + \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung heisst, wenn man statt r überall n schreibt,

$$[24] \quad -\begin{pmatrix} n \\ n \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,n} + \frac{n}{1} \begin{pmatrix} n-1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \begin{pmatrix} n-2 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i^{\,n-2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix} g_i + \begin{pmatrix} 0 \\ n \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Benutzt man die Formel [23], um nach und nach $\begin{pmatrix}0\\n\\i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\n\\i\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\n\\i\end{pmatrix}$, u. s. w. bis zu $\begin{pmatrix}n\\n\\i\end{pmatrix}$, dessen negativen Werth man in [24] hat, auszudrücken, multiplicirt dann den ersten dieser Ausdrücke mit $+g_i^n$, den zweiten mit $-\frac{n}{1}g_i^{n-1}$, den dritten mit $+\frac{n(n-1)}{1.2}g_i^{n-2}$, u. s. w., den vorletzten mit $(-1)^{n-1}g_i$, den letzten endlich mit $(-1)^n$, und addirt diese Producte sämmtlich; so hebt sich rechts vom Gleichheitszeichen, wo man die Entwickelung von $(1-1)^n$ zu beachten hat, Alles mit Ausnahme des letzten Gliedes $(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}0\\n\\i-1\end{pmatrix}$ auf, und man hat also

[25] $$(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}0\\n\\i-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\\n\\i\end{pmatrix}g_i^n-\frac{n}{1}\begin{pmatrix}1\\n\\i\end{pmatrix}g_i^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\begin{pmatrix}2\\n\\i\end{pmatrix}g_i^{n-2}-$$

$$\ldots\ldots+(-1)^{n-2}\frac{n(n-1)}{1.2}\begin{pmatrix}n-2\\n\\i\end{pmatrix}g_i^2+(-1)^{n-1}\frac{n}{1}\begin{pmatrix}n-1\\n\\i\end{pmatrix}g_i+(-1)^n\begin{pmatrix}n\\n\\i\end{pmatrix}.$$

Für die speciellen Werthe 2, 3 und 4 von n ergeben sich noch folgende Formelgruppen, die wir bemerken wollen. Aus [23]

[26] $$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\2\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}2\\2\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}1\\2\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\\2\\i\end{pmatrix}&=+\begin{pmatrix}2\\2\\i-1\end{pmatrix}g_i^2+2\begin{pmatrix}1\\2\\i-1\end{pmatrix}g_i+\begin{pmatrix}2\\i-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

[27] $$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\3\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}3\\3\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}2\\3\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\\3\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}3\\3\\i-1\end{pmatrix}g_i^2-2\begin{pmatrix}2\\3\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}1\\3\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3\\3\\i\end{pmatrix}&=+\begin{pmatrix}3\\3\\i-1\end{pmatrix}g_i^3+3\begin{pmatrix}2\\3\\i-1\end{pmatrix}g_i^2+3\begin{pmatrix}1\\3\\i-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\\i-1\end{pmatrix}\end{aligned}\right.$$

[28] $$\left\{\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\4\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}4\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}3\\4\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}2\\4\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}4\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i^2-2\begin{pmatrix}3\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}2\\4\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}3\\4\\i\end{pmatrix}&=-\begin{pmatrix}4\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i^3-3\begin{pmatrix}3\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i^2-3\begin{pmatrix}2\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i-\begin{pmatrix}1\\4\\i-1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}4\\4\\i\end{pmatrix}&=+\begin{pmatrix}4\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i^4+4\begin{pmatrix}3\\4\\i-1\end{pmatrix}g_i^3+6\begin{pmatrix}2\\1\\i-1\end{pmatrix}g_i^2+\begin{pmatrix}0\\4\\i-1\end{pmatrix}.\end{aligned}\right.$$

Ferner ans [25]

Digitized by Google

$$[29]\quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+2\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i\end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix}0\\3\\-1\end{smallmatrix}\right)=+\left(\begin{smallmatrix}0\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^3-3\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i\end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix}0\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}0\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^4+4\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^3-\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i^2+\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)g_i-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i\end{smallmatrix}\right) \end{cases}$$

Durch Verbindung der zweiten Gleichung in [26] mit der ersten in [29] durch Addition und Subtraction leitet man unter Berücksichtigung des sich aus [22] ergebenden Satzes

$$[30]\quad \left(\begin{smallmatrix}0\\n\\i\end{smallmatrix}\right)=-\left(\begin{smallmatrix}n\\n\\i-1\end{smallmatrix}\right)$$

noch ab

$$[31]\quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\i-2\end{smallmatrix}\right)=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i \\ \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\i\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\i\end{smallmatrix}\right)g_i. \end{cases}$$

Ebenso folgt aus der Verbindung von [27] und [29]

$$[32]\quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3+\frac{3}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2 \\ \qquad\qquad +\frac{3}{2}\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i, \\ \left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i\end{smallmatrix}\right)=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\3\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\3\\i-1\end{smallmatrix}\right)\right)g_i; \end{cases}$$

so wie endlich aus der Verbindung von [28] und [29]

$$[33]\quad \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-2\end{smallmatrix}\right)=2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^3 \\ \qquad +3\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2+2\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i, \\ 2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)\right)=-\left(\begin{smallmatrix}4\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)g_i^3 \\ \qquad -2\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}1\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i^2-3\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i-1\end{smallmatrix}\right)-\left(\begin{smallmatrix}2\\4\\i\end{smallmatrix}\right)\right)g_i. \end{cases}$$

Potenzirt man die oben in dem Beweise für [3] bereits erwähnte Gleichung

Digitized by Google

$$x_0 = \frac{a_i x_i + a_{i-1}}{b_i x_i + b_{i-1}}$$

mit n und reducirt, so erhält man

$$[34] \quad 0 = \left(\begin{smallmatrix} n \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^n + \frac{n}{1} \left(\begin{smallmatrix} n-1 \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\begin{smallmatrix} n-2 \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^2 + \frac{n}{1} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ n \\ i \end{smallmatrix}\right).$$

Es ist also insbesondere auch

$$[35] \quad \begin{cases} 0 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^2 + 2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ i \end{smallmatrix}\right), \\ 0 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^3 + 3 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^2 + 3 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ i \end{smallmatrix}\right), \\ 0 = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 4 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^4 + 4 \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^3 + 6 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i^2 + 4 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ i \end{smallmatrix}\right) x_i + \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \\ i \end{smallmatrix}\right). \end{cases}$$

Wenden wir uns nach diesen Ergebungen auf allgemeinem Gebiete zu der Verwandlung der Cubikwurzeln aus ganzen Irrationalzahlen in Kettenbrüche, so werden wir auch wieder der Bezeichnung der hier in Betracht kommenden Zahlen durch k, h und l als der bequemeren den Vorzug geben.

Die grösste in $\sqrt[3]{D}$ steckende ganze Zahl wird offenbar g_1. Da nun der erste Näherungsbruch $\frac{g_1}{1}$ ist, so hat man $a_1 = g_1$, $b_1 = 1$ und weiter in Gemässheit der Formeln [7], [5] und [4] $l_1 = g_1$, $h_1 = g_1^2$, $k_1 = D - g_1^3$. Nach der Folgerung aus [14] muss nun x_1 zwischen $\frac{3h_1}{k_1}$ und $\frac{3h_1}{k_1} + \frac{2}{g_1}$ liegen, und g_2, welches die grösste in x_1 enthaltene ganze Zahl ist, ist $\geqq \frac{3h_1}{k_1}$, jedenfalls aber $< \frac{3h_1}{k_1} + \frac{2}{g_1}$ sein. Es bleibt hier, namentlich bei kleinen Werthen von g_1, oft die Wahl zwischen zwei ganzen Zahlen als Bewerbern um g_2, ein Fall, der sich auch bei einem grösseren Index ereignen kann. Man probire alsdann, halte aber bei allen Proben zur Bestimmung eines g_i bei Kettenbrüchen folgende Regel fest: war g_i zu gross, so ergibt sich später g_{i+1} negativ; war g_i zu klein, so ergibt sich g_{i+1} als Null. Aus g_2 und den früher gefundenen Zahlen folgt l_2 nach [16] oder der ersten Formel in [27], h_2 und k_2 ist durch die zweite und dritte Formel in [27] bestimmt. Ueberhaupt kann nun immer das neue g_i mit Hülfe von [15], das neue l_i, h_i und k_i durch [27] gefunden werden. Jedes weitere a_i und b_i wird nach den Formeln $a_i = a_{i-1} g_i + a_{i-2}$ und $b_i = b_{i-1} g_i + b_{i-2}$ berechnet. Für den practischen Gebrauch haben sich mir die aus [27] leicht abzuleitenden Formeln

Digitized by Google

$$[36] \quad \begin{cases} l_i = k_{i-1}\, g_i - h_{i-1}, \\ h_i = (l_i - h_{i-1})\, g_i - l_{i-1}, \\ k_i = (h_{i-1} g_i - h_i + 2l_{i-1})\, g_i + k_{i-2} \end{cases}$$

als die bequemsten bewährt.

Die hier folgende Tabelle enthält für alle ganzen Zahlen, die kleiner als 64 und für die Cubikwurzel irrational sind, eine Zusammenstellung der Werthe von g_i, l_i, h_i, k_i, a_i und b_i, i von 1 bis 10 genommen. Ich behalte mir vor, über die Zahlen dieser Tabelle, welche ich nach der sorgfältigen Controle, der ich dieselben unterworfen habe, als ganz frei von Rechnungsfehlern betrachten darf, später noch weitere Bemerkungen zu machen. Hier sei nur mit Rücksicht auf die Anmerkung 4) des Herrn Seeling im VIII. Theile des Archivs, Seite 80. unten, auf den Werth $h_3 = 0$ bei $\sqrt[3]{49}$ aufmerksam gemacht.

Digitized by Google

$\sqrt{3}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	2	3	1	4	1	5	1	1	6
l_i	1	3	6	23	29	144	189	457	1306	2470
h_i	1	3	6	11	49	66	471	−203	1052	7202
k_i	2	3	29	10	193	51	928	1103	587	11435
a_i	1	3	10	13	62	75	437	512	949	6206
b_i	1	2	7	9	43	52	303	355	658	4303

$\sqrt{2}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	3	1	5	1	1	4	1	1	8
l_i	1	2	8	11	28	72	134	262	803	1363
h_i	1	2	4	27	−10	54	248	−120	661	4813
k_i	1	10	3	55	62	47	510	683	253	17331
a_i	1	4	5	29	34	63	286	349	635	5429
b_i	1	3	4	23	27	50	227	277	504	4309

Digitized by Google

$\sqrt[3]{5}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	2	2	4	3	3	1	5	1
l_i	1	3	5	15	37	161	406	1583	2189	5672
h_i	1	1	5	15	73	227	376	801	5357	−1874
k_i	4	3	10	13	78	211	1959	598	11029	−12207
a_i	1	2	5	12	53	171	566	737	4251	4988
b_i	1	1	3	7	31	100	331	431	2486	2917

$\sqrt[3]{4}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	1	2	2	1	3	2	3	1
l_i	1	2	4	8	16	45	72	268	517	1872
h_i	1	0	2	8	8	21	108	248	539	816
k_i	3	4	5	12	53	31	188	255	2411	1012
a_i	1	2	3	8	19	27	100	227	781	1008
b_i	1	1	2	5	12	17	63	143	492	635

$\sqrt[3]{7}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	10	2	16	2	1	4	2	1
l_i	1	5	7	77	163	1597	4564	7630	21726	83795
h_i	1	3	35	77	1299	433	2534	15820	4182	57887
k_i	6	1	56	15	1448	4997	2541	18773	87977	8520
a_i	1	2	21	44	725	1494	2219	10370	22959	33329
b_i	1	1	11	33	379	781	1160	5421	12002	17423

$\sqrt[3]{6}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	1	1	4	2	7	3	508	1	5	5
l_i	1	4	6	30	68	541	1693	653580	827130	4337515
h_i	1	2	12	30	236	847	429227	222660	2368770	9016595
k_i	5	2	21	14	259	5	1082807	209958	1341257	22617533
a_i	1	2	9	20	149	467	237385	237852	1426645	7371077
b_i	1	1	5	11	82	257	130638	130895	785113	4056460

Digitized by Google

$\sqrt[3]{10}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	6	2	9	1	1	2	4	1	12
l_i	2	8	52	110	485	898	2136	4486	24258	30560
h_i	4	22	52	470	—95	508	2358	6376	13396	181710
k_i	2	37	18	955	803	1322	1711	30634	3663	361330
a_i	2	13	28	265	293	558	1409	6194	7603	97430
b_i	1	6	13	123	136	259	654	2875	3529	45223

$\sqrt[3]{9}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	12	2	18	1	1	1	1	4	1
l_i	2	8	100	206	1721	2823	3888	10231	17551	32112
h_i	4	46	100	1808	—293	1395	—330	6673	33281	—18720
k_i	1	73	17	3529	2530	5283	9901	6056	65393	93159
a_i	2	25	52	961	1013	1974	2987	4961	22831	27792
b_i	1	12	25	462	487	949	1436	2385	10976	13361

Digitized by Google

$\sqrt[3]{12}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	3	2	5	15	7	3	1	1	3
l_i	2	8	28	72	393	5702	33004	59527	139920	253632
h_i	4	10	28	192	2943	18920	36550	−10027	90420	349716
k_i	4	19	20	39	1235	17308	96077	129893	114684	734045
a_i	2	7	16	87	1321	9334	29323	38657	67980	242597
b_i	1	3	7	38	577	4077	12808	16885	29693	105964

$\sqrt[3]{11}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	4	2	6	1	1	2	1	2	9
l_i	2	8	36	78	241	497	845	1943	4115	11859
h_i	4	14	36	216	−53	309	575	523	5241	55447
k_i	3	25	19	457	444	577	2518	2319	1900	1887
a_i	2	9	20	129	149	278	705	983	2671	25022
b_i	1	4	9	58	67	125	317	442	1201	11251

$\sqrt[3]{14}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	2	3	1	1	5	5	9	6
l_i	2	8	20	46	81	218	430	2443	12712	118684
h_i	4	6	20	58	−23	160	1132	6125	56840	358352
k_i	6	13	22	139	195	118	715	2093	29254	50765
a_i	2	5	12	41	53	94	523	2709	24904	152133
b_i	1	2	5	17	22	39	217	1124	10333	63122

$\sqrt[3]{13}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	1	5	1	1	43	3	2	1
l_i	2	6	19	29	60	217	405	14766	37990	60373
h_i	4	2	11	71	−40	197	8727	17712	25790	−3407
k_i	5	21	8	131	177	14	7831	27851	86163	133028
a_i	2	5	7	40	47	87	3788	11451	26690	38141
b_i	1	2	3	17	20	37	1611	4870	11351	16221

$\sqrt[3]{16}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	12	10	18	1	6	1	21
l_i	2	4	13	25	315	2979	47504	50032	399997	462754
h_i	4	−2	11	155	1575	24957	19568	135280	214685	4809452
k_i	8	11	3	47	253	72461	11600	535277	32259	11012744
a_i	2	3	5	63	635	11493	12128	84261	96389	2108430
b_i	1	1	2	25	252	4561	4813	33439	38252	836731

$\sqrt[3]{15}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	2	6	1	8	1	10	8	12	1
l_i	2	10	20	137	157	1420	1770	19344	140646	1921155
h_i	4	10	50	67	583	680	9480	77142	742704	1037805
k_i	7	5	187	28	2003	245	3603	18149	2663859	4340
a_i	2	5	32	37	328	365	3978	32189	390246	422435
b_i	1	2	13	15	133	148	1613	13052	158237	171289

$\sqrt[3]{18}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	1	1	1	3	22	1	2
l_i	2	6	9	16	22	51	108	380	5081	7609
h_i	4	0	3	4	2	27	192	4028	673	8791
k_i	10	9	19	26	53	45	26	9109	4141	14543
a_i	2	3	5	8	13	21	76	1693	1769	5231
b_i	1	1	2	3	5	8	29	646	675	1996

$\sqrt[3]{17}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	1	3	138	1	1	3	2	3
l_i	2	5	11	26	92	4453	10429	21412	74978	166381
h_i	4	−1	7	46	6322	−1961	7937	29996	68552	218509
k_i	9	10	11	1	10775	8468	9783	52487	78311	463796
a_i	2	3	5	18	2489	2507	4996	17495	39986	137453
b_i	1	1	2	7	968	975	1943	6804	15551	53457

$\sqrt[3]{20}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	2	1	1	154	6	1	1	1
l_i	2	8	12	16	59	103	13609	50402	58796	177083
h_i	4	2	12	−8	51	7949	33857	2936	5458	112829
k_i	12	7	28	51	1	3593	84259	61732	182541	71953
a_i	2	3	8	11	19	2937	17641	20578	38219	58797
b_i	1	1	3	4	7	1082	6499	7581	14080	21661

$\sqrt[3]{19}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	2	63	1	2	2	2	1	95
l_i	2	7	15	42	1535	2231	6661	10835	45996	65269
h_i	4	1	21	1308	185	2557	5977	3055	32106	3104489
k_i	11	8	1	2843	1208	4609	8406	49051	1025	3618486
a_i	2	3	8	507	515	1537	3589	8715	12304	1177595
b_i	1	1	3	190	193	576	1345	3266	4611	441311

Digitized by Google

$\sqrt[3]{22}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	4	19	2	2	2	2	2	29
l_i	2	10	16	76	1128	2428	6042	13796	43716	107702
h_i	4	4	38	706	768	2192	5272	11006	51624	1582546
k_i	14	5	6	917	1598	4117	9534	27361	5494	84839
a_i	2	3	14	269	552	1373	3298	7969	19236	565813
b_i	1	1	5	96	197	490	1177	2844	6865	201929

$\sqrt[3]{21}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	3	6	1	3	17	1	7	3
l_i	2	9	15	51	255	432	1581	24367	29428	212509
h_i	4	3	27	129	75	816	12573	10213	110138	277685
k_i	13	6	13	384	169	141	36940	5663	107549	340418
a_i	2	3	11	69	80	309	5333	5642	44827	140123
b_i	1	1	4	25	29	112	1933	2045	16248	50789

$\sqrt[3]{24}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	7	1	1	1	12	13	1	10
l_i	2	12	15	70	76	261	429	4940	62672	74586
h_i	4	6	51	4	2	183	2691	28808	28924	393948
k_i	16	3	121	80	263	51	587	91480	10351	297840
a_i	2	3	23	26	49	75	949	12412	13361	146022
b_i	1	1	8	9	17	26	329	4303	4632	50623

$\sqrt[3]{23}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	5	2	2	7	1	16	4	1
l_i	2	11	15	71	195	430	3537	4273	53637	257843
h_i	4	5	39	49	221	1268	1839	35407	68647	135559
k_i	15	4	55	122	93	4805	382	22261	326490	62623
a_i	2	3	17	37	91	674	765	12914	52421	65335
b_i	1	1	6	13	32	237	269	4541	18433	22974

Digitized by Google

$\sqrt[3]{26}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	25	1	1	1	39	12	1	1
l_i	2	14	17	232	238	907	1400	52024	240109	606704
h_i	4	8	211	4	2	667	27680	290728	−102643	469238
k_i	18	1	443	242	909	53	6642	530837	504061	439174
a_i	2	3	77	80	157	237	9400	113037	122437	235474
b_i	1	1	26	27	53	80	3173	38156	41329	79485

$\sqrt[3]{25}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	2	1	12	6	4	1	2	2	2	5
l_i	2	13	17	211	1057	3508	5652	14794	41346	96431
h_i	4	7	107	607	1589	862	6072	11792	44314	219239
k_i	17	2	53	416	5097	3257	10433	26569	28149	451684
a_i	2	3	38	231	962	1193	3348	7889	19126	103519
b_i	1	1	13	79	329	408	1145	2698	6541	35403

Digitized by Google

$\sqrt[3]{29}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	13	1	4	1	4	2	2	2	3
l_i	3	17	186	208	993	1381	5791	12905	34597	77125
h_i	9	101	68	374	411	2887	4427	11165	33959	94901
k_i	2	287	69	1367	448	4339	8666	22881	37028	251391
a_i	3	40	43	212	255	1232	2719	6670	16059	54847
b_i	1	13	14	69	83	401	885	2171	5227	17852

$\sqrt[3]{28}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	27	3	40	1	10	1	1	21	13
l_i	3	18	492	1462	53216	58324	205800	721349	1427182	28509964
h_i	9	240	738	28468	23286	297164	−149688	665237	15279496	170568902
k_i	1	244	55	81684	8161	502964	571661	99639	3368420	402045469
a_i	3	82	249	10042	10291	112952	123243	236195	5083338	66319589
b_i	1	27	82	3307	3389	37197	40586	77783	1674029	21840160

Digitized by Google

$\sqrt[3]{31}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	7	13	1	2	8	1	1	12	1
l_i	3	19	128	985	1841	5221	15291	50308	91178	1066127
h_i	9	67	774	83	2531	19679	−9609	44626	508316	466633
k_i	4	15	1759	962	969	34970	40699	11317	1574443	235356
a_i	3	22	289	311	911	7599	8510	16109	201818	217927
b_i	1	7	92	99	290	2419	2709	5128	64245	69373

$\sqrt[3]{30}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	9	3	13	1	9	1	2	5	4
l_i	3	18	168	489	6256	6992	43091	76789	231594	1084068
h_i	9	78	252	2913	2854	30986	5113	100261	579876	1785174
k_i	3	82	57	9169	1094	74077	40951	66371	415986	4056443
a_i	3	28	87	1159	1246	12373	13619	39611	211674	886307
b_i	1	9	28	373	401	3982	4383	12748	68123	285240

$\sqrt[3]{33}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	4	1	4	1	1	27	5	1	1
l_i	3	15	64	88	165	579	1080	25335	67439	130310
h_i	9	21	28	176	−99	513	14730	51945	−9841	72712
k_i	6	85	29	341	480	59	8013	119384	120469	171709
a_i	3	13	16	77	93	170	4683	23585	28268	51853
b_i	1	4	5	24	29	53	1460	7353	8813	16166

$\sqrt[3]{32}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	5	1	2	1	1	2	1	1	2
l_i	3	16	64	90	164	337	583	1018	2068	3744
h_i	9	32	16	84	−10	183	463	−28	1078	3264
k_i	5	96	53	248	327	383	1481	2040	2411	8096
a_i	3	16	19	54	73	127	327	454	781	2016
b_i	1	5	6	17	23	40	103	143	246	635

$\sqrt[3]{35}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	1	2	4	1	1	1	1	2
l_i	3	15	40	76	192	503	805	1190	2577	3959
h_i	9	15	10	92	324	−13	315	70	1317	2707
k_i	8	55	43	71	827	792	1505	2647	2638	12809
a_i	3	10	13	36	157	193	350	543	893	2329
b_i	1	3	4	11	48	59	107	166	273	712

$\sqrt[3]{34}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	4	5	1	3	3	1	1	4	2
l_i	3	19	68	306	471	1578	2786	7113	13369	48035
h_i	9	37	136	102	801	1860	−652	4979	26447	29807
k_i	7	21	442	191	793	4646	6461	4587	37241	104237
a_i	3	13	68	81	311	1014	1325	2339	10681	23701
b_i	1	4	21	25	96	313	409	722	3297	7316

Digitized by Google

$\sqrt[3]{37}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	99	1	1	1	2	1	1	1
l_i	3	21	66	3001	4001	9316	13994	31915	33137	125736
h_i	9	33	3246	−311	1311	4004	10664	7257	−6035	98634
k_i	10	1	6247	3690	10627	8999	42579	40394	119701	1999
a_i	3	10	993	1003	1996	2999	7994	10993	18987	29980
b_i	1	3	298	301	599	900	2399	3299	5698	8997

$\sqrt[3]{36}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	3	3	4	1	7	1	83	1	36
l_i	3	18	60	162	808	961	8886	10008	820055	862123
h_i	9	24	90	228	418	2993	4932	412422	397625	15901873
k_i	9	28	63	1036	197	11879	180	1232477	34993	3131009
a_i	3	10	33	142	175	1367	1542	129353	130895	4841573
b_i	1	3	10	43	53	414	467	39175	39642	1466287

$\sqrt[3]{39}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	1	1	3	1	19	1	1	3
l_i	3	15	22	55	79	390	507	3821	8816	18419
h_i	9	9	−2	35	77	234	4797	−1483	6478	27007
k_i	12	31	53	38	467	39	8618	7333	8299	37510
a_i	3	7	10	17	61	78	1543	1621	3164	11113
b_i	1	2	3	5	18	23	455	478	933	3277

$\sqrt[3]{38}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	1	3	4	1	2	2	1	2
l_i	3	13	34	62	196	656	1084	2384	5943	8827
h_i	9	5	16	104	306	154	1204	1276	2283	7145
k_i	11	39	26	75	962	619	1794	7219	5555	25833
a_i	3	7	10	37	158	195	548	1291	1839	4969
b_i	1	2	3	11	47	58	163	384	547	1478

$\sqrt[3]{41}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	4	3	19	1	36	2	3	3
l_i	3	19	43	209	640	12809	13763	415587	939115	2379106
h_i	9	17	85	329	5700	6469	249775	317861	1448175	2453678
k_i	14	15	98	51	18509	562	332681	418992	1342427	11726223
a_i	3	7	31	100	1931	2031	75047	152125	531422	1746391
b_i	1	2	9	29	560	589	21764	44117	154115	506462

$\sqrt[3]{40}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	2	1	1	1	1	1	7	1
l_i	3	17	33	64	96	175	210	644	1023	5174
h_i	9	13	23	8	24	55	—20	454	3339	812
k_i	13	23	87	104	199	265	624	211	8513	4784
a_i	3	7	17	24	41	65	106	171	1303	1474
b_i	1	2	5	7	12	19	31	50	381	431

Digitized by Google

$\sqrt[3]{43}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	73	14	110	2	1	18	5
l_i	3	7	26	49	3605	50335	2889677	10588920	16492876	294457789
h_i	9	−5	24	1799	25235	2757395	214229	7485014	151552596	698033089
k_i	16	21	1	386	687	2823536	10803149	1332105	89202077	464910320
a_i	3	4	7	515	7217	794385	1595987	2390372	44622683	225503787
b_i	1	1	2	147	2060	226747	455554	682301	12736972	64367161

$\sqrt[3]{42}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	2	9	1	12	1	14	1	1	1
l_i	3	21	42	414	456	5964	6608	53934	57171	205354
h_i	9	21	168	204	2610	2898	45976	1350	1887	146296
k_i	15	7	582	55	8574	679	99910	58521	207241	28454
a_i	3	7	66	73	942	1015	15152	16167	31319	47486
b_i	1	2	19	21	271	292	4359	4651	9010	13661

$\sqrt[3]{45}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	3	1	8	2	4	1	1
l_i	3	9	22	35	155	211	1719	3483	8729	16112
h_i	9	−3	16	35	85	853	1521	6129	−883	8266
k_i	18	19	17	190	37	1286	1251	14858	15229	23167
a_i	3	4	7	25	32	281	594	2657	3251	5908
b_i	1	1	2	7	9	79	167	747	914	1661

$\sqrt[3]{44}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	7	1	2	1	4	3	12
l_i	3	8	24	43	240	284	953	1487	7520	23276
h_i	9	− 4	20	137	60	208	461	3151	11620	132352
k_i	17	20	9	377	172	1161	487	3557	2908	269093
a_i	3	4	7	53	60	173	233	1105	3548	43681
b_i	1	1	2	15	17	49	66	313	1005	12373

$\sqrt[3]{47}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	1	3	1	13	1	2
l_i	3	11	18	25	63	90	431	555	4852	7058
h_i	9	−1	8	−1	39	90	251	3521	776	7712
k_i	20	17	33	62	43	521	62	8373	3917	15461
a_i	3	4	7	11	18	65	83	1144	1227	3598
b_i	1	1	2	3	5	18	23	317	340	997

$\sqrt[3]{46}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	2	1	1	23	1	2	1
l_i	3	10	20	38	50	173	294	4558	4922	19872
h_i	9	−2	12	32	−20	143	3300	964	3358	11592
k_i	19	18	25	82	153	19	7858	2943	23230	4553
a_i	3	4	7	18	25	43	1014	1057	3128	4185
b_i	1	1	2	5	7	12	283	295	873	1168

$\sqrt[3]{49}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	14	2	2	1	34	2
l_i	3	13	14	49	77	931	1409	5868	8356	179234
h_i	9	1	0	35	539	707	473	3986	142712	64688
k_i	22	15	49	8	735	1058	6341	363	160973	475259
a_i	3	4	7	11	161	333	827	1160	40267	81694
b_i	1	1	2	3	44	91	226	317	11004	22325

$\sqrt[3]{48}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	1	1	2	1	3	6	254	2
l_i	3	12	16	37	53	152	272	1082	6772	1307160
h_i	9	0	4	17	35	64	472	3388	858454	890640
k_i	21	16	41	35	187	112	259	40	1082807	1679664
a_i	3	4	7	11	29	40	149	934	237385	475704
b_i	1	1	2	3	8	11	41	257	65319	130895

$\sqrt[3]{51}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	2	3	17	1	2	2	5
l_i	3	15	23	67	188	621	6663	9623	31975	65010
h_i	9	3	25	61	314	5031	1011	10561	33205	127050
k_i	24	13	46	83	55	11694	5317	21268	19643	535893
a_i	3	4	11	26	89	1539	1628	4795	11218	60885
b_i	1	1	3	7	24	415	439	1293	3025	16418

$\sqrt[3]{50}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	6	15	3	5	1	2	1
l_i	3	14	26	80	500	7187	19584	83896	99644	352122
h_i	9	2	34	250	3670	10051	40478	23834	67724	184754
k_i	23	14	19	50	3619	5927	124374	61739	419846	143997
a_i	3	4	11	70	1061	3253	17326	20579	58484	79063
b_i	1	1	3	19	288	883	4703	5586	15875	21461

Digitized by Google

$\sqrt[3]{53}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	3	9	1	2	3	1	6	1
l_i	3	17	28	101	597	1015	2321	9454	13008	33799
h_i	9	5	52	413	83	1267	2147	4986	38678	—17887
k_i	26	11	17	1010	549	1196	11601	2999	72477	85580
a_i	3	4	15	139	154	447	1495	1942	13147	15089
b_i	1	1	4	37	41	119	398	517	3500	4017

$\sqrt[3]{52}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	2	1	2	1	4	1	2	19
l_i	3	16	20	57	73	244	340	1127	2331	6698
h_i	9	4	16	21	47	124	620	167	3201	64112
k_i	25	12	73	47	291	116	1747	1249	521	27260
a_i	3	4	11	15	41	56	265	321	907	17554
b_i	1	1	3	4	11	15	71	86	243	4703

Digitized by Google

$\sqrt[3]{55}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	4	13	2	1	6	1	8	1
l_i	3	19	29	139	1061	3433	4827	33925	39245	309633
h_i	9	7	69	881	221	2151	12623	16475	148235	122153
k_i	28	9	16	971	3654	1163	46548	6965	457868	111537
a_i	3	4	19	251	521	772	5153	5925	52553	58478
b_i	1	1	5	66	137	203	1355	1558	13819	15377

$\sqrt[3]{54}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	3	1	1	5	1	1	1	27
l_i	3	18	24	45	124	216	783	818	3008	4595
h_i	9	6	36	−15	94	486	81	−46	2236	60685
k_i	27	10	81	109	62	1269	899	2962	253	156943
a_i	3	4	15	19	34	189	223	412	635	17557
b_i	1	1	4	5	9	50	59	109	168	4645

$\sqrt[3]{57}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	5	1	1	1	1	55	1	3
l_i	3	21	26	81	141	160	583	957	37416	42243
h_i	9	9	64	−9	69	−50	473	26037	10422	58047
k_i	30	7	145	132	229	533	26	63453	17555	207606
a_i	3	4	23	27	50	77	127	7062	7189	28629
b_i	1	1	6	7	13	20	33	1835	1868	7439

$\sqrt[3]{56}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	4	1	2	1	7	1	2	9
l_i	3	20	24	97	113	432	592	2895	5579	15260
h_i	9	8	44	29	71	248	1976	327	7609	63280
k_i	29	8	141	71	503	120	4871	2953	2541	150184
a_i	3	4	19	23	65	88	681	769	2219	20740
b_i	1	1	5	6	17	23	178	201	580	5421

Digitized by Google

$\sqrt[3]{59}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	8	2	1	8	2	11	1	6
l_i	3	23	29	151	512	782	6942	13951	143701	189437
h_i	9	11	121	31	330	3104	6894	70685	59065	638531
k_i	32	5	136	543	139	5023	1895	214386	41417	233952
a_i	3	4	35	74	109	946	2001	22957	24958	172705
b_i	1	1	9	19	28	243	514	5897	6411	44363

$\sqrt[3]{58}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	6	1	2	1	10	1	2	7
l_i	3	22	26	137	153	622	846	5479	10219	27096
h_i	9	10	74	37	95	374	4098	535	13889	82230
k_i	31	6	211	95	717	122	9577	5377	5855	253394
a_i	3	4	27	31	89	120	1289	1409	4107	30158
b_i	1	1	7	8	23	31	333	364	1061	7791

Digitized by Google

$\sqrt[3]{61}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	14	1	2	1	22	1	2	6
l_i	3	25	29	297	313	1387	1867	23975	42699	134667
h_i	9	13	199	69	191	883	20261	1847	57729	418929
k_i	34	3	496	191	1578	125	44236	22273	32066	99331
a_i	3	4	59	63	185	248	5641	5889	17419	110403
b_i	1	1	15	16	47	63	1433	1496	4425	28046

$\sqrt[3]{60}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	10	1	2	1	16	1	2	6
l_i	3	24	28	217	233	1004	1356	13095	23675	66149
h_i	9	12	136	53	143	628	10644	1095	32065	180829
k_i	33	4	353	143	1147	124	23739	12385	16369	365851
a_i	3	4	43	47	137	184	3081	3265	9611	60931
b_i	1	1	11	12	35	47	787	834	2455	15564

Digitized by Google

$\sqrt[3]{63}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	46	1	2	1	70	1	2	5
l_i	3	27	31	937	953	4457	5961	228519	395339	1188691
h_i	9	15	709	197	575	2929	207783	14775	532609	2885071
k_i	36	1	1646	575	5032	127	436302	205057	344260	3048317
a_i	3	4	187	191	569	760	53769	54529	162827	868664
b_i	1	1	47	48	143	191	13513	13704	40921	218309

$\sqrt[3]{62}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	3	1	22	1	2	1	34	1	2	5
l_i	3	26	30	457	473	2154	2890	55527	97451	263534
h_i	9	14	326	101	287	1394	48710	3927	131521	562614
k_i	35	2	783	287	2441	126	104237	50689	79011	1500154
a_i	3	4	91	95	281	376	13065	13441	39947	213176
b_i	1	1	23	24	71	95	3301	3396	10093	53861

XXXVIII.

Betrachtung der Coefficienten in der Entwickelung des Products

$$\prod_{i=0}^{i=n-1}(1+ix)$$

nach steigenden Potenzen von x.

Von

Herrn L. Schläfli,

Privatdocenten der Mathematik zu Bern.

Wenn wir dieses aus n Factoren zusammengesetzte Product der Kürze wegen mit $P^{(n)}$ bezeichnen, so haben wir

$$P^{(n+1)}=(1+nx).P^{(n)}.$$

Setzen wir nun fest, dass $P^{(0)}=1$ und n eine ganze (positive oder negative) Zahl sein müsse, so ist die Natur dieses Products hinreichend bestimmt. Aus dieser Definition folgt nun

$$P^{(-1)}=\frac{1}{1-x}\,,\; P^{(-2)}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)}\,,\text{ etc.}.$$

überhaupt

$$P^{(-n)}=\frac{1}{(1-x)(1-2x)\dots(1-nx)}. \qquad (1)$$

Die Entwickelung des Products $P^{(n)}$ besteht aus einer endlichen Zahl von Gliedern, wenn n positiv ist, verwandelt sich aber in eine unendliche Reihe, sobald n negativ wird. In diesem Falle muss x absolut kleiner als $\frac{1}{n}$ angenommen werden, damit die

Digitized by Google

Reihe convergire. Denkt man sich nämlich in (1) die Brüche $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-2x}, \ldots \frac{1}{1-nx}$ nach den steigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt und diese Reihen in einander multiplicirt, so werden im Producte sämmtliche Coefficienten, wie man aus ihrer Formation ersieht, kleiner werden, als wenn man die Reihe für $\frac{1}{1-nx}$ zur $n$ten Potenz erhoben hätte. Da nun die Convergenz der Entwickelung von $(1-nx)^{-n}$ für $nx<1$ als bewiesen anerkannt ist, so ist um so mehr auch jene Reihe für $P^{(-n)}$ convergent, sobald nx numerisch kleiner als 1 ist.

Wenn wir jetzt den Coefficienten von x^i in der Entwickelung von $P^{(n)}$ mit $\overset{n}{C}_i$ bezeichnen, so dass

$$P^{(n)}=\prod_{i=0}^{i=n-1}(1+ix)=\sum_i \overset{n}{C}_i x^i \tag{2}$$

ist, so können wir bemerken, dass für ein positives n $\overset{n}{C}_i$ verschwindet, sobald $i>n-1$ wird, und dass für $n=0$ nur der Coefficient $\overset{0}{C}_0=1$ übrig bleibt; ferner ist immer, welche ganze Zahl auch n sein mag, $\overset{n}{C}_0=1$. Wird nun die Gleichung (2) mit $1+nx$ multiplicirt, so erhält man

$$P^{(n+1)}=\sum_i \overset{n+1}{C}_i x^i=(1+nx)\sum_i \overset{n}{C}_i x^i,$$

woraus sich durch Vergleichung der entsprechenden Coefficienten folgende Relationen ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{n+1}{C}_1 &= \overset{n}{C}_1+n,\\
\overset{n+1}{C}_2 &= \overset{n}{C}_2+n\overset{n}{C}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\overset{n+1}{C}_i &= \overset{n}{C}_i+n\overset{n}{C}_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Durch Summation arithmetischer Reihen gelangt man nun vermittelst dieser Relationen nach und nach zu folgenden allgemeinen Ausdrücken, in denen der Kürze wegen $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}=\binom{n}{m}$ gesetzt ist:

$$\overset{n}{C}_1=\binom{n}{2},$$

Digitized by Google

$$\overset{n}{C}_2 = -\binom{n}{3} + 3\binom{n+1}{4} = \binom{n}{3}\frac{3n-1}{4},$$

$$\overset{n}{C}_3 = \binom{n}{4} - 10\binom{n+1}{5} + 15\binom{n+2}{6} = \binom{n}{4}\frac{n^2-n}{2},$$

$$\overset{n}{C}_4 = -\binom{n}{5} + 25\binom{n+1}{6} - 105\binom{n+2}{7} + 105\binom{n+3}{8}$$

$$= \binom{n}{5}\frac{15n^3-30n^2+5n+2}{48},$$

u. s. f.

Es bietet sich also für die fraglichen Coefficienten die Form

$$\overset{n}{C}_i = \binom{n}{i+1}(-1)^{i+1} + \overset{i}{B}_1\binom{n+1}{i+2}(-1)^{i+2}\ldots$$

$$\ldots + \overset{i}{B}_\mu\binom{n+\mu}{i+\mu+1}(-1)^{i+\mu+1}\ldots + \overset{i}{B}_{i-1}\binom{n+i-1}{2i} \quad (4)$$

dar, wo die Grössen $\overset{i}{B}_1$, $\overset{i}{B}_2$, etc. vermöge der Formeln (3) durch folgende Relationen bestimmt sind:

$$\left.\begin{aligned}
\overset{i+1}{B}_1 &= 2\overset{i}{B}_1 + i + 2,\\
\overset{i+1}{B}_2 &= 3\overset{i}{B}_2 + (i+3)\overset{i}{B}_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\overset{i+1}{B}_\mu &= (\mu+1)\overset{i}{B}_\mu + (i+\mu+1)\overset{i}{B}_{\mu-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{i+1}{B}_i &= \qquad (2i+1)\overset{i}{B}_{i-1}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Wenn man nämlich in der Formel $\overset{n+1}{C}_{i+1} = \overset{n}{C}_{i+1} + n\overset{n}{C}_i$ die Reihen (4) substituirt, so ist zu beachten, dass

$$\binom{n+\mu+1}{i+\mu+2} - \binom{n+\mu}{i+\mu+2} = \binom{n+\mu}{i+\mu+1}.$$

und

$$n\binom{n+\mu}{i+\mu+1} = (i+\mu+2)\binom{n+\mu+1}{i+\mu+2} - (\mu+1)\binom{n+\mu}{i+\mu+1}.$$

Aus den Relationen (5) erhält man nach und nach:

$$\overset{i}{B}_1 = 2^{i+1} - (i+3),$$

$$\overset{i}{B}_2 = \frac{1}{1.2}\{3^{i+2} - \binom{2}{1}.(i+5).2^{i+1} + (i+4)(i+3)+1\},$$

Digitized by Google

$$\overset{i}{B}_3 = \frac{1}{1.2.3} \{ 4^{i+3} - \binom{3}{1}(i+7).3^{i+2} + \binom{3}{2}[(i+6)(i+5)+2]\,2^{i+1}$$
$$- [(i+5)(i+4)(i+3)+3(i+4)+1] \},$$

$$\overset{i}{B}_4 = \frac{1}{1.2.3.4} \{ 5^{i+4} - \binom{4}{1}(i+9).4^{i+3} + \binom{4}{2}[(i+8)(i+7)+3]\,3^{i+2}$$
$$- \binom{4}{3}[(i+7)(i+6)(i+5)+6(i+6)+2]\,2^{i+1}$$
$$+ [(i+6)(i+5)(i+4)(i+3)+6(i+5)(i+4)+4(i+4)+5] \},$$

u. s. f.

In diesen Formeln wurde der Coefficient des ersten Gliedes nach Berechnung aller übrigen Coefficienten aus der Bedingung $\overset{i}{B}_i = 0$ hergeleitet, wobei es bemerkenswerth ist, dass in allen vier speciellen Fällen derselbe innerhalb der Klammern $= 1$ sich ergab. Man kann sie überdiess noch an der Gleichung $\overset{i+1}{B^i} = 3.5.7...(2i+1)$ prüfen. Um, wenn es möglich ist, über das Bildungsgesetz der Grössen $\overset{i}{B}_1$, $\overset{i}{B}_2$, etc. etwas Allgemeines zu erfahren, wollen wir

$$\overset{i}{B}_\alpha = \frac{1}{1.2...\alpha} \Big\{ \binom{\alpha}{0} \overset{\alpha}{A}_0 (\alpha+1)^{i+\alpha} ...$$
$$... + (-1)^\mu \binom{\alpha}{\mu} \overset{\alpha}{A}_\mu (\alpha+\mu+1)^{i+\alpha-\mu} ... + (-1)^\alpha \binom{\alpha}{\alpha} \overset{\alpha}{A}_\alpha . 1^i \Big\} \quad (6)$$

setzen und den Zuwachs, den $\overset{\alpha}{A}_\mu$ erhält, wenn darin i in $i+1$ übergeht, durch $\Delta . \overset{\alpha}{A}_\mu$ bezeichnen. Substituirt man diesen Ausdruck für $\overset{i}{B}_\alpha$ und die analogen für $\overset{i+1}{B}_\alpha$ und $\overset{i}{B}_{\alpha-1}$ in der aus (5) gezogenen Gleichung:

$$\overset{i+1}{B}_\alpha = (\alpha+1)\overset{i}{B}_\alpha + (i+\alpha+1)\overset{i}{B}_{\alpha-1}$$

und ordnet nach den Grundzahlen derjenigen Potenzen, in deren Exponenten i vorkömmt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}
-(\alpha+1)\,\Delta . \overset{\alpha}{A}_0 = 0, \\
\overset{\alpha}{A}_1 - \alpha\,\Delta . \overset{\alpha}{A}_1 = (i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_0, \\
2\overset{\alpha}{A}_2 - (\alpha-1)\,\Delta . \overset{\alpha}{A}_2 = 2(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu\overset{\alpha}{A}_\mu - (\alpha-\mu+1)\,\Delta . \overset{\alpha}{A}_\mu = \mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha\overset{\alpha}{A}_\alpha - \Delta . \overset{\alpha}{A}_\alpha = \alpha(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\alpha-1};
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Digitized by Google

aus denen nach und nach geschlossen wurde:

$$\overset{\alpha}{A}_0=1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_1=i+2\alpha+1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_2=(i+2\alpha)(i+2\alpha-1)+\alpha-1,$$

$$\overset{\alpha}{A}_3=(i+2\alpha-1)(i+2\alpha-2)(i+2\alpha-3)+(\alpha-2)[3(i+2\alpha-2)+1],$$

$$\overset{\alpha}{A}_4=(i+2\alpha-2)(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)$$
$$+(\alpha-3)[6(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)+4(i+2\alpha-4)+3\alpha-7],$$

$$\overset{\alpha}{A}_5=(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)(i+2\alpha-7)$$
$$+(\alpha-4)[10(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)+10(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)$$
$$+5(3\alpha-10)(i+2\alpha-6)+25\alpha-94],$$

u. s. f.

Es erhellet sogleich, nach welchem Gesetz die ersten Glieder dieser Ausdrücke gebildet sind. In Betreff derjenigen Aggregate, die der Reihe nach mit $\alpha-1$, $\alpha-2$, $\alpha-3$, $\alpha-4$ multiplicirt sind, ist zu bemerken, dass die Coefficienten der ersten Glieder, nämlich 1, 3, 6, 10, eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden und daher durch $\binom{2}{2}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{5}{2}$ dargestellt werden können. Die Coefficienten der zweiten Glieder 1, 4, 10 bilden eine arithmetische Reihe dritter Ordnung und sind daher $\binom{3}{3}$, $\binom{4}{3}$, $\binom{5}{3}$ zu schreiben. Schwieriger wird die Betrachtung der Coefficienten der dritten Glieder, welche nun schon α enthalten; diese lassen sich so darstellen:

$$\binom{4}{4}[3(\alpha-4)+5],\quad \binom{5}{4}[3(\alpha-5)+5],$$

so dass $\binom{\mu}{\mu}[3(\alpha-\mu)+5]$ ihr allgemeiner Ausdruck ist.

Durch diese Induction werden wir darauf geführt, folgende Formel zu versuchen:

$$\overset{\alpha}{A}_\mu=1.2\ldots\mu\left\{\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu}\ldots\right.$$
$$\left.+(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-2}\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}\frac{K_\varepsilon}{1.2..(\varepsilon+2)}\right\},\quad (8)$$

wo der zu bestimmende Coefficient K_ε eine Function von $\alpha-\mu$ bezeichnet, die sich nicht verändert, wenn α und μ zugleich in $\alpha-1$ und $\mu-1$ übergehen. Um nun die betreffende Formel aus

Digitized by Google

(7) hierauf anwenden zu können, muss man dieselbe nach dem unter dem Zeichen Σ in (8) enthaltenen binomischen Coefficienten ordnen, welche sämmtlich im Zähler ihres Ausdrucks $i+2\alpha-2\mu+4$ als letzten Factor haben. Thut man dieses, so ist man berechtigt, in der reducirten Formel (7) jeden besondern Factor eines die Zahl i implicirenden binomischen Coefficienten gleich Null zu setzen, woraus die zur Bestimmung von K_0, K_1, K_2,... nöthigen Bedingungen sich ergeben werden. — Man erhält nun zunächst, indem man (8) nach i differenziirt,

$$\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu=1.2..\mu\Big\{\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-3}\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-3}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Da aber die unter dem Summenzeichen enthaltenen binomischen Coefficienten als letzten Factor ihres Zählers $i+2\alpha-2\mu+5$ haben, so müssen sie in Summen solcher verwandelt werden, wie sie in (8) vorkommen. Nun ist

$$\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-3}=\sum_{\theta=\varepsilon+1}^{\theta=\mu-2}\binom{i-2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}.$$

Da nun für ein bestimmtes θ die andere laufende Zahl ε von 0 bis $\theta-1$ geht, so ist jetzt

$$\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu=1.2...\mu\Big\{\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\theta=1}^{\theta=\mu-2}\binom{i+2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\theta-1}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Ferner bekömmt man aus (8)

$$(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}=1.2...(\mu-1).\Big\{(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-1}$$
$$+(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-3}(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3}\frac{K_\varepsilon}{1.2...(\varepsilon+2)}\Big\}.$$

Hier ist nun

$$(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-1}=\mu\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu}$$
$$-(\alpha-\mu+1)\left[\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}-\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}\right],$$

$$(i+\alpha+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3}=(\mu-\varepsilon-2)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}$$
$$-(\alpha-\mu-\varepsilon)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon}{\mu-\varepsilon-3};$$

Digitized by Google

also ist

$$\mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}=1.2\ldots\mu\Big\{\mu\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu}$$

$$-(\alpha-\mu+1)\Big[\binom{i+2\alpha-\mu+2}{\mu-1}-\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}$$

$$-\sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\mu-}(\mu-\varepsilon-2)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}\frac{K_\varepsilon}{1.2\ldots(\varepsilon+2)}$$

$$+\sum_{\varepsilon=1}^{\varepsilon=\mu-2}(\alpha-\mu-\varepsilon+1)\binom{i+2\alpha-\mu-\varepsilon+1}{\mu-\varepsilon-2}\frac{K_{\varepsilon-1}}{1.2\ldots(\varepsilon+1)}\Big]\Big\}.$$

Nach diesen Vorbereitungen giebt die Substitution der Ausdrücke für $\overset{\alpha}{A}_\mu, \Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu, \overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}$ in der Formel (7) folgende Gleichung:

$$\mu\overset{\alpha}{A}_\mu-(\alpha-\mu+1)\Delta.\overset{\alpha}{A}_\mu-\mu(i+\alpha+1)\overset{\alpha-1}{A}_{\mu-1}$$

$$=1.2\ldots\mu.(\alpha-\mu+1)\Big\{\binom{i+2\alpha-\mu+1}{\mu-2}[K_0-1]$$

$$+\sum_{\theta=1}^{\theta=\mu-2}\binom{i+2\alpha-\mu-\theta+1}{\mu-\theta-2}.\Big[\frac{K_\theta}{1.2\ldots(\theta+1)}-\theta\frac{K_{\theta-1}}{1.2\ldots(\theta+1)}$$

$$-(\alpha-\mu+1)\sum_{\varepsilon=\theta}^{\varepsilon=\theta-2}\frac{K_\varepsilon}{1.2\ldots(\varepsilon+2)}\Big]\Big\}=0. \qquad (9)$$

Setzt man hier die Factoren der einzelnen binomischen Coefficienten der Null gleich, so ergeben sich folgende Gleichungen, in denen der Kürze wegen $\alpha-\mu+1=\beta$ gesetzt ist:

$$\left.\begin{aligned}
&K_0=1,\\
&K_1=1.K_0,\\
&K_2=2K_1+\beta.3K_0,\\
&K_3=3K_2+\beta(4K_1+4.3K_0),\\
&K_4=4K_3+\beta(5K_2+5.4K_1+5.4.3K_0),\\
&K_5=5K_4+\beta(6K_3+6.5K_2+6.5.4K_1+6.5.4.3K_0),
\end{aligned}\right\}\quad(9^{bis})$$

u. s. f.

Führt man die Rechnung wirklich aus, so findet man

$$\begin{aligned}
&K_0=1,\\
&K_1=1,\\
&K_2=3\beta+2,\\
&K_3=25\beta+6,\\
&K_4=15\beta^2+190\beta+24,\\
&K_5=315\beta^2+1526\beta+120,
\end{aligned}$$

u. s. f.

Digitized by Google

Wenn $H_n = \frac{K_n}{1.2.3\ldots n}$ gesetzt wird, so hat man zur Bestimmung der Grössen H in Function von β folgende Recursionsformel:

$$\left.\begin{aligned} &H_0 = 1,\; H_1 = 1,\\ &H_{n+1} = H_n + (n+2)\beta\left(\frac{H_0}{1.2} + \frac{H_1}{2.3}\ldots + \frac{H_i}{(i+1)(i+2)}\ldots + \frac{H_{n-1}}{n(n+1)}\right)\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Entwickelung von H_n nach den steigenden Potenzen von β sei:

$$H_n = \overset{n}{b}_0 + \overset{n}{b}_1\beta + \overset{n}{b}_2\beta^2 \ldots + \overset{n}{b}_\mu\beta^\mu + \ldots. \qquad (11)$$

Aus der Recursionsformel (10) folgt sogleich

$$\overset{n}{b}_0 = 1, \qquad (12)$$

und wenn wir abkürzend

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \Delta\varphi(n) \text{ und } \varphi(1) + \varphi(2) \ldots + \varphi(n) = \int\varphi(n)$$

setzen, wo dann $\int\varphi(0) = 0$ zu nehmen ist, so folgt aus (10) für $\mu > 0$ die Differenzengleichung:

$$\Delta\,\frac{\Delta\overset{n}{b}_\mu}{n+2} = \frac{\overset{n}{b}_{\mu-1}}{(n+1)(n+2)}, \qquad (13)$$

in welcher $\overset{0}{b}_\mu = 0$, $\Delta\overset{0}{b}_\mu = 0$ zu nehmen ist, deren Integral somit durch die Gleichung

$$\overset{n}{b}_\mu = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\int\frac{\overset{n-1}{b}_{\mu-1}}{n(n+1)} - \int\frac{n+2}{2n}\overset{n-1}{b}_{\mu-1} \qquad (14)$$

dargestellt ist. Vollzieht man die Integration für $\mu = 1$, so erhält man

$$\overset{n}{b}_1 = \frac{n(n+1)}{2} - \int\frac{1}{n}. \qquad (15)$$

Für $\mu = 2$, $\mu = 3$ liefert die Integration ebenfalls:

$$\overset{n}{b}_2 = \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2}\int\frac{1}{n} + \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1},$$

$$\begin{aligned}\overset{n}{b}_3 = \left\{\tfrac{1}{2}\binom{n+3}{4} + \tfrac{1}{2}\binom{n+2}{3}\right\} - \binom{n+2}{3}\int\frac{1}{n}\\ + \binom{n+1}{2}\int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1} - \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{n-2}.\end{aligned}$$

Setzen wir nun der Abkürzung wegen

Digitized by Google

$$\int\frac{1}{n}=\overset{n}{S}_1,\ \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1}=\overset{n}{S}_2,\ \int\frac{1}{n}\int\frac{1}{n-1}\int\frac{1}{n-2}=\overset{n}{S}_3,\ \text{u.s.f}$$

so dass

$$\left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{n}\right)$$
$$=1+\overset{n}{S}_1 z+\overset{n}{S}_2 z^2+\overset{n}{S}_3 z^3\ldots+\overset{n}{S}_n z^n$$

wird, und

$$\overset{n}{a}_0=1,\ \overset{n}{a}_1=\binom{n+1}{2},\overset{n}{a}_2=\binom{n+2}{3},\ \overset{n}{a}_3=\tfrac{1}{2}\binom{n+3}{4}+\tfrac{1}{2}\binom{n+2}{3}.$$

so haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\overset{n}{b}_0&=\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_0,\\
\overset{n}{b}_1&=\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_1,\\
\overset{n}{b}_2&=\overset{n}{a}_2\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_1+\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_2,\\
\overset{n}{b}_3&=\overset{n}{a}_3\overset{n}{S}_0-\overset{n}{a}_2\overset{n}{S}_1+\overset{n}{a}_1\overset{n}{S}_2-\overset{n}{a}_0\overset{n}{S}_3;
\end{aligned}$$

wesshalb die Vermuthung entsteht, es möchte überhaupt

$$\overset{n}{b}_\mu=\sum_{i=0}^{i=\mu}(-1)^{\mu-i}\overset{n}{a}_i\overset{n}{S}_{\mu-i}, \tag{16}$$

wo $\overset{n}{a}_i$ eine ganze Function $(i+1)$ten Grades von n bezeichnet, die für $i>1$ durch $n(n+1)(n+2)$ theilbar ist, die allgemeine Form der Grössen $\overset{n}{b}_\mu$ sein. Um die Richtigkeit dieser Vermuthung zu prüfen, müssen wir nachsehen, ob die Gleichung (13), wenn bis zu einem gewissen Werthe von μ die Gleichung (16) verificirt worden ist, für den unmittelbar folgenden Werth von μ wiederum einen Ausdruck von der Form (16) als Aequivalent der Grösse $\overset{n}{b}_\mu$ gebe. Zu diesem Zwecke substituiren wir die Formel (16) in der Differenzengleichung (13) und ordnen das Ganze nach den transcendenten Functionen $\overset{n}{S}_{\mu-i}$. Da nun $\Delta\overset{n}{S}_{\mu-i}=\frac{1}{n+1}\overset{n}{S}_{\mu-i-1}$, und daher

$$\Delta.\overset{n}{a}_i\overset{n}{S}_{\mu-i}=\frac{\overset{n+1}{a_i}}{n+1}\overset{n}{S}_{\mu-i-1}+\Delta\overset{n}{a}_i.\overset{n}{S}_{\mu-i}$$

ist, so wird

$$\Delta \overset{n}{b}_\mu = \Sigma(-1)^{\mu-i}\left(\Delta \overset{n}{a}_i - \frac{\overset{n+1}{a}_{i-1}}{n+1}\right) \overset{n}{S}_{\mu-i},$$

und die Gleichung (13) erhält die Gestalt:

$$\Sigma(-1)^{\mu-i}\left\{\Delta \frac{\Delta \overset{n}{a}_i - \frac{1}{n+1}\overset{n+1}{a}_{i-1}}{n+2} - \frac{1}{n+1}\cdot\frac{\Delta \overset{n+1}{a}_{i-1} - \frac{1}{n+2}\overset{n+2}{a}_{i-2}}{n+3}\right\}\overset{n}{S}_{\mu-i}$$
$$= \Sigma(-1)^{\mu-i}\frac{\overset{n}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)}\overset{n}{S}_{\mu-i}.$$

Da hier die entsprechenden Coefficienten der Functionen S gleich sein müssen, so folgt:

$$\Delta\frac{\Delta\overset{n}{a}_i}{n+2} = \Delta\frac{\overset{n+1}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{\Delta\overset{n+1}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+3)} + \frac{\overset{n}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)}$$
$$- \frac{\overset{n+2}{a}_{i-2}}{(n+1)(n+2)(n+3)}. \quad (17)$$

Ueber die Anfangswerthe der Functionen $\overset{n}{a}_i$ und $\Delta\overset{n}{a}_i$ ist Folgendes zu bemerken. Da $\overset{0}{S}_\mu = 1$ oder 0 wird, jenachdem $\mu=0$ oder >0 ist, und da $\overset{1}{S}_\mu = 1$ oder 0 wird, jenachdem $\mu=0$, 1 oder >1 ist, so ist auch überhaupt $\overset{0}{b}_\mu = \overset{0}{a}_\mu$ und für $\mu>0$ insbesondere $\overset{1}{b}_\mu = \overset{1}{a}_\mu - \overset{1}{a}_{\mu-1}$. Für $\mu>0$ ist aber $\overset{0}{b}_\mu = \overset{1}{b}_\mu = 0$, dagegen ist $\overset{0}{b}_0 = 1$; folglich ist auch $\overset{0}{a}_0 = 1$ und, wenn $\mu>0$ ist, $\overset{0}{a}_\mu = 0$, $\overset{1}{a}_\mu = \overset{1}{a}_{\mu-1} = \overset{1}{a}_0 = 1$; also ist für jedes ganze und positive (von Null verschiedene) μ

$$\overset{0}{a}_\mu = 0,\ \Delta\overset{0}{a}_\mu = 1.$$

Wenn also in der Gleichung (17) $i>0$ ist, so hat die Function $\frac{\Delta\overset{n}{a}_i}{n+2}$ bei $n=0$ den Anfangswerth $\frac{1}{2}$, denselben, den auch die Function $\frac{\overset{n+1}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)}$ hat. Man darf daher als erstes Integral der Gleichung (17)

$$\frac{\Delta\overset{n}{a}_i}{n+2} - \frac{\overset{n+1}{a}_{i-1}}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \int\left(\frac{\Delta\overset{n}{a}_{i-1}}{n(n+2)} + \frac{\overset{n-1}{a}_{i-1}}{n(n+1)} - \frac{\overset{n+1}{a}_{i-2}}{n(n+1)(n+2)}\right) = \varphi(n) \quad (18)$$

Digitized by Google

setzen, wo $\varphi(0)=0$ sein soll. Aus dieser Gleichung folgt

$$\Delta \overset{n}{a_i}=\frac{\overset{n+1}{a_{i-1}}}{n+1}+(n+2)\varphi(n);$$

und da $\overset{\text{"}}{a_i}$ verschwindet, so hat man als zweites Integral:

$$\overset{n}{a_i}=\int\left(\frac{\overset{n}{a_{i-1}}}{n}+(n+1)\varphi(n-1)\right). \qquad (19)$$

Nun denke man sich die ganze Function $\overset{n}{a_i}$ in Beziehung auf die in ihr enthaltene Variable n nach binomischen Coefficienten von der Form $\binom{n+m-1}{m}$ entwickelt, und setze daher

$$\overset{n}{a_i}=\sum_{m=3}^{m=i+1}\left[\begin{matrix}i\\m\end{matrix}\right]\binom{n+m-1}{m}, \qquad (20)$$

wo $\left[\begin{matrix}i\\m\end{matrix}\right]$ einen von n unabhängigen Factor bezeichnet. Da in den Gleichungen (18) und (19) die Grössen a_i, a_{i-1}, a_{i-2}, φ in linearer Form enthalten sind, so können wir untersuchen, welche Bestandtheile der Function $\overset{n}{a_i}$ ihre Entstehung irgend einem einzelnen in $\overset{n}{a_{i-1}}$ oder $\overset{n}{a_{i-2}}$ vorkommenden binomischen Coefficienten verdanken, und wenn dieses geschehen ist, durch eine auf alle Glieder von $\overset{n}{a_{i-1}}$ und $\overset{n}{a_{i-2}}$ ausgedehnte Summation den vollständigen Werth von $\overset{n}{a_i}$ berechnen, in welchem dann $\left[\begin{matrix}i\\m\end{matrix}\right]$ als lineare und homogene Function der Factoren $\left[\begin{matrix}i-1\\3\end{matrix}\right]$, $\left[\begin{matrix}i-1\\4\end{matrix}\right]$, ... $\left[\begin{matrix}i-2\\3\end{matrix}\right]$, $\left[\begin{matrix}i-2\\4\end{matrix}\right]$, ... erscheinen wird. Die Berechnung kann unter andern auf folgende Art geführt werden:

Es ist

$$\frac{\Delta\overset{n}{a_{i-1}}}{n(n+2)}+\frac{\overset{n-1}{a_{i-1}}}{n(n+1)}$$

$$=\frac{\overset{n}{a_{i-1}}}{n(n+1)}+\frac{\Delta\overset{n}{a_{i-1}}}{(n+1)(n+2)}-\frac{\Delta\overset{n-1}{a_{i-1}}}{n(n+1)}$$

$$+\frac{\Delta\overset{n-1}{a_{i-1}}+\Delta^2\overset{n-2}{a_{i-1}}+\Delta^3\overset{n-3}{a_{i-1}}+\text{etc.}}{n(n+1)(n+2)}.$$

Wenn daher $\binom{n+m-1}{m}$ einen in $\overset{n}{a_{i-1}}$ vorkommenden binomischen Coefficienten bezeichnet, so entspringen aus demselben in $\Delta\varphi(n-1)$ die Glieder:

Digitized by Google

$$\frac{1}{(m-1)m}\binom{n+m-1}{m-2}+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\binom{n+m-1}{m-3}$$
$$-\frac{1}{(m-2)(m-1)}\binom{n+m-2}{m-3}$$
$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda-3}+\frac{\frac{1}{2}}{n}.$$

Durch Integration ergiebt sich als Bestandtheil von $\varphi(n)$ der Ausdruck

$$\frac{1}{(m-1)m}\binom{n+m}{m-1}+\frac{1}{(m-1)(m-2)}\binom{n+m-1}{m-3}$$
$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda-2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}$$
$$+\frac{1}{2}\overset{n}{S}_1,$$

und hieraus als Bestandtheil von $(n+1)\varphi(n-1)+\frac{\overset{n}{a}_{i-1}}{n}$ das Aggregat

$$\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m-1}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-2}{m-2}$$
$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda-1}{\lambda-1}$$
$$+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)(n+1)+\frac{n+1}{2}\overset{n-1}{S}_1,$$

durch dessen Integration als Bestandtheil von $\overset{n}{a}_i$ sich ergiebt:

$$\frac{1}{m-1}\binom{n+m+1}{m+1}+\frac{1}{m-1}\binom{n+m-1}{m-1}$$
$$+\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m-1}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda}+\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{m-1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)\binom{n+2}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}+\frac{n(n+3)}{4}\overset{n}{S}_1, \qquad (21)$$

wo die binomischen Coefficienten mit Fleiss nicht auf die Form $\binom{n+\lambda-1}{\lambda}$, sondern auf die Form $\binom{n+\lambda}{\lambda}$ gebracht sind.

Auf ähnlichem Wege erhält man für den Bestandtheil von $\overset{n}{a}_i$, der aus dem beliebigen in $\overset{n}{a}_{i-2}$ vorkommenden binomischen Coefficienten $\binom{n+m-1}{m}$ herfliesst, den Ausdruck:

Digitized by Google

$$-\sum_{\lambda=3}^{\lambda=m}\frac{1}{(\lambda-2)\lambda}\binom{n+\lambda}{\lambda}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\binom{n+2}{2}$$
$$+\frac{1}{2}\binom{n+1}{1}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{m}-\frac{n(n+3)}{4}\overset{n}{S}_1. \qquad (22)$$

Die Gleichung (20), wenn darin die Binomialcoefficienten auf die Form $\binom{n+k}{k}$ gebracht werden, verwandelt sich in

$$\overset{n}{a}_i=\left[{i \atop i+1}\right]\binom{n+i+1}{i+1}+\left(\left[{i \atop i}\right]-\left[{i \atop i+1}\right]\right)\binom{n+i}{i}+\dots$$
$$+\left(\left[{i \atop k}\right]-\left[{i \atop k+1}\right]\right)\binom{n+k}{k}+\dots$$
$$\dots+\left(\left[{i \atop 3}\right]-\left[{i \atop 4}\right]\right)\binom{n+3}{3}-\left[{i \atop 3}\right]\binom{n+2}{2}.$$

Vergleicht man die von n unabhängigen Factoren in dieser Gleichung mit denen, welche sich in dem aus den Formeln (21) und (22) hergeleiteten Ausdrucke für $\overset{n}{a}_i$ ergeben, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\left[{i \atop i+1}\right]=\frac{1}{i-1}\left[{i-1 \atop i}\right], \qquad (23)$$

$$\left[{i \atop i}\right]-\left[{i \atop i+1}\right]=\frac{1}{i-2}\left[{i-1 \atop i-1}\right], \qquad (24)$$

$$\left[{i \atop k}\right]-\left[{i \atop k+1}\right]=\frac{1}{k-2}\left[{i-1 \atop k-1}\right]+\frac{1}{k(k-2)}\Big\{(k-1)\left[{i-1 \atop k+1}\right]$$
$$+\left[{i-1 \atop k+2}\right]\dots+\left[{i-1 \atop i}\right]-\left[{i-2 \atop k}\right]-\left[{i-2 \atop k+1}\right]\dots-\left[{i-2 \atop i-1}\right]\Big\}, \quad (25)$$

wofür k der Reihe nach $i-1$, $i-2, \dots 4$, 3 zu setzen ist,

$$-\left[{i \atop 3}\right]=-\sum_{m=3}^{m=i}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-3}\right)\left[{i-1 \atop m}\right]$$
$$+\sum_{m=3}^{m=i-1}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\left[{i-2 \atop m}\right]+\frac{1}{2}\left[{i-1 \atop 3}\right], \qquad (26)$$

$$0=-\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i}\left[{i-1 \atop m}\right]+\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i-1}\left[{i-2 \atop m}\right], \qquad (27)$$

$$0=\sum_{m=3}^{m=i}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m-1}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{m-2}\right)\left[{i-1 \atop m}\right]$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{m=3}^{m=i-1}\int\frac{1}{m}\cdot\left[{i-2 \atop m}\right], \qquad (28)$$

im Ganzen drei Gleichungen mehr als zur Bestimmung der $i-1$

Digitized by Google

Factoren $\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix}$ erfordert werden. Soll daher die Formel (16) sich halten können, so müssen die Gleichungen (26), (27) (28) als nothwendige Folgen der übrigen Gleichungen (23), (24), (25) sich nachweisen lassen. Vorher aber wollen wir die durch die Gleichung (25) festgesetzten Relationen möglichst vereinfachen. Wird nämlich der Kürze wegen [für $k=4, 5, .., i$]

$$(k-2)\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - (k-2)\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \psi(i,k)$$

und im Besondern

$$(i-1)\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix} = \psi(i, i+1), \begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} = \psi(i, 3)$$

gesetzt, so verwandelt sich die Gleichung (25) in

$$\psi(i,k) = \frac{1}{k}\{\psi(i-1, k+1) + \psi(i-1, k+2) \ldots + \psi(i-1, i)\} \quad (25^{bis})$$

und die Gleichungen (23) und (24) in

$$\psi(i, i+1) = 0, \ \psi(i, i) = 0;$$

also verschwinden in obiger Summe sogleich die zwei letzten Glieder $\psi(i-1, i)$ und $\psi(i-1, i-1)$; folglich werden auch $\psi(i, i-1)$ und $\psi(i, i-2)$ verschwinden. Wenn aber dem so ist, so müssen auch $\psi(i-1, i-2)$ und $\psi(i-1, i-3)$ verschwinden; folglich verschwinden wegen (25bis) auch $\psi(i, i-3)$ und $\psi(i, i-4)$. Setzt man dieses Verfahren weit genug fort, so folgt überhaupt, dass $\psi(i, k)$ verschwindet, welche der Zahlen $3, 4, \ldots i+1$ man auch für k substituiren mag. Wir haben also statt der Gleichungen (23), (24), (25) folgende einfacheren Relationen:

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{i-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{i-2}\begin{bmatrix} i-1 \\ i-1 \end{bmatrix}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k-2}\begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
\begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ 4 \end{bmatrix} = 0;
\end{array}\right\} \quad (29)$$

aus denen sich durch Addition sogleich die Formel

Digitized by Google

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{k-2}\begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + \frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix} i-1 \\ k+1 \end{bmatrix} \\ \ldots + \frac{1}{i-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix} \qquad (30)$$

ergiebt. Jetzt sind wir im Stande, die Richtigkeit der Gleichungen (26), (27) und (28) zu prüfen. Wenn wir nämlich in der vorliegenden Gleichung (30) für k nach und nach $3, 4, 5, \ldots i, i+1$ setzen und dann addiren, so erhalten wir

$$\sum_{k=3}^{k=i+1} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \sum_{k=3}^{k=i} \begin{bmatrix} i-1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1, \qquad (31)$$

wodurch die Gleichung (27) verificirt ist. In der Gleichung (28) lassen wir i in $i+1$ übergehen und multipliciren mit 2, so ergiebt sich:

$$\sum_{m=3}^{m=i+1} \left(1 + \int \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right) \begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix} = \sum_{m=3}^{m=i} \int \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix}.$$

Wenn wir nun hierin für $\begin{bmatrix} i \\ m \end{bmatrix}$ den aus (30) sich ergebenden Werth substituiren, so erhält die Grösse $\frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-1 \\ k \end{bmatrix}$ als Factor die Summe

$$\sum_{m=3}^{m=k+1} \left(1 + \int \frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right),$$

deren Werth $= (k-1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \ldots + \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k}\right)$ ist. Die linke Seite obiger Gleichung wird daher

$$\sum_{k=3}^{k=i} \int \frac{1}{k} \cdot \begin{bmatrix} i-1 \\ k \end{bmatrix},$$

und ist somit mit der rechten Seite identisch. Hiedurch ist die Richtigkeit der Gleichung (28) bewiesen. Um endlich noch die Gleichung (26) zu verificiren, addiren wir zu derselben die Gleichung (28) und erhalten:

$$-\begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} - \sum_{m=3}^{m=i} \left(\frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{2}}{m-1} - \frac{\frac{1}{2}}{m-2}\right) \begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix} \\ + \sum_{m=3}^{m=i-1} \left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{2}}{m-1} - \frac{\frac{1}{2}}{m}\right) \begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix}$$

Wenn wir nun hiezu noch die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} i \\ 3 \end{bmatrix} = \sum_{m=3}^{m=i} \frac{1}{m-1} \begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix}, \quad 0 = \tfrac{1}{4}\Sigma\begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix} - \tfrac{1}{4}\Sigma\begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix}$$

Digitized by Google

und

$$0 = -\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\Sigma \frac{1}{m-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix}$$

addiren, so ergiebt sich mit Weglassung des Factors $\frac{1}{2}$:

$$0 = \Sigma\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right)\begin{bmatrix} i-1 \\ m \end{bmatrix} - \Sigma\frac{1}{m}\begin{bmatrix} i-2 \\ m \end{bmatrix},$$

oder auch

$$0 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} - \sum_{k=2}^{k=i-} \frac{1}{k}\left(\begin{bmatrix} i-1 \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k+2 \end{bmatrix}\right) - \sum_{k=3}^{k=i-1}\frac{1}{k}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix},$$

oder, da wegen (29)

$$\begin{bmatrix} i-1 \\ k+1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i-1 \\ k+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix}$$

und überdiess

$$\frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{k} = \frac{1}{k-1}$$

ist, so ist

$$0 = \begin{bmatrix} i-1 \\ 3 \end{bmatrix} - \Sigma\frac{1}{k-1}\begin{bmatrix} i-2 \\ k \end{bmatrix},$$

welche Gleichung mit (30) übereinstimmt. Somit sind alle drei überzähligen Gleichungen (26), (27) und (28) nothwendige Folgen der übrigen, diesen unmittelbar vorhergehenden Gleichungen. Von nun an tritt die Gleichung (16) sammt allen ihren Consequenzen in volle Kraft.

Um einen independenten Ausdruck für die Grösse $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ zu bekommen, geben wir der allgemeinen Gleichung in (29) die Gestalt:

$$\Pi(k-2).\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} - \Pi(k-3).\begin{bmatrix} i-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{k-1}\left\{\Pi(k-1).\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix}\right\}. \qquad (32)$$

Integrirt man diese Gleichung unter der Annahme, dass der Unterschied $i-k$ constant sei, so ergiebt sich:

$$\Pi(k-2).\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \frac{\Pi 2.\begin{bmatrix} i-k+3 \\ 4 \end{bmatrix}}{2} + \frac{\Pi 3.\begin{bmatrix} i-k+4 \\ 5 \end{bmatrix}}{3} + \dots$$

$$\dots + \frac{\Pi(k-1).\begin{bmatrix} i \\ k+1 \end{bmatrix}}{k-1}. \qquad (33)$$

Für $k=i+1$ ist diese Formel nicht anwendbar. Es ist aber

$$\Pi(i-1).\begin{bmatrix} i \\ i+1 \end{bmatrix} = \Pi(i-2).\begin{bmatrix} i-1 \\ i \end{bmatrix} = \Pi 1.\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1;$$

folglich

$$\Pi(i-2).\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{i-1} = \overset{i-2}{T_1},$$

$$\Pi(i-3).\begin{bmatrix} i \\ i-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\overset{2}{T_1} + \frac{1}{3}\overset{3}{T_1} + \frac{1}{4}\overset{4}{T_1} \dots + \frac{1}{i-2}\overset{i-2}{T_1} = \overset{i-3}{T_2}.$$

u. s. f,

Wenn überhaupt

$$\overset{n}{T}_{m+1} = \frac{1}{2}\overset{2}{T}_m + \frac{1}{3}\overset{3}{T}_m + \frac{1}{4}\overset{4}{T}_m \dots + \frac{1}{n+1}\overset{n+1}{T}_m \text{ und } \overset{n}{T}_0 = 1$$

gesetzt wird, so ist

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{\Pi(k-2)}\overset{k-2}{T}_{i-k+1}. \qquad (34)$$

Die Gleichung (20) kann nunmehr durch

$$\overset{n}{a_i} = \sum_{m=3}^{m=i+1} \frac{1}{\Pi(m-2)}\overset{m-2}{T}_{i-m+1}\binom{n+m-1}{m}$$

$$= \sum_{m=4}^{m=i+1} \frac{1}{\Pi(m-2)}\overset{m-3}{T}_{i-m+1}\binom{n+m}{m} - \overset{1}{T}_{i-2}\binom{n+2}{2} \qquad (35)$$

ersetzt werden.

Die Gleichungen (30) und (31) enthalten zwei die Functionen T betreffende Sätze, die ich hier noch einmal beweisen und mit zwei andern vermehren will. Aus der Definition der Functionen T ergiebt sich nämlich unmittelber die Gleichung

$$\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda} = \overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda} + \frac{1}{\lambda+1}\overset{\lambda+1}{T}_{n-\lambda-1}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch $\Pi\lambda$, so entsteht:

$$\frac{\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}}{\Pi\lambda} - \frac{\overset{\lambda+1}{T}_{n-\lambda-1}}{\Pi(\lambda+1)} = \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda}}{\Pi\lambda},$$

Digitized by Google

wofür, wenn $\lambda = n$ wird,

$$\frac{\overset{n}{T}_0}{\Pi n} = \frac{\overset{n-1}{T}_0}{\Pi n}$$

zu setzen ist. Wenn man nun diese Gleichung von $\lambda = m$ bis $\lambda = n$ integrirt, so erhält man

$$\frac{\overset{m}{T}_{n-m}}{\Pi m} = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{-\lambda}}{\Pi \lambda}, \qquad \text{(I)}$$

was der Gleichung (30) entspricht. Der kleinste Werth, den hier m haben kann, ist $m = 1$. Integrirt man diese Gleichung von $m = 1$ bis $m = n$, so erhält man

$$\sum_{m=1}^{m=n} \frac{\overset{m}{T}_{n-m}}{\Pi m} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \lambda \frac{\overset{\lambda-1}{T}_{n-\lambda}}{\Pi \lambda} = \sum_{m=1}^{m=n-1} \frac{\overset{m}{T}_{n-1-m}}{\Pi m}$$

Also ändert sich der Werth der Summe $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\Pi \lambda} \overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}$ nicht, wenn auch darin $n-1$ für n gesetzt wird; folglich behält diese Summe immer denselben Werth, welche ganze positive Zahl für n auch substituirt wird. Nun wird für $n = 1$ der Werth dieser Summe $\frac{1}{\Pi 1} \overset{1}{T}_0 = 1$; folglich ist überhaupt für jeden ganzen positiven Werth von n mit Einschluss der Null:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{\overset{\lambda}{T}_{n-\lambda}}{\Pi \lambda} = 1. \qquad \text{(II)}$$

Dieses stimmt überein mit der Formel (31). Zwei neue Formeln, welche gelten, wenn a, m, n ganze und positive Zahlen sind, sind folgende:

$$\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+m} \frac{\overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{a+m-\lambda}}{\Pi \lambda} = \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{\lambda}{T}_m \overset{\lambda-1}{T}_{a+n-\lambda}}{\Pi \lambda}, \qquad \text{(III)}$$

welche zeigt, dass der vorliegende Ausdruck seinen Werth nicht ändert, wenn darin m und n vertauscht werden; und

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{\overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{m-\lambda}}{\Pi \lambda} = \overset{1}{T}_{m+n-1}, \qquad \text{(IV)}$$

welche Formel zeigt, dass der Ausdruck links seinen Werth nicht ändert, wenn $m + n$ constant bleibt. Um die Formel (III) zu verificiren, setze ich auf der rechten Seite derselben

$$\frac{1}{\lambda} \overset{\lambda}{T}_m = \overset{\lambda-1}{T}_{m+1} - \overset{\lambda-2}{T}_{m+1},$$

Digitized by Google

ordne nach den Functionen $\overset{\lambda}{T}_{m+1}$, setze dann

$$\overset{\lambda}{T}_{a+n-1-\lambda} - \frac{1}{\lambda+1}\overset{\lambda+1}{T}_{a+n-2-\lambda} = \overset{\lambda-1}{T}_{a+n-1-\lambda}$$

und schaffe den einzigen negativen Term auf die linke Seite hinüber; auf diese Weise erhalte ich

$$\sum_{\lambda=a-1}^{\lambda=a+m} \frac{1}{\Pi\lambda}\cdot \overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{a+m-\lambda} = \sum_{\lambda=a-1}^{\lambda=a-1+n} \frac{1}{\Pi\lambda}\cdot \overset{\lambda}{T}_{m+1} \overset{\lambda-1}{T}_{a+n-1-\lambda}.$$

Diese Gleichung, die sich von (III) nur dadurch unterscheidet, dass a um 1 kleiner und m um 1 grösser geworden ist, ist mit jener zugleich gesetzt. Wenn daher eine Formel von der Form (III) wahr ist, so sind alle andern Formeln von derselben Form, in denen die Zahlen $a+m$ und n dieselben Werthe haben, auch wahr. Wenn wir aber in (III) respective $a+m$, 0, n für a, m, n setzen, so verwandelt sich jene Formel in

$$\frac{1}{\Pi(a+m)}\cdot \overset{a+m}{T}_n = \sum_{\lambda=a+m}^{\lambda=a+m+n} \frac{1}{\Pi\lambda} \overset{\lambda-1}{T}_{a+m+n-\lambda},$$

was mit (I) übereinstimmt, wenn dort $a+m+n$, $a+m$ respective für n, m gesetzt wird. Hiedurch ist die Richtigkeit der Formel (III) bewiesen. — Was nun die Formel (IV) betrifft, so leuchtet ihre Richtigkeit für $m=1$ sogleich ein. Wenn $m>1$ ist, so lässt sich auf ähnliche Weise wie vorhin zunächst zeigen, dass

$$\sum_{\lambda=2}^{\lambda=m} \frac{1}{\Pi\lambda} \overset{\lambda}{T}_n \overset{\lambda-1}{T}_{m-\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m-1} \frac{1}{\Pi\lambda} \overset{\lambda}{T}_{n+1} \overset{\lambda-1}{T}_{m-1-\lambda}$$

ist, wo die rechte Seite von der linken sich nur dadurch unterscheidet, dass n um 1 grösser und m um 1 kleiner geworden ist. Folglich bleibt der Ausdruck zugleich mit $m+n$ constant. Setzt man aber darin für m, n respective 1, $m+n-1$, so verwandelt er sich in $\overset{1}{T}_{m+n-1}$.

Mittelst der Gleichungen (4), (6), (8), (11), (16), (35) ist nun die Summe $\overset{n}{C}_i$ aller $i$fachen Producte, welche ohne Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, 4, ... $n-1$ gebildet werden können, wie auch die Summe $\overset{-n}{C}_i$ aller $i$fachen Producte, welche mit Wiederholungen aus den Elementen 1, 2, 3, ... n gebildet werden können, zwar als eine rationale ganze Function von n, vom $2i$ten Grade, aber in Beziehung auf i unter der Form einer sechsfachen Summe dargestellt, welche die transcendenten Functionen S und T implicirt. Indessen könnte K_t oder H_t, das in der gegebenen Entwickelung als dreifache Summe erscheint, unter der Voraussetzung, dass der absolute Werth von β kleiner als 1 sei, auf eine zweifache Summe zurückgebracht werden: denn aus der Natur der Gleichung (16) erhellt sogleich, dass H_t das Product der beiden Reihen

Digitized by Google

$$1-\overset{\varepsilon}{S}_1\beta+\overset{\varepsilon}{S}_2\beta^2-\overset{\varepsilon}{S}_3\beta^3+\text{etc.},$$
$$1+\overset{\varepsilon}{a}_1+\beta+\overset{\varepsilon}{a}_2\beta^2+\overset{\varepsilon}{a}_3\beta^3+\text{etc.}$$

ist, von denen die erste dem Producte $\left(1-\frac{\beta}{1}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\left(1-\frac{\beta}{3}\right)$ $\ldots\left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)$ gleich ist. Da nun Π_ε in Beziehung auf β vom Grade $\frac{\varepsilon}{2}$ oder $\frac{\varepsilon-1}{2}$ ist, je nachdem ε gerade oder ungerade ist, also jedenfalls den Grad ε des so eben genannten Products nicht erreicht, so kann die andere Reihe unter die Form

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varepsilon}(-1)^{\lambda-1}\binom{\varepsilon}{\lambda}\frac{\Pi_\varepsilon(\beta=\lambda)}{1-\frac{\beta}{\lambda}}$$

gebracht werden, aus welcher sogleich erhellt, dass diese Reihe

$$1+\overset{\varepsilon}{a}_1\beta+\overset{\varepsilon}{a}_2\beta^2+\overset{\varepsilon}{a}_3\beta^3+\text{etc. in inf.}$$

für $\beta<1$ convergirt. Durch Vertauschung der Folge der Summationen erhält aber dieselbe Reihe die Gestalt

$$1+\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{\Pi(r-1)}\binom{\varepsilon+r}{r+1}\beta^r\left(\sum_{\lambda=}^{\lambda=\infty}\overset{r-1}{T_\lambda}\,\beta^\lambda\right), \qquad (A)$$

aus welcher bei dem gänzlichen Mangel negativer Glieder mit Nothwendigkeit folgt, dass auch die Reihe

$$1+\overset{m}{T}_1x+\overset{m}{T}_2x^2+\overset{m}{T}_3x^3+\text{etc. in inf.} \qquad (a)$$

convergirt, sobald x absolut kleiner als 1 ist, ein Ergebniss, von dem ein directer Beweis noch zu wünschen ist. Denn folgender Versuch führt nicht zum Ziele.

Die Zahl der in dem Aggregat T_i enthaltenen $i$fachen Producte beträgt $\frac{m\,(m+2i-1)\,(m+2i-2)\ldots(m+i+1)}{1.2.3\ldots.i}$, und der Werth des grössten Products ist $\frac{1}{2^i}$; folglich ist $\overset{m}{T_i}$ kleiner als $\frac{m\,(m+2i-1)\ldots(m+i+1)}{1.2\ldots.i}\cdot\frac{1}{2^i}$. Eine Reihe aber, die diesen Ausdruck zum Coefficienten der Potenz x^i hätte, würde convergiren, sobald $x<\frac{1}{2}$ wäre. Um so mehr wird also obige Reihe convergiren, wenn $x<\frac{1}{2}$ ist. — Die Sache ist jedoch leichter als es anfangs schien. Aus der Formel (II) folgt nämlich $\overset{m}{T_i}<\Pi m$. Also ist die Reihe (a) für $x<1$ convergent, und ihr Werth kleiner als $\frac{\Pi m}{1-x}$.

Digitized by Google

Wenn man den Ausdruck (1) für $P^{(-n)}$ in Partialbrüche zerlegt, so erhält man

$$P^{(-n)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{n-\lambda} \frac{\lambda^n}{\Pi\lambda . \Pi(n-\lambda)} \cdot \frac{1}{1-\lambda x}. \qquad (36)$$

Denkt man sich nun diese Partialbrüche in geometrische Reihen nach den steigenden Potenzen von x entwickelt, so ergiebt sich sogleich

$$\overset{-n}{C_i} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{n-\lambda} \frac{\lambda^{n+i}}{\Pi\lambda . \Pi(n-\lambda)}, \qquad (37)$$

wo die Summe rechts bekanntlich verschwindet, wenn für $n+i$ ein positiver und ganzer Exponent, der kleiner ist als n, gesetzt wird.

Bei dieser Gelegenheit möge erwähnt werden, dass die Summe

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{\lambda} \frac{1}{\lambda^i}$$

gleich ist der Summe aller $i$fachen Producte mit Wiederholungen, die aus den Elementen $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ gebildet werden können, ein Satz, der übrigens, wenn dieses Aggregat mit $\overset{n}{U_i}$ bezeichnet wird, leicht mittelst der Relation

$$\overset{n+1}{U_i} = \overset{n}{U_i} + \frac{1}{n+1} \overset{n+1}{U_{i-1}}$$

verificirt werden kann. Wenn i ohne Ende wächst, so nähert sich $\overset{n}{U_i}$ ohne Aufhören der Gränze n. — Die Sache kann noch allgemeiner gemacht werden. Es bezeichne $\overset{n}{V_i}$ die Summe aller $i$fachen Producte mit Wiederholungen, die aus den Elementen $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+2}, \ldots \frac{1}{a+n}$ gebildet werden können, oder mit andern Worten, es sei

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x}{a+1}\right)\left(1-\frac{x}{a+2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a+n}\right)} = 1 + \overset{n}{V_1} x + \overset{n}{V_2} x^2 + \overset{n}{V_3} x^3 + \text{etc.},$$

so ist

$$\overset{n}{V_i} = \binom{a+n}{n} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{\lambda} \frac{\lambda}{(a+\lambda)^{i+1}}.$$

Aus dieser Gleichung folgt nun:

Digitized by Google

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda}\binom{n}{\lambda}\frac{1}{(a+\lambda)^i}$$

$$=\frac{1}{a^i}\cdot\frac{1+\overset{n}{V}_1 a+\overset{n}{V}_2 a^2\ldots+\overset{n}{V}_{i-1}a^{i-1}}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)},$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n}(-1)^{\lambda-1}\binom{n}{\lambda}\frac{1}{(a+\lambda)^i}$$

$$=\frac{\overset{n}{V}_i+\overset{n}{V}_{i+1}a+\overset{n}{V}_{i+2}a^2+\ldots}{\left(1+\frac{a}{1}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{a}{n}\right)}.$$

Die Reihe (a) ist einer Verwandlung fähig, aus der man so gleich sieht, dass sie für $x<1$ convergirt. Es ist nämlich

$$\overset{n}{T}_m=\sum_{i=0}^{i=m}\frac{(-1)^i}{\Pi i}\overset{n+i+1}{U}_{m-i}=n\sum_{i=0}^{i=m}\frac{(-1)^i}{\Pi i}\frac{1}{n+i}\overset{n+i}{U}_{m-i}. \quad \text{(V)}$$

Hieraus ergiebt sich durch Vertauschung der Folge der Summationen und indem man für die Reihen, welche U enthalten, ihre endlichen Werthe setzt:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty}\overset{n}{T}_m x^m=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+1}\right)}$$

$$\times\left\{1-\frac{\frac{1}{\Pi 1}x}{1-\frac{x}{n+2}}+\frac{\frac{1}{\Pi 2}x^2}{\left(1-\frac{x}{n+2}\right)\left(1-\frac{x}{n+3}\right)}-\frac{\frac{1}{\Pi 3}x^3}{\left(1-\frac{x}{n+2}\right)\left(1-\frac{x}{n+3}\right)\left(1-\frac{x}{n+4}\right)}+\ldots\right\}$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)}$$

$$\times\left\{1-\frac{\frac{n}{n+1}\frac{1}{\Pi 1}x}{1-\frac{x}{n+1}}+\frac{\frac{n}{n+2}\frac{1}{\Pi 2}x^2}{\left(1-\frac{x}{n+1}\right)\left(1-\frac{x}{n+2}\right)}-\text{etc. in inf.}\right\} \quad \text{(VI)}$$

Wenn man den ersten der beiden hier gegebenen Ausdrücke in der Formel (A) substituirt und die Folge der Summationen

umkehrt, so erhält man unter Berücksichtigung der Relation $\sum_{r=1}^{r=\lambda}(-1)^{\lambda-r}\binom{\lambda-1}{r-1}\binom{\varepsilon+r}{r+1}=\binom{\varepsilon+1}{\lambda+1}$ als Ersatz der Gleichungen (11), (16), (35) folgende endliche Formel:

$$H_\varepsilon=\left(1-\frac{\beta}{1}\right)\left(1-\frac{\beta}{2}\right)\dots\left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\varepsilon}\binom{\varepsilon+1}{\lambda+1}\frac{1}{\Pi(\lambda-1)}\beta^\lambda\left(1-\frac{\beta}{\lambda+1}\right)\left(1-\frac{\beta}{\lambda+2}\right)\dots\left(1-\frac{\beta}{\varepsilon}\right). \quad (38)$$

XXXIX.

Allgemeine Lehrsätze über Systeme von Kräften und ihrer Momente. Nach Chasles in Liouville's Journal. Mai et Juin 1847.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

1) Zwei Systeme von Kräften, die in beliebiger Anzahl vorhanden sein mögen, heissen aequivalent, wenn man ein System auf das andere, durch Zusammensetzung oder Zerlegung der Kräfte, zurückführen kann; oder, was das Nämliche ist, wenn die Kräfte beider Systeme, parallel mit sich selbst in einem Punkte angebracht, dort die gleiche Resultante geben und dadurch das nämliche resultirende Kräftepaar (couple) hervorbringen.

2) I. Lehrsatz. Wenn man zwei beliebige Systeme von Kräften hat und multiplicirt jede Kraft des ersten Systems mit jeder des zweiten und mit dem Cosinus des Winkels der Richtungen beider Kräfte, so hat die Summe aller dieser Produkte in Bezug auf die genannten zwei Systeme den nämlichen Werth, als die Summe der ähnlichen Produkte in Bezug auf zwei Systeme von Kräften, die den ersten zwei aequivalent sind.

Seien $a, a', \dots$ die Kräfte des einen, $b, b', \dots$ die des andern der zwei Systeme: $A, A', \dots; B, B', \dots$ die Kräfte der aequivalenten Systeme; bezeichnen wir den Winkel der Richtungen der Kräfte a, b mit (a, b), so muss

$$\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B)$$

Digitized by Google

sein, wo das eine Zeichen sich auf alle Kräfte b, B, das andere auf die a, A erstreckt. Betrachten wir zunächst das Glied $\Sigma ab\cos(a,b)$, wenn das Σ-Zeichen sich bloss auf die b erstreckt, so ist offenbar

$$\Sigma ab\cos(a,b)$$
$$=a[b\cos(a,b)+b'\cos(a,b')+b''\cos(a,b'')+\ldots.];$$

d. h. dieses Glied ist $=a$, multiplizirt mit der Summe der Projektionen aller Kräfte b auf a. Nun ist aber das System der Kräfte B mit dem der b aequivalent, somit ist

$$\Sigma b\cos(a,b)=\Sigma B\cos(a,B),$$

also auch

$$a\Sigma b\cos(a,b)=a\Sigma B\cos(a,B).$$

Ganz eben so findet sich:

$$B\Sigma a\cos(a,B)=B\Sigma A\cos(A,B).$$

Hieraus aber folgt leicht

$$\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma aB\cos(a,B),$$
$$\Sigma\Sigma aB\cos(a,B)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B);$$

woraus endlich

$$\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)=\Sigma\Sigma AB\cos(A,B),$$

was den zu beweisenden Lehrsatz ausspricht.

Anmerkung. Um die Gleichung $\Sigma b\cos(a,b)=\Sigma B\cos(a,B)$ zu beweisen, darf man sich die Kräfte b parallel mit sich selbst in einen Punkt der Richtung der Kraft a versetzt denken, und wird sie dort in eine einzige Kraft zusammensetzen können, deren Projektion auf a gleich $\Sigma b\cos(a,b)$ ist; sei diese Kraft $=\beta$, so ist also $\beta\cos(a,\beta)=\Sigma b\cos(a,b)$. Verfährt man eben so mit den Kräften B, so muss man die gleiche Resultante β erhalten, und es ist folglich auch $\beta\cos(a,\beta)=\Sigma B\cos(a,B)$, woraus nun die Gleichung folgt.

3) Nehmen wir an, es haben die Kräfte a, a',.... eine einzige Resultante A; die Kräfte b, b',.... eine einzige Resultante B; so wird man die Kräfte A, B statt der zwei Systeme A, A',....; B, B',.... setzen können, und also aus Lehrsatz I. (§. 2.) erhalten:

$$AB\cos(A,B)=\Sigma\Sigma ab\cos(a,b).$$

4) Seien ferner die Kräfte b, b',.... durchaus die nämlichen wie a, a',...., so ist $A=B$, $(A,B)=0$ und es zerfällt $\Sigma\Sigma ab\cos(a,b)$ in Σa^2 und $2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a')$; folglich ist

$$A^2=\Sigma a^2+2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a'),$$

d. h. wenn mehrere Kräfte eine einzige Resultante haben, so ist

Digitized by Google

das Quadrat derselben gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Kräfte, vermehrt um das Doppelte der Summe der Produkte dieser Kräfte, jedes einzelne Produkt gebildet aus zwei verschiedenen Kräften, multiplizirt mit dem Cosinus des Winkels ihrer Richtungen; oder in Zeichen:

$$\begin{aligned}A^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \ldots\\ + 2aa' \cos(a, a') + 2aa'' \cos(a, a'') + 2aa''' \cos(a, a''') + \ldots\\ + 2a'a'' \cos(a', a'') + 2a'a''' \cos(a', a''') + \ldots\\ + 2a''a''' \cos(a'', a''') + \ldots\end{aligned}$$

5) II. Lehrsatz. Wenn man zwei Systeme von Kräftepaaren hat, und das Produkt des Momentes jedes Paars des ersten Systems mit dem Momente jedes Paars des zweiten Systems und mit dem Cosinus des Winkels der Ebenen beider Systeme bildet, so ist die Summe dieser Produkte von gleichem Werthe mit der Summe von ähnlichen Produkten in Bezug auf zwei aequivalente Systeme von Kräftepaaren.

Um Kräftepaare zusammenzusetzen oder zu zerlegen, errichtet man bekanntlich auf ihren Ebenen Senkrechte, gleich den Momenten der resp. Paare, betrachtet diese Senkrechten als Kräfte und setzt sie dann zusammen oder zerlegt sie. Diese Betrachtungen, verbunden mit Lehrsatz I., führen unmittelbar zu Lehrsatz II.

6) Ein System von Paaren $m, m', \ldots$ kann immer zu einem einzigen Paare M, ein anderes System $n, n', \ldots$ zu einem einzigen N zusammengesetzt werden; demnach ist, nach §. 5., analog §. 3.:

$$MN \cos(M, N) = \Sigma\Sigma mn \cos(m, n).$$

7) Sind $m, m', \ldots$ identisch das Nämliche wie $n, n', \ldots$, so ergiebt sich, wie §. 4.:

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm' \cos(m, m').$$

8) Da das Moment einer Kraft in Bezug auf einen festen Punkt nichts Anderes ist als das Moment eines Kräftepaares, dessen Hebelarm die Senkrechte von jenem Punkte auf die Kraft ist und dessen beide Kräfte einzeln gleich der gegebenen Kraft sind, so folgt aus Lehrsatz II.:

III. Lehrsatz. Man habe zwei beliebige Systeme von Kräften, bilde die Momente der Kräfte des ersten Systems in Bezug auf einen festen Punkt, die Momente der Kräfte des zweiten Systems in Bezug auf einen andern festen Punkt, multiplizire jedes Moment des ersten Systems mit jedem des zweiten und mit dem Cosinus des Winkels der Ebenen der betreffenden zwei Momente: so behält die Summe aller dieser Produkte den nämlichen Werth, wenn man die zwei Systeme von Kräften durch zwei aequivalente Systeme ersetzt, und die Momente in Bezug auf die nämlichen festen resp. Punkte nimmt.

Alle Kräfte des ersten Systems können durch zwei Kräfte ersetzt werden, von denen die eine durch den ersten festen Punkt

Digitized by Google

geht. Das Moment der zweiten ist aequivalent den Momenten des ganzen Systems und bildet das resultirende Moment oder das Hauptmoment desselben. Es ist gleich der Summe der Projektionen aller Momente der Kräfte auf seine Ebene, welche letztere diejenige Ebene ist, für welche die Summe der Orthogonalprojektionen aller Momente ein Maximum ist. Sei M dieses Hauptmoment der Momente m, m',.... des ersten Systems, ebenso N das Hauptmoment der Momente n, n',.... des zweiten Systems; so ist

$$MN\cos(M,N) = \Sigma\Sigma mn\cos(m,n).$$

Sind die zwei Systeme identisch, so ergiebt sich:

$$M^2 = \Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm'\cos(m,m').$$

9) Es wirke ein System von n Kräften a, a',.... auf einen Körper, oder mehrere mit einander verbundene Körper, und man bringe in irgend einem Punkte n Paare gerade entgegengesetzt wirkender Kräfte an, von denen jedes Paar gleich und parallel einer der Kräfte a, a',.... ist; so kann man sich bekanntlich statt der n gegebenen Kräfte, in verschiedenen Punkten wirkend, dieselben n Kräfte an dem einen Punkte wirkend denken, verbunden mit n Kräftepaaren, deren resp. Momente (Intensitäten) gleich sind dem Momente jeder der n Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt. Zwischen den n Kräften wird Gleichgewicht sein, wenn die Resultante derselben, sowie das resultirende Paar, Null ist, d. h. nach §. 4. und §. 7., wenn

$$\Sigma a^2 + 2\Sigma\Sigma aa'\cos(a,a') = 0,$$
$$\Sigma m^2 + 2\Sigma\Sigma mm'\cos(mm') = 0;$$

wo m, m',.... die Momente der Paare ausdrücken.

Diese beiden Gleichungen ersetzen die bekannten sechs Gleichungen des Gleichgewichts. Denn seien a_x, a_y, a_z die drei Komposanten von a, parallel mit drei auf einander senkrecht stehenden Koordinatenaxen, und zerlegt man eben so die Kräfte a',...., so ist offenbar die erste dieser zwei Gleichungen übereinstimmend mit

$$(a_x + a_x' + ...)^2 + (a_y + a_y' + ...)^2 + (a_z + a_z' + ...)^2 = 0,$$

d. h. mit

$$a_x + a_x' + ... = 0,\ a_y + a_y' + ... = 0,\ a_z + a_z' + ... = 0.$$

Ersetzt man eben so das Paar m durch seine drei Projektionen auf die drei Koordinatenebenen, m_x, m_y, m_z, so ist die zweite Gleichung übereinstimmend mit

$$(m_x + m_x' + ...)^2 + (m_y + m_y' + ...)^2 + (m_z + m_z' + ...)^2 = 0,$$

d. h. mit

$$m_x + m_x' + ... = 0,\ m_y + m_y' + ... = 0,\ m_z + m_z' + ... = 0;$$

welches die bekannten sechs Gleichungen des Gleichgewichts sind.

Digitized by Google

10) IV. **Lehrsatz.** Man habe zwei Systeme von Kräften, nehme das Moment einer jeden Kraft des ersten Systems in Bezug auf einen festen Punkt, multiplizire jedes dieser Momente mit jeder Kraft des zweiten Systems und mit dem Sinus des Winkels, den die Richtung der Kraft mit der Ebene des Momentes macht; so wird die Summe aller dieser Produkte den gleichen Werth behalten, wenn man die zwei Systeme von Kräften durch zwei ihnen resp. aequivalente ersetzt.

Seien a, a',.... die Kräfte des ersten Systems; m, m',.... ihre Momente in Bezug auf einen festen Punkt; b, b',.... die Kräfte des zweiten Systems. Seien ferner A, A',.... die Kräfte des dem ersten aequivalenten Systems; M, M',.... ihre Momente in Bezug auf denselben festen Punkt; B, B',.... die Kräfte des dem zweiten aequivalenten Systems: so muss

$$\Sigma\Sigma bm \sin(b, m) = \Sigma\Sigma BM \sin(B, M)$$

sein. Denn man ziehe durch den festen Punkt Gerade, welche Kräfte μ, μ',....; μ_1, μ_1',.... vorstellen, gleich den Momenten m, m',... und M, M',...., und senkrecht sind auf den Ebenen dieser Momente, so werden diese Kräfte zwei aequivalente Systeme darstellen. Demnach hat man nach Lehrsatz I.:

$$\Sigma\Sigma b\mu \cos(b, \mu) = \Sigma\Sigma B\mu_1 \cos(B, \mu_1).$$

Aber es ist $\mu = m$, $\cos(b, \mu) = \sin(b, m)$; $\mu_1 = M$, $\cos(B, \mu_1) = \sin(B, M)$, woraus nun der Lehrsatz folgt.

11) Das Vorzeichen eines jeden Gliedes der Summe $\Sigma\Sigma bm \sin(b, m)$ hängt von dem Winkel ab, den die Richtung von b mit der Axe des Moments m (d. h. mit der Senkrechten auf der Ebene des Momentes) macht; die Richtung dieser Axe, über oder unter der Ebene des Moments, hängt von der Richtung der Kraft a ab. Denkt man sich diese Ebene unter dem Auge, so wird die Axe nach dem obern Theile des Himmels gerichtet sein, wenn die Kraft a nach einer bestimmten Richtung hin zu drehen sucht; dagegen nach dem untern Theile des Himmelgewölbes, wenn sie in entgegengesetzter Richtung zu drehen strebt. Man kann aber das Vorzeichen noch auf eine direktere Art bestimmen.

Denken wir uns nämlich zuerst die Axe des Moments m nach oben gerichtet, so wird $\sin(b, m)$ das $+$ oder $-$ Zeichen haben, je nachdem b, welche Kraft ihren Angriffspunkt in der Ebene des Moments haben möge, über oder unter derselben ist. Im erstern Falle wird ein Auge, das an dem einen Ende der Kraft b sich befindet und nach dem Angriffspunkte hinsieht, die Kraft a nach einer bestimmten Richtung hin zu drehen suchen sehen; im andern Falle in entgegengesetzter Richtung. (Im einen Falle z. B. wie die Zeiger einer Uhr, im andern entgegengesetzt.) Das Zeichen von $bm \sin(b, m)$ wird also bestimmt nach dem Sinne, in welchem ein Auge, das sich am Ende der Kraft b befindet und nach ihrem Angriffspunkte hinsieht, die Kraft a drehen sieht. Man überzeugt sich leicht, dass es eben so ist, wenn die Axe des Moments unter der Ebene des Momentes ist. Wir sagen also: Das Glied $bm \sin(b, m)$ hat das Zeichen $+$ oder $-$, je nachdem die Kraft a, gesehen von dem Ende der Kraft b (nach ihrem Angriffspunkte hin), in einem bestimmten Sinne zu drehen sucht (z. B. in dem Sinne

Digitized by Google

der Bewegung der Zeiger eines zugleich angesehenen Zifferblattes einer Uhr), oder im entgegengesetzten Sinne.

12) Das Volumen eines Tetraeders, welches zu entgegengesetzten Kanten die Geraden a, b, deren kürzeste Entfernung r ist, hat, ist gleich $\frac{abr\sin(a,b)}{6}$.

Es ist zuerst leicht einzusehen, dass, wenn man eine Kante eines Tetraeders in ihrer eigenen Richtung sich bewegen lässt, dadurch das Volumen desselben nicht geändert wird. Diess vorausgesetzt, lässt sich nun der Lehrsatz in folgender Art beweisen. Seien in Taf. V. Fig. 1. $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ die zwei entgegengesetzten Kanten. Durch α lege man eine Ebene, senkrecht auf $\beta\beta'$, von der wir voraussetzen, sie gehe durch den Anfangspunkt β (da man im andern Falle $\beta\beta'$ in seiner Richtung fortbewegen kann). Sei $\alpha\alpha''$ die Projektion von $\alpha\alpha'$ auf diese Ebene, βp eine Senkrechte von β auf $\alpha\alpha''$; diese Senkrechte ist gleich der kürzesten Entfernung r der beiden Kanten. Das Tetraeder, welches wir betrachten, ist seinem Volumen nach gleich dem über den Kanten $\beta\beta'$ und $\alpha\alpha''$ (als entgegengetzten Kanten), weil beide Tetraeder die drei Spitzen β, β', α gemeinschaftlich haben und die Spitzen α', α'' auf einer Linie liegen, die parallel ist zur Ebene der Punkte β, β', α. Nun hat das letzte Tetraeder zum Volumen:

$$\frac{\alpha\alpha''.\beta p}{2}\cdot\frac{\beta\beta'}{3}=\tfrac{1}{6}\alpha\alpha''.\beta\beta'.r=\tfrac{1}{6}\alpha\alpha'.\cos\alpha'\alpha\alpha''.\beta\beta'.r=\tfrac{1}{6}abr\sin(a,b),$$

wenn $\alpha\alpha'=a$, $\beta\beta'=b$. Dieser Ausdruck ist also auch das Volumen des in Frage stehenden Tetraeders, was den Lehrsatz beweist.

13) Das Tetraeder, welches über zwei Kräften, als entgegengesetzte Kanten desselben betrachtet, errichtet wird, hat ein Volumen gleich dem sechsten Theile des Produktes einer der Kräfte mit dem Momente der andern, in Bezug auf die erste genommen.

Denn das Tetraeder über $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ ist $\frac{\alpha\alpha'.\beta\beta'.r.\sin(\alpha\alpha',\beta\beta')}{6}$. Nun versteht man unter dem Momente der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf die Kraft $\beta\beta'$ das Moment der Komponente dieser Kraft in einer auf $\beta\beta'$ senkrechten Ebene, genommen in Bezug auf den Punkt, wo diese Ebene die $\beta\beta'$ trifft. Dasselbe ist also $\alpha\alpha''.\beta p$ $=\alpha\alpha''.r=\alpha\alpha'.r.\sin(\alpha\alpha',\beta\beta')$, was nun den Satz beweist.

Das Moment der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf $\beta\beta'$ ist $\alpha\alpha''.\beta p$, gleich der doppelten Fläche des Dreiecks $\alpha\beta\alpha''$. Dieses Dreieck selbst ist die Projektion eines Dreiecks, dessen Grundlinie $\alpha\alpha'$ ist und dessen Spitze in $\beta\beta'$ sich befindet. Das Doppelte dieses Dreiecks aber ist das Moment der Kraft $\alpha\alpha'$ in Bezug auf jenen Punkt in $\beta\beta'$. Man kann also auch sagen:

Das Moment einer Kraft in Bezug auf eine Gerade ist die Projektion des Momentes der Kraft in Bezug auf einen Punkt der Geraden, wenn die Projektion auf eine Ebene geschieht, welche senkrecht auf der gegebenen Geraden steht.

14) V. Lehrsatz. Man habe zwei Systeme von Kräften, bilde über jeder Kraft des ersten Systems in Verbindung mit

Digitized by Google

je einer des zweiten, als entgegengesetzten Kanten, Tetraeder, so wird die Summe der Inhalte aller dieser Tetraeder unverändert bleiben, wenn man statt der zwei betrachteten Systeme zwei ihnen resp. aequivalente wählt.

Bezeichnen wir die Systeme, wie in §. 2., so ist

$$\Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (a, b) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (A, B),$$

worin jedes Glied das Zeichen + oder − hat, je nachdem die eine Kraft, gesehen von dem Ende der andern, in einem bestimmten oder dem entgegengesetzten Sinne zu drehen strebt.

Beachtet man das in §. 13. Gesagte, so ist der Beweis ganz der gleiche, wie in §. 2. Denn es ist, wenn das Zeichen Σ sich bloss auf b bezieht,

$$\Sigma \text{Tetr. } (a, b) = \frac{a}{6} \Sigma \text{ (der Momente von } b, b', \ldots \text{ in Bezug auf } a)$$

$$= \frac{a}{6} \Sigma \text{ (,, \quad ,, \quad ,, } B, B', \ldots \text{ ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,)}$$

$$= \Sigma \text{Tetr. } (a, B).$$

Eben so

$$\Sigma \text{Tetr. } (a, B) = \Sigma \text{Tetr. } (A, B),$$

wenn das Zeichen Σ sich auf a, A bezieht. Also

$$\Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (a, b) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (a, B) = \Sigma\Sigma \text{ Tetr. } (A, B).$$

Was die Regel der Vorzeichen anbelangt, so ist zu merken, dass man in

$$\Sigma \text{ (der Momente von } b, b', \ldots \text{ in Bezug auf } a)$$

den einzelnen Gliedern das + oder − Zeichen geben muss, je nachdem die betreffende Kraft, gesehen vom Endpunkte von a aus, in einem bestimmten oder dem entgegengesetzten Sinne zu drehen strebt (§. 10.).

15) Gesetzt b, b', ... seien identisch die nämlichen wie a, a', ... und eben so B, B', ... wie A, A', ..., so schliesst man:

Man habe zwei aequivalente Systeme von Kräften, so ist die Summe der Tetraeder, die man auf je zwei Kräften des ersten Systems, als entgegengesetzte Kanten betrachtet, bilden kann, gleich der Summe der Tetraeder, die man auf ähnliche Weise mit den Kräften des zweiten Systemes zu bilden im Stande ist.

Begreiflicher Weise gilt Alles, was von zwei aequivalenten Systemen gesagt ist, von zwei Systemen, die sich gegenseitig das Gleichgewicht halten.

16) Daraus folgt:

Wie man auch immer die Kräfte eines Systems von Kräften durch zwei Kräfte ersetze, so ist immer das Tetraeder über diesen zwei Kräften von gleichem Volumen.

Digitized by Google

17) Sind diese zwei Kräfte in einer Ebene, bilden also ein Paar oder reduziren sich auf eine einzige, so ist dieses Volumen Null. Also:

Die geometrische Bedingung, dass ein System von Kräften eine einzige Resultante habe oder sich auf ein Paar (couple) reduzire, ist, dass die Summe der Inhalte der Tetraeder, die man auf je zwei Kräften des Systems entgegengesetzter Kanten errichten kann, Null sei.

18) Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind und man theilt sie in zwei Gruppen, so sind die Kräfte der einen Gruppe im Gleichgewichte mit denen der andern. Also nach §. 15.:

Wenn Kräfte mit einander im Gleichgewichte sind, so ist die Summe der Tetraeder, die man über mehreren derselben dadurch bilden kann, dass man je zwei als entgegengesetzte Kanten betrachtet, gleich der Summe der Tetraeder, die man auf gleiche Weise über den übrigen Kräften bilden kann.

19) Man schliesst hieraus:

Wenn vier Kräfte im Gleichgewichte sind, so ist das Volumen des Tetraeders, das auf die genannte Art über zweien derselben errichtet wird, gleich dem Volumen des Tetraeders über den andern zwei.

20) VI. Lehrsatz. Wenn zwei aequivalente Systeme von Kräften an demselben festen Körper angebracht sind und man giebt diesem Körper eine unendlich kleine Bewegung, bildet sodann das Produkt einer jeden Kraft mit dem Wege, den ihr Angriffspunkt im Sinne der Richtung der Kraft durchlaufen hat, so ist die Summe aller dieser Produkte für das eine System gleich der Summe derselben für das andere System.

Sei mm' der Weg des Angriffspunktes m von a, so ist $a.mm'.\cos(a,mm')$ das Glied in Bezug auf diese Kraft, das in $\Sigma a.mm'.\cos(a,mm')$ eintritt. Man muss also beweisen, dass diese Summe unverändert bleibt, wenn man a, a',.... durch ein aequivalentes System ersetzt.

Jede unendlich kleine Bewegung eines freien festen Körpers kann als aus zwei gleichzeitigen Bewegungen entstanden gedacht werden, von denen die eine eine Umdrehungsbewegung um eine bestimmte Gerade, die andere eine fortschreitende Bewegung ist. Seien $m\mu$, $m\mu'$ die zwei Komposanten der Bewegung von m, so ist $m\mu$ für jeden Punkt des Körpers verschieden, $m\mu'$ für alle gleich; ferner ist bekanntlich

$$mm'.\cos(a,mm') = m\mu\cos(a.m\mu) + m\mu'\cos(a,m\mu'),$$

woraus folgt:

$$\Sigma a.mm'.\cos(a,mm') = \Sigma a.m\mu.\cos(a,m\mu) + m\mu'.\Sigma a.\cos(a,m\mu').$$

Da $\Sigma a.\cos(a,m\mu')$ ungeändert bleibt, wenn a, a',.... durch ein aequivalentes System ersetzt wird, indem dieses Glied nur die

Digitized by Google

Summe der Projektionen von a, a',.... auf $m\mu'$ ausdrückt, so hat man diese Unveränderlichkeit nur von dem Gliede $\Sigma a \,.\, m\mu \,.\cos(a,m\mu)$ zu beweisen.

$m\mu$ ist der Weg von m, hervorgebracht durch eine Umdrehung um eine bestimmte Gerade. Sei nun r die Senkrechte von m auf diese Gerade, θ die Drehung, so ist $m\mu = r \,.\, \theta$. Nehmen wir an, eine Kraft, ausgedrückt durch θ, wirke nach jener Geraden, so ist ihr Moment in Bezug auf m gleich $r\theta$; also ist $a \,.\, m\mu \,.\cos(a,m\mu)$

$= a \times$ (dem Moment von θ in Bezug auf m) $\times \cos(a,m\mu)$,

$= a \times$ (der Projektion dieses Momentes auf eine Ebene, senkrecht auf a),

$= a \times$ (dem Moment der Kraft θ in Bezug auf a) (§. 13.)

$= 6$ Tetr. (a,θ).

Demnach

$$\Sigma a \,.\, m\mu \,.\cos(a,m\mu) = 6\Sigma \text{ Tetr. } (a,\theta).$$

Das letzte Glied ändert sich nicht, wenn man a, a',.... durch ein aequivalentes System ersetzt (§. 15.), indem, wenn a, a',....; A, A',.... aequivalent sind, es auch θ, a, a',....; θ, A, A',.... sein werden, und die Summen $\Sigma\Sigma$ Tetr. (a,a'), $\Sigma\Sigma$ Tetr. (A,A') ohnehin gleich sind; also ist diess auch für das erste der Fall was den Satz beweist.

21) Man kann auch sagen:

$$a \,.\, (\text{Moment von } \theta \text{ in Bezug auf } a)$$
$$= \theta \,.\, (\text{Moment von } a \text{ in Bezug auf } \theta),$$

was aus §. 13. unmittelbar folgt; und da die Summe der Momente von a, a',.... in Bezug auf eine Gerade θ konstant bleibt für jedes mit diesem aequivalente System, so folgt das so eben Bewiesene auch aus dieser Betrachtung.

22) Wenn die Kräfte a, a',.... im Gleichgewichte stehen, so kann man sie durch zwei gleiche und geradezu entgegengesetzte Kräfte ersetzen, woraus folgt, dass alsdann

$$\Sigma a \,.\, mm' \,.\cos(a,mm') = 0$$

ist. Diess ist das bekannte **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten**.

XL.

Ueber die Transformation der unabhängigen Veränderlichen in vielfachen Differentialen und Integralen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ n unabhängige Veränderliche, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ n andere unabhängige Veränderliche, verbunden mit den ersten durch die n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0, \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n) = 0; \end{array}\right\} \quad (1)$$

welche, der Kürze wegen, durch $f_1 = 0$, $f_2 = 0, \ldots f_n = 0$ dargestellt werden mögen.

Man stellt nun die Aufgabe, aus dem bekannten Differential $\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$, wo S eine Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist, das Differential $\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_n}$ abzuleiten, worin $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch ihre Werthe in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, wie man sie aus (1) ableitet, ausgedrückt werden.

Sei

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = U,$$

so ist U, der Annahme nach, eine bekannte Funktion von $x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$. Nun ist:

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial^{n-1} S}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = \frac{\partial V}{\partial x_1},$$

wenn $\frac{\partial^{n-1} S}{\partial x_2 \partial x_3 \ldots \partial x_n} = V = \int U \partial x_1$ gesetzt wird. Um die Grösse $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ zu erhalten, muss man aber in V bloss x_1 als veränderlich ansehen, und alle andern Grössen $x_2, x_3, \ldots x_n$ als konstant betrachten. Unter dieser Voraussetzung enthalten die Gleichungen (1) $n+1$ Veränderliche $x_1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$. Obwohl nämlich $x_2, x_3, \ldots x_n$ auch Funktionen der Veränderlichen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sind, so müssen diese Funktionen nun so beschaffen sein, dass sie sich nicht ändern, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dergestalt sich ändern. wie es die Aenderungsart von x_1 verlangt, d. h. mit anderen Worten, die einer Aenderung der Grösse x_1 korrespondirenden Aenderungen der $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ müssen so beschaffen sein, dass dadurch keine Aenderung in den Werthen von $x_2, \ldots x_n$ vor sich geht. Da die Anzahl der Gleichungen (1) n ist, so kann man also jetzt eine der $n+1$ Veränderlichen $x_1, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ als die unabhängige Veränderliche betrachten, z. B. α_1, und die andern n, also $x_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, vermöge der Gleichungen (1) durch diese ausdrücken, so dass z. B. x_1 als blosse Funktion von α_1 erscheint. Demnach ist, nach bekannten Sätzen:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1},$$

und es handelt sich bloss um die Bestimmung von $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}$. Nun folgt aber, unter den so eben gemachten Voraussetzungen aus (1)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1},$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3}\frac{\partial \alpha_3}{\partial \alpha_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1};$$

aus welchen Gleichungen sich ergiebt

$$\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1} = -\frac{M_1}{N_1}.$$

Beachtet man aber das, was in Klügels Wörterbuche, Supplemente, Art. Elimination, hinsichtlich der Bestimmung einer Grösse aus n linearen Gleichungen gesagt ist, so wird man leicht einsehen, dass N_1 der gemeinschaftliche Nenner ist, der den Grössen $k_1, k_2, \ldots k_n$ zukommt, wenn sie aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} k_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} k_3 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_2} k_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_3} k_3 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha_n} k_n = 1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2} k_2 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3} k_3 + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1:$$

Digitized by Google

während M_1 der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $k_1, \dots k_n$ sein würde, wenn sie bestimmt würden aus:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1. \end{array}\right\} \quad (2)$$

Demnach hat man

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial x_2 \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n S}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \times \left(-\frac{M_1}{N_1}\right) = -\frac{M_1 U}{N_1}. \quad (3)$$

In dieser Gleichung muss man in $-\frac{M_1 U}{N_1}$ sich x_1 durch $\alpha_1, \dots \alpha_n$, und sodann $\alpha_2, \dots \alpha_n$ durch $\alpha_1, x_2, \dots x_n$ ausgedrückt denken, was durch die Gleichungen (1) ermöglicht ist. Sonach enthält die Grösse $-\frac{M_1 U}{N_1}$ jetzt die n unabhängigen Veränderlichen $\alpha_1, x_2, x_3, \dots x_n$.

Nun ist

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = \frac{\partial}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial^{n-1} S}{\partial \alpha_1 \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2},$$

wenn

$$\frac{\partial^{n-1} S}{\partial \alpha_1 \partial x_3 \dots \partial x_n} = V_1 = \int -\frac{M_1 U}{N_1} \partial x_2$$

gesetzt wird.

Jetzt hat man also bloss x_2 als veränderlich anzusehen, während $\alpha_1, x_3, \dots x_n$ als konstant zu betrachten sind. Demnach enthalten die Gleichungen (1) jetzt die $n+1$ Veränderlichen $x_1, x_2, \alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ und man kann n derselben als Funktionen einer von ihnen, z. B. α_2, betrachten. Daher ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial V_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2}.$$

Durch die gleichen Betrachtungen, wie so eben, ergiebt sich:

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_2} = -\frac{M_2}{N_2},$$

worin N_2 der gemeinschaftliche Nenner der Grössen $k_1, \dots k_n$ ist, wenn sie bestimmt werden aus:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} k_3 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_4} k_4 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1, \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} k_2 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3} k_3 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_4} k_4 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1; \end{array}$$

Digitized by Google

M_2 die analoge Grösse, bestimmt aus:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_2} k_2 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_3} k_3 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} k_n = 1,$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_2} k_2 + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_3} k_3 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial \alpha_n} k_n = 1.$$

Daraus folgt zunächst offenbar

$$M_2 = N_1,$$

und sodann

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \, \partial \alpha_2 \, \partial x_3 \dots \partial x_n} = \frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \, \partial x_2 \, \partial x_3 \dots \partial x_n} \cdot \left(-\frac{M_2}{N_2}\right)$$
$$= (-1)^2 . \frac{M_1}{N_1} \frac{M_2}{N_2} U = (-1)^2 \frac{M_1}{N_2} U,$$

in welcher Gleichung x_1, x_2 durch α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_n$ und sodann $\alpha_3, \dots \alpha_n$ durch α_1, α_2, $x_3, \dots x_n$ ausgedrückt gedacht werden müssen.

Wie man so weiter gehen kann, liegt klar vor, dessgleichen auch, dass immer ein Faktor des Zählers und Nenners sich aufheben; so dass man endlich erhält:

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \, \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_n} = (-1)^n \frac{M_1}{N_n} U, \tag{4}$$

in welcher Gleichung x_1, $x_2, \dots x_n$ durch α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_n$ auszudrücken sind. Zugleich ist N_n der gemeinschaftliche Nenner von $k_1, \dots k_n$, bestimmt aus:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f_1}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} k_n = 1, \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} k_n = 1, \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f_n}{\partial x_1} k_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} k_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} k_n = 1. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist demnach

$$\frac{\partial^n S}{\partial x_1 \, \partial x_2 \dots \partial x_n} = U, \tag{6}$$

wo U eine bekannte Funktion von x_1, $x_2, \dots x_n$ ist, so ist

$$\frac{\partial^n S}{\partial \alpha_1 \, \partial \alpha_2 \dots \partial \alpha_n} = (-1)^n \frac{M}{N} U, \tag{7}$$

wenn α_1, $\alpha_2, \dots \alpha_n$ neue unabhängige Veränderliche sind, die mit den ersten durch die Gleichungen (1) verbunden sind; wenn fer-

ner M, N die gemeinschaftlichen Nenner der Werthe von $k_1, \ldots k_n$ sind, wenn diese resp. aus den Gleichungen (2) und (5) bestimmt werden, und wenn man endlich in der zweiten Seite der Gleichung (7) die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ausdrückt.

Unter gleichen Voraussetzungen folgt aus (6) und (7):

$$\iiint \cdots \int U \partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n = (-1)^n \iiint \cdots \int \frac{MU}{N} \partial \alpha_1 \partial \alpha_2 \ldots \partial \alpha_n. \quad (8)$$

Die Gränzen der Integrale nach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ bestimmen sich nach denen der Integrale nach $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Hätten die Gleichungen (1) die Form:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ \vdots \\ x_n = f_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n); \end{array}\right\} \quad (9)$$

so wäre offenbar $N=1$ in (7) und (8).

Es liegt nicht in unserer Absicht, Anwendungen des aufgestellten Satzes hier zu machen; dieselben sind ohnehin äusserst zahlreich. Wir wollten nur versuchen, den Satz selbst strenge zu begründen, da er höchst wichtig ist, und seine Begründung z. B. in den uns vorliegenden Vorlesungen von Moigno nicht über allen Einwürfen zu stehen scheint. Nur eine einzige Anwendung wollen wir auf die Umbildung des Integrals

$$\iiint \partial x \, \partial y \, \partial z,$$

das bekanntlich einen körperlichen Rauminhalt ausdrückt, machen, wenn x, y, z durch die Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi\cos\psi, \quad z = r\sin\varphi\sin\psi$$

ausgedrückt werden. Hier ist $\alpha_1 = r$, $\alpha_2 = \varphi$, $\alpha_3 = \psi$; also sind die Gleichungen (2):

$$\begin{array}{l} \cos\varphi \,.\, k_1 - r\sin\varphi \,.\, k_2 = 1, \\ \sin\varphi\cos\psi \,.\, k_1 + r\cos\varphi\cos\psi \,.\, k_2 - r\sin\varphi\sin\psi \,.\, k_3 = 1, \\ \sin\varphi\sin\psi \,.\, k_1 + r\cos\varphi\sin\psi \,.\, k_2 + r\sin\varphi\cos\psi \,.\, k_3 = 1; \end{array}$$

woraus $M = r^2 \sin\varphi$ folgt; da $N=1$ ist, so ist also:

$$\iiint \partial x \, \partial y \, \partial z = \iiint r^2 \sin\varphi \, \partial r \, \partial\varphi \, \partial\psi,$$

$$\iiint F(x, y, z) \, \partial x \, \partial y \, \partial z$$

$$= \iiint F(r\cos\varphi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\sin\psi) \, r^2 \sin\varphi \partial r \, \partial\varphi \, \partial\psi,$$

wie bekannt.

Digitized by Google

XLI.

Ueber die Bedingungen, welche $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ erfüllen müssen, damit $\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=F(x+iy)$.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Sei $f(x,y)$ eine Funktion der beiden Grössen x, y, die wir als von einander unabhängig betrachten wollen, welche der Bedingung

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

identisch entspricht, so ist

$$f(x,y)=F(x+y),$$

ein Satz, der an und für sich klar ist.

Seien nun U, V zwei Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, welche identisch folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad (1)$$

so ist

$$U+iV=F(x+iy).$$

Denn es ist immer

$$U+iV=\varphi(x,y),$$

also

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit i, subtrahirt sodann die zweite und beachtet die Gleichungen (1), so ergiebt sich:

$$i\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial .(iy)};$$

woraus folgt:

$$\varphi=F(x+iy),$$

also:

$$U+iV=F(x+iy). \tag{2}$$

Umgekehrt aber auch, wenn die Gleichung (2) Statt hat, so findet auch (1) Statt. Denn aus (2) folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial V}{\partial x}=F'(x+iy),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y}=iF'(x+iy).$$

Demnach:

$$i\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}+i\frac{\partial V}{\partial y},$$

welche Gleichung die (1) nach sich zieht.

Man hat also folgenden Satz:

„Damit

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=F(x+iy),$$

ist nothwendig und hinreichend, dass identisch:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(x\,,\,y)}{\partial x}&=\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial y},\\ \frac{\partial\psi(x\,,\,y)}{\partial x}&=-\frac{\partial\varphi(x\,,\,y)}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Und umgekehrt, wenn

$$F(x+iy)=\varphi(x,y)+i\psi(x,y),$$

so finden die Gleichungen (3) Statt.“

Digitized by Google

XLII.

Ueber einige arithmetische Sätze.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Dividirt man eine ganze positive Zahl m durch eine andere n, so sind der dabei herauskommende ganze Quotient (die grösste unter $\frac{m}{n}$ liegende ganze Zahl) und der Rest offenbar Funktionen von m und n. Die Form der letzteren war bisher nicht bekannt, und erst Herr Dr. Eisenstein hat dieselbe angegeben. Der genannte scharfsinnige Mathematiker stellt nämlich im 27sten Bande des Crelle'schen Journales S. 281. u. A. folgende Theoreme auf: für $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$ ist

$$q=\frac{m}{n}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

$$r=\tfrac{1}{2}[n-\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}];$$

wobei sich beide Summenzeichen auf die Werthe $k=1, 2, 3, \ldots, n-1$ beziehen. Da aber kein Beweis zu den obigen Formeln gegeben worden ist, so halte ich es nicht für überflüssig, einen solchen mitzutheilen, der noch ausserdem die Eigenthümlichkeit besitzt, eine Anwendung der Integralrechnung auf höhere Arithmetik darzubieten *).

Setzt man in dem bekannten Integrale

$$\int_0^\infty \frac{z^{\mu-1}\partial z}{1-z}=\pi\cot\mu\pi,\ 1>\mu>0;$$

---

*) Diess ist übrigens nichts Neues, denn schon bereits seit längerer Zeit hat Herr Prof. Lejeune-Dirichlet dergleichen Anwendungen gezeigt, die, wie alle Arbeiten dieses Geometers, eine bewundernswerthe Feinheit beurkunden.

Digitized by Google

wovon sich ein strenger Beweis in Thl. II. S. 299. und Thl. III. S. 283. findet, $z=x^n$ und $\mu=\frac{k}{n}$, so wird für $k<n$

$$\int_0^\infty \frac{x^{k-1}dx}{1-x^n}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

und nach beiderseitiger Multiplikation mit

$$\frac{1}{2\pi}\sin\frac{2km\pi}{n}$$

erhält man hieraus

$$\frac{1}{2n}\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{dx}{1-x^n}x^{k-1}\sin\frac{2km\pi}{n}.$$

Für $k=1, 2, 3, \ldots. n-1$ und durch Summirung aller so entstehenden Gleichungen findet man noch

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{1-x^n}X,$$

wobei X die Summe der Reihe

$$\sin\frac{2m\pi}{n}+x\sin\frac{4m\pi}{n}+x^2\sin\frac{6m\pi}{n}+\ldots.+x^{n-2}\sin\frac{(2n-2)m\pi}{n}$$

bezeichnet. Diese Summe ist aber leicht zu finden. Denn setzt man in der Gleichung

$$\frac{1-u^n}{1-u}=1+u+u^2+\ldots.+u^{n-1}$$

$u=\varrho(\cos\omega+\sqrt{-1}\sin\omega)$, so findet man durch Vergleichung der imaginären Partieen

$$\varrho\sin\omega+\varrho^2\sin2\omega+\varrho^3\sin3\omega+\ldots.+\varrho^{n-1}\sin(n-1)\omega$$
$$=\frac{\varrho\sin\omega}{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}+\frac{\varrho\sin(n-1)\omega-\sin n\omega}{1-2\varrho\cos\omega+\varrho^2}\varrho^n,$$

und für $\varrho=x$, $\omega=\frac{2m\pi}{n}$ ergiebt sich hieraus nach Division mit x und unter der Bemerkung, dass $\sin(n-1)\frac{2m\pi}{n}=-\sin\frac{2m\pi}{n}$ ist,

$$X=\frac{1-x^n}{1-2x\cos\frac{2m\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2m\pi}{n};$$

und mithin wird nach dem Vorigen

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2m\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2m\pi}{n}.$$

Bevor wir weiter gehen, sind noch einige Bemerkungen nöthig, welche zeigen, dass das Integral auf der rechten Seite verschiedene Formen annehmen kann. Da aus $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$ folgt $\frac{2m\pi}{n}=2q\pi+\frac{2r\pi}{n}$, und q immer eine ganze Zahl ist, so kann man die vorige Gleichung zunächst in folgender Gestalt darstellen:

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2r\pi}{n}.$$

Da ferner $r<n$, so ist $2r<2n$, und mithin $\frac{2r\pi}{n}<2\pi$; es sind daher hinsichtlich des Bogens $\frac{2r\pi}{n}$ vier Fälle möglich, jenachdem derselbe im ersten, zweiten, dritten oder vierten Quadranten liegt. Diesen vier Fällen entsprechen die vier Suppositionen

$$\frac{2r\pi}{n}=\varphi_1,\ \pi-\varphi_2,\ \pi+\varphi_3,\ 2\pi-\varphi_4;$$

wo jeder der vier Bögen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthalten ist. Das Integral

$$R=\int_0^\infty\frac{dx}{1-2x\cos\frac{2r\pi}{n}+x^2}\sin\frac{2r\pi}{n}$$

nimmt demgemäss die vier Formen

$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_1 dx}{1-2x\cos\varphi_1+x^2},$$
$$\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_2 dx}{1+2x\cos\varphi_2+x^2},$$
$$-\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_3 dx}{1+2x\cos\varphi_3+x^2},$$
$$-\int_0^\infty\frac{\sin\varphi_4 dx}{1-2x\cos\varphi_4+x^2}$$

an. Nun ist überhaupt

$$\int\frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2}=\operatorname{Arctan}\frac{x-\cos\varphi}{\sin\varphi}+\text{Const},$$

folglich

Digitized by Google

$$\int_0^x \frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2}=\text{Arctan}\,x+\text{Arctan}\cot\varphi$$
$$=\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\tan\varphi\right),$$

und da für $\frac{\pi}{2}>\varphi>0$, $\text{Arctantan}\,\varphi=\varphi$ ist *):

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi dx}{1-2x\cos\varphi+x^2}=\pi-\varphi,$$

und ebenso leicht findet man

$$\int_0^\infty \frac{\sin\varphi dx}{1+2x\cos\varphi+x^2}=\varphi.$$

Benutzt man diess für die verschiedenen Formen von R, so erhält dieses Integral die vier Formen

$$R=\pi-\varphi_1,\ \varphi_2,\ -\varphi_3,\ -\pi+\varphi_4.$$

Nun war aber im ersten Falle $\varphi_1=\frac{2r\pi}{n}$, im zweiten $\varphi_2=\pi-\frac{2r\pi}{n}$, im dritten $\varphi_3=\frac{2r\pi}{n}-\pi$ und im vierten $\varphi_4=2\pi-\frac{2r\pi}{n}$, und wenn man diese Werthe substituirt, so vereinigen sich die verschiedenen Formen von R zu der einzigen

$$R=\pi-\frac{2r\pi}{n},$$

und vermöge der Rolle, die das Integral R früher spielte, ist jetzt

$$\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}=\tfrac{1}{2}-\frac{r}{n}.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$r=\tfrac{1}{2}[n-\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n}],$$

---

*) Dass die Funktionen $\text{Arctantan}\,\varphi$ und φ nur für $\frac{\pi}{2}>\varphi>0$ aber sonst nicht identisch sind, ist leicht zu sehen. So ist z. B.

$$\text{Arctantan}(\pi+\varphi)=\text{Arctan}(-\tan\varphi)$$
$$=-\text{Arctan}\,\varphi=-\varphi,$$

und diess ist nicht einerlei mit $\pi+\varphi$. Um daher den Satz $\text{Arctantan}\,\varphi=\varphi$ anwenden zu können, muss man sich erst versichern, dass φ im ersten Quadranten liegt, und diese Nothwendigkeit führte oben die Unterscheidung der vier Fälle hinsichtlich $\frac{2r\pi}{n}$ herbei.

Digitized by Google

d. h. das zweite Theorem von **Eisenstein**; aus der Bemerkung, dass $\frac{m}{n}=q+\frac{r}{n}$, also $q=\frac{m}{n}-\frac{r}{n}$ war, ergiebt sich nun auch das erste:

$$q=\frac{m}{n}-\tfrac{1}{2}+\frac{1}{2n}\Sigma\sin\frac{2km\pi}{n}\cot\frac{k\pi}{n},$$

wobei immer $k=1,2,3,\ldots.n-1$ ist.

XLIII.

Bemerkungen über die niedere Feldmesskunst, insbesondere über den allgemeineren Gebrauch des Rückwärtseinschneidens.

Von dem
Herrn Vermessungs-Revisor **Nernst**
zu Bessin auf der Insel Rügen.

Es ist, bei Detail-Vermessungen, die Lage eines durch Rückwärts-Einschneiden gefundenen Punktes leichter, schneller und sicherer zu cartiren, als ein auf irgend eine andere Weise im Freien bestimmter Punkt.

Bei Detail-Vermessungen ist es an sich schon vortheilhaft und zweckmässig, auch im nördlichen Deutschland wohl fast ohne Ausnahme ausführbar, durch die ganze aufzunehmende Flur wenigstens eine Hauptlinie zu legen. Man bezeichne darin alle 100, oder, wenn ein sehr zerschnittenes Terrain vorliegt, alle 50 Ruthen durch ein Signal, A, B, C, u. s. w. Auf dem Papier trage man die Hauptlinie auch auf und errichte in jedem Signalpunkte darauf genau eine Senkrechte.

Wenn man nun einen Punkt x (Taf. V. Fig. 2.) im Freien durch die möglichst kleinste Mühwaltung, nämlich durch Messung der beiden Winkel α und β, bei nur einmaliger Aufstellung des Instrumentes, also durch Rückwärtseinschneiden, bestimmt hat, so kann man auch auf dem Papier durch die denkbar einfachste Ver-

richtung die Lage des Punktes genau finden, und zwar **durch nur zwei Abmessungen mit dem Zirkel.** Nach dem Maassstabe, der der neuen Carte zum Grunde gelegt werden soll, und wonach hier AB und BC 100 Ruthen Entfernung haben, braucht man nur $CC'' = \text{cotg}\,\beta$ und $AA' = \text{cotg}\,\alpha$ zu machen, an $A'C''$ ein Lineal zu legen, daran ein rechtwinkliges Dreieck, und dasselbe so weit hinzuschieben, dass die Schärfe desselben durch B geht, so ist x der gesuchte Punkt.

Für die Cotangenten sind aber bekanntlich schon gute Tabellen vorhanden, man braucht nur die Decimalstellen derselben entsprechend zu ändern.

Hält man den Gebrauch eines guten rechtwinkligen Dreiecks hier für noch nicht delicat genug, so braucht man nur auf dem Papiere ein für allemal eine Parallele mit AC, in dem Abstande gleich AC zu ziehen, und dann jedesmal $DE = CC' - AA'$ zu machen; es geht dann BxE rechtwinklig durch die Linie $A'xC'$ und der Punkt x ist durch **zwei rechtwinklig sich schneidende Linien** bestimmt.

Es giebt noch mehrere elegante, bisher noch nicht bekannt gewesene Constructionen des Punktes x. Taf. V. Fig. 3. enthält die Andeutung einer Construction, wobei zugleich Controle der Richtigkeit der Construction gegeben ist, in so fern der Punkt x durch **drei** sich schneidende Linien auf dem Papier gefunden wird. Die Leser dieses Archives erlassen mir gewiss gern den Beweis dieser an sich so sehr nahe liegenden Sätze.

Es ist für die Entwickelung der höheren Vermessungskunst gewiss schon vieles geleistet, verhältnissmässig weniger, scheint es, für die niedere. Diese berührt aber vielfach das innerste Leben des wichtigsten aller Gewerbe: der Landwirthschaft. Nach unserer, auf viele Erfahrung gestützten Ansicht muss die Praxis der niederen Feldmesskunst hiernach eine andere Gestalt gewinnen, da die so schöne Operation des Rückwärtseinschneidens eine bei weitem grössere, ja vielleicht eine ausschliessende Anwendung erlangen dürfte, auch besonders auf die Bestimmung der näheren Punkte des Details ganz allgemein würde ausgedehnt werden können. Bei Landesvermessungen ist es im Grunde so wesentlich nicht, wie viel Stunden die Bestimmung eines Punktes kostet. Bei der Aufnahme von Feldmarken aber, gegen die Remuneration von $1\frac{1}{3}$ Sgr. pro Morgen, wobei Tausende von Punkten festgelegt werden, die das Mein und Dein für die Zukunft documentiren sollen, ist die Ersparung von Zeit und Kraft von grösserer Wichtigkeit, um so mehr, als das, was durch die Methode gewonnen wird, wieder zur Erreichung einer grösseren Genauigkeit und Sicherheit durch bessere Instrumente u. s. w. verwendet werden kann. Bei der Aufnahme sehr vieler, sich auch nahe liegender Punkte wird sich übrigens der Gebrauch guter Sextanten hier empfehlen.

Dass es nicht nöthig ist, dass die Signale in der Hauptlinie, wonach man rückwärts einschneidet, gleich weit und 100 Ruthen von einander entfernt sind, erhellet leicht; man muss es nur so und kann es leicht so einrichten, dass man doch durch die Multiplication **mit nur einer Ziffer** die Länge der entsprechenden

Digitized by Google

Senkrechten findet. Lägen z. B. A, B, C, D, E und F in einer geraden Linie, wären 100 Ruthen von einander entfernt, und man könnte in irgend einem zu bestimmenden Punkte etwa B, D und E nicht sehen, so wären die entsprechenden Senkrechten für $A = 2.100 \cot g\,\alpha$ und für $F = 3.100 \cot g\,\beta$ lang.

Auch in grösserer Allgemeinheit, wenn A, B und C nicht in gerader Linie liegen und ungleich weit von einander entfernt sind, *aber wenn nur recht viele* Punkte cartirt und nicht mit Zahlen, sondern durch Zeichnung auf dem Papiere hergestellt werden sollen, ist die Methode von ausnehmender Wichtigkeit. Denn, wenn nämlich die Lage dreier Kirchthürme durch höhere Landvermessung gefunden wäre, und es sollte möglichst schnell und genau die ganze, vielleicht meilenweite Umgegend aufgenommen werden, so verlohnt es sich der Mühe von den Entfernungen AB, BC und AC tausendtheilige Maassstäbe zu entwerfen, wonach und womit man dann die vorhandenen Cotangenten-Tabellen auch hier ohne weiteres, ganz analog den beiden obigen Fällen, anwenden kann.

Von praktischer Wichtigkeit ist bei Detail-Vermessungen, dass man in der Ferne, nämlich von den aufzunehmenden Punkten aus, die Nummer oder die Identität der Signale A, B, C u. s. w. in der Hauptlinie genau erkennen kann. Man befestige also z. B. auf den Signalen kleine roth und weisse Flaggen, binde bei den ungeraden Nummern, also bei A, C, E u. s. w. das Rothe, bei den geraden das Weisse oben, und markire dann ausserdem noch nebenbei die je dritten Signale durch ein zweites Zeichen, z. B. ein Strohbündel, so kann man nie darin irren und also richtig die Signale wählen, welche die günstigsten Winkel gewähren. Bei Vernachlässigung der rechten Handgriffe ist schon oft eine gute Methode verkannt worden. Winkel unter 20° müssen bei genauen Detail-Vermessungen am besten ein für allemal ausgeschlossen werden, man kann sie auch sehr gut entbehren.

Nachschrift des Herausgebers.

Wenn auch die obigen Bemerkungen, was vielleicht mancher Leser vermissen wird, und wie man allerdings auch, wenn vorzugsweise von der niedern Feldmesskunst die Rede ist, wohl erwarten dürfte, keine rein-geometrische Auflösung der sogenannten Pothenot'schen Aufgabe über das Rückwärtseinschneiden durch blosse Construction (also namentlich auch ohne unmittelbaren Gebrauch des sogenannten verjüngten oder tausendtheiligen Maassstabes) enthalten, so verdienen dieselben doch gewiss alle Beachtung und weitere sorgfältige Prüfung, weil sie von einem Manne herrühren, welcher mit langjähriger vielfacher und höchst vielseitiger praktischer Erfahrung, namentlich auch im Bereiche der niedern Feldmesskunst, anerkannt sehr tüchtige theoretische mathematische Kenntnisse verbindet. Ich möchte daher wohl wünschen, dass die im Obigen niedergelegten Bemerkungen, namentlich von solchen, die ihrem Berufe nach sich viel mit der Ausführung praktischer Arbeiten zu beschäftigen haben, sorgfältig geprüft werden möchten, indem ich überzeugt bin, dass namentlich die bisher grösstentheils höchst handwerksmässig betriebene, und zum Theil noch ganz auf dem Standpunkte der

Digitized by Google

für ihre Zeit übrigens gar nicht zu verachtenden alten deutschen Feldmesser Schwenter, Penther, Zollmann u. s. w. stehende niedere Feldmesskunst noch mancher Vervollkommnungen nicht bloss bedarf, sondern auch fähig ist. Uebrigens halte ich mich für verpflichtet, zu bemerken, dass dieser Aufsatz schon seit dem 24. März d. J. in meinen Händen ist, und nur zufällige Umstände seinen Abdruck bis jetzt verzögert haben.

XLIV.

Untersuchungen über die Seiten und Winkel sphärischer Dreiecke, insbesondere in Bezug auf ihre Differentiale.

Dargestellt von dem

Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,

astronomischem Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

§. 1. In jedem sphärischen Dreiecke ABC (Taf. V. Fig. 4.) hat man bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\text{II)}\quad \sin a \sin B = \sin b \sin A,$$

$$^{*})\quad \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A,$$

$$\text{III)}\quad \sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A,$$

$$^{**})\quad \sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a,$$

$$\text{IV)}\quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Die Gleichung (I) dient dazu, um die dritte Seite zu bestimmen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Sie ist symmetrisch und lässt sich sogleich dreifach hinschreiben, je nachdem man a, b oder c als die gesuchte Seite ansieht. Die Gleichung (II) dient dazu, um entweder eine Seite zu bestimmen, wenn eine zweite und zwei Winkel, oder einen Winkel, wenn zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind. Hierbei sollen aber im ersten Falle die gegebenen Winkel nicht an der Seite liegen und im zweiten die Seiten den gegebenen Winkel nicht einschliessen. Mit andern Worten, es sollen die zwei Seiten und Winkel einander gegenüberliegen. Die Form dieser Gleichung ist zwar

Digitized by Google

sehr einfach, aber keinesweges symmetrisch in Bezug auf eine der darin enthaltenen vier Grössen, und sie lässt sich dreifach hinschreiben. Die Gleichung (*) und die Gleichung (**) ist nicht geeignet, um für sich betrachtet aus drei gegebenen Grössen eine vierte abzuleiten, indem in jeder fünf Stücke des Dreiecks enthalten sind. Beide Formeln, von denen sich jede sechsfach hinschreiben lässt, dienen aber sowohl zu manchen analytischen Umformungen, als auch im Verein mit den Gleichungen, welche wir mit Zahlen bezeichnet haben, um zwei gesuchte Stücke des Dreiecks auf einmal zu bestimmen.

Die Gleichung (III) lässt sich sechsfach hinschreiben und kann dazu dienen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel (b, c und A) gegeben sind, einen der beiden andern Winkel zu bestimmen. Sie ist ebenfalls nicht symmetrisch, weder in Bezug auf eine Seite, noch auf einen Winkel. Die Gleichung (IV) ist wieder symmetrisch in Bezug auf einen Winkel, und sie dient dazu, den dritten Winkel zu bestimmen, wenn die gegenüberliegende Seite nebst den beiden andern Winkeln gegeben sind. Diese Betrachtungen haben wir vorangeschickt, um uns darauf beziehen zu können, unsere Aufgabe soll aber nicht sein, aus drei gegebenen Stücken des Dreiecks die andern herzuleiten, sondern vielmehr die Differentiale der sechs Grössen mit einander zu vergleichen.

§. 2. Die Gleichung (I) ist symmetrisch in Bezug auf a, daher wird auch das Differential von a symmetrisch ausfallen. Differentiiren wir diese Gleichung, so erhalten wir unmittelbar

$$\alpha)\quad \sin a da = [\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A]\, db$$
$$+ [\sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A]\, dc + \sin b \sin c \sin A dA;$$

also mit Benutzung von (*) und (II):

$$1)\quad da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA.$$

Diese Gleichung ist durchaus symmetrisch, da sie unverändert bleibt, wenn man b mit c und also auch B mit C vertauscht, und $\sin c \sin B = \sin b \sin C$ ist. Die Gleichung (I) wird sich daher auch sogleich dreifach hinschreiben lassen, je nachdem man da, db oder dc als unbekannt, oder vielmehr a, b oder c als abhängig veränderlich ansieht. Das zweite Differential von a wird ebenfalls durch einen symmetrischen Ausdruck dargestellt werden können. Differentiiren wir daher die Gleichung (α) noch einmal, so erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned}\beta)\quad \sin a dda + \cos a da^2 = {} & [\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A]\, db^2 \\ & + [\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A]\, dc^2 \\ & - 2[\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A]\, db dc \\ & + 2 \sin b \sin c \cos A dA db \\ & + 2 \sin b \cos c \sin A dA dc \\ & + \sin b \sin c \cos A dA^2,\end{aligned}$$

und da nach (I)

Digitized by Google

$$\cos a da^2 = \cos a \cos C^2 db^2 + \cos a \cos B^2 dc^2 + 2\cos a \cos B \cos C db dc$$
$$+ 2\cos a \sin B \cos C \sin c dA db + 2\cos a \sin c \sin B \cos B dA dc$$
$$+ \cos a \sin c^2 \sin B^2 dA^2,$$

mit Hülfe der Gleichung (I)

$$\gamma)\ \sin a dda = \cos a \sin C^2 db^2 + \cos a \sin B^2 dc^2$$
$$- 2[\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A + \cos a \cos B \cos C] db dc$$
$$+ 2\sin c [\cos b \sin A - \cos a \sin B \cos C] dA db$$
$$+ 2[\sin b \cos c \sin A - \cos a \sin c \sin B \cos B] dA dc$$
$$+ \sin c [\sin b \cos A - \cos a \sin c \sin B^2] dA^2.$$

Aber nach (I)

$$\sin b \sin c + \cos b \cos c \cos A + \cos a \cos B \cos C$$
$$= \sin b \sin c + \cos a \cos A - \sin b \sin c \cos A^2 + \cos a \cos B \cos C$$
$$= \sin b \sin c \sin A^2 + \cos a^2 \sin B \sin C \quad \text{(IV)}$$
$$= \sin B \sin C \sin a^2 + \cos a^2 \sin B \sin C \quad \text{(II)}$$
$$= \sin B \sin C.$$

Ferner

$$\cos b \sin A - \cos a \sin B \cos C = \cos B \sin C \quad (^{**}),$$
$$\sin b \cos c \sin A - \cos a \sin c \sin B \cos B$$
$$= \sin B \sin a \cos c - \cos a \sin c \sin B \cos B \quad \text{(II)}$$
$$= \sin b \sin B \cos C. \quad (^{*})$$

Endlich

$$\sin b \cos A - \cos a \sin c \sin B^2 = \sin b \cos A - \sin b \sin C \cos a \sin B \ \text{(II)}$$
$$= -\sin b \cos B \cos C. \quad \text{(IV)}$$

Substituirt man die eben gefundenen Werthe in die Gleichung (γ) und dividirt hierauf mit $\sin a$; so erhält man

$$2)\quad dda = \sin C^2 \operatorname{cotg} a db^2 + \sin B^2 \operatorname{cotg} a dc^2 - \frac{2\sin B \sin C}{\sin a} db dc$$
$$+ 2\sin A \cos B dA db + 2\sin A \cos C dA dc - \frac{\sin b \sin c \cos B \cos C}{\sin a} dA^2.$$

§. 3. Um die Gleichung (II) bequemer zu differentiiren, nehmen wir die Logarithmen beider Glieder, setzen also

$$\log\sin a + \log\sin B = \log\sin b + \log\sin A,$$

woraus unmittelbar durch Differentiation folgt:

$$3)\quad \operatorname{cotg} a da + \operatorname{cotg} B dB = \operatorname{cotg} b db + \operatorname{cotg} A dA.$$

Digitized by Google

Es ist gleichgültig, in Bezug auf welche der beiden Seiten oder Winkel man diese Gleichung auflösen will; das Resultat fällt nicht symmetrisch aus. Wir stellen daher auch nicht die Differentialgleichung zweiter Ordnung dar, theils weil nicht hervorgeht, welche drei Grössen man als urvariabel ansehen soll, theils weil das Differential zweiter Ordnung von einer Seite oder einem Winkel sich nur durch einen weitläufigen Ausdruck darstellen lässt. Um hiervon eine Andeutung zu geben, bemerken wir, dass z. B.

$$4)\; dda = \frac{\cos b^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin b^2} db^2 + \frac{\cos A^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin A^2} dA^2 - \frac{\cos B^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin B^2} dB^2$$

$$+ \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} A}{\cos a^2} db dA - \frac{2 \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} db dB - \frac{2 \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} B}{\cos a^2} dA dB$$

folgt.

§. 4. Wir gehen nun zur Gleichung (III) über, haben also

$$\sin A \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A$$

zu differentiiren, und erhalten unmittelbar

$$\cos A \operatorname{cotg} B dA - \frac{\sin A}{\sin B^2} dB = -\frac{\sin c}{\sin b^2} db + \operatorname{cotg} b \cos c dc$$

$$+ \sin c \cos A dc + \cos c \sin A dA$$

oder

$$\delta)\; \frac{\sin A}{\sin B^2} dB = \frac{\cos A \cos B - \cos c \sin A \sin B}{\sin B} dA + \frac{\sin c}{\sin b^2} db$$

$$- \frac{\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A}{\sin b} dc.$$

Da aber

$$\frac{\sin A}{\sin B^2} = \frac{\sin a}{\sin b \sin B} \text{ und } \frac{\sin c}{\sin b^2} = \frac{\sin C}{\sin b \sin B} \;\text{(II)},$$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c = -\cos C \;\text{(IV)}$$

und

$$\cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A = \cos a \;\text{(I)};$$

so erhalten wir:

$$5)\; \sin a dB = \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA.$$

Diese Differentialgleichung erster Ordnung habe ich gar nicht allgemein weiter differentiirt, unten werden wir aber bei einem Beispiele Gelegenheit erhalten, das Differential zweiter Ordnung einer bestimmten Seite herzuleiten.

Digitized by Google

§. 5. Differentiiren wir die Gleichung (IV)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

so erhalten wir unmittelbar

$$\varepsilon)\quad \sin A dA = -[\sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a]\, dB$$
$$-[\cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a]\, dC + \sin B \sin C \sin a da,$$

also mit Benutzung der Gleichungen (**) und (II)

$$6)\quad dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da.$$

Da $\sin b \sin C = \sin c \sin B$ ist, so kann man b mit c und B mit C vertauschen, ohne dass die Gleichung eine andere wird. Um nun das zweite Differential von A, in Bezug auf B, C und a als Urvariabele zu erhalten, differentiiren wir die Gleichung (ε) noch einmal und erhalten so unmittelbar

$$\zeta)\quad \sin A ddA + \cos A dA^2 = -[\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a]\, dB^2$$
$$-[\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a]\, dC^2$$
$$+2[\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a]\, dB dC$$
$$+2 \cos B \sin C \sin a dB da$$
$$+2 \sin B \cos C \sin a dC da$$
$$+\sin B \sin C \cos a da^2.$$

Da aber nach (6)

$$\cos A dA^2 = \cos A \cos c^2 dB^2 + \cos A \cos b^2 dC^2$$
$$+2 \cos A \cos b \cos c dB dC$$
$$-2 \cos A \cos c \sin b \sin C dB da$$
$$-2 \cos A \cos b \sin b \sin C dC da$$
$$+\cos A \sin b^2 \sin C^2 da^2;$$

so erhalten wir, wenn wir diesen Werth in (ζ) substituiren, weil

$$\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a + \cos A \cos c^2$$
$$= -\cos A + \cos A \cos c^2 \quad \text{(IV)} \quad = -\cos A \sin c^2,$$

$$\cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a + \cos A \cos b^2 = -\cos A \sin b^2, \quad \text{(IV)}$$
$$\sin B \sin C - \cos B \cos C \cos a - \cos A \cos b \cos c$$
$$= \sin B \sin C - \sin B \sin C \cos a^2 + \cos A \cos a - \cos A \cos b \cos c \quad \text{(IV)}$$
$$= \sin B \sin C \sin a^2 + \cos A^2 \sin b \sin c \quad \text{(I)}$$
$$= \sin b \sin c, \quad \text{(II)}$$

$$\cos B \sin C \sin a + \cos A \cos c \sin B \sin C = \sin C \cos b \sin c \quad (*)$$
$$= \sin a \sin A \cos b \quad \text{(II)}$$

Digitized by Google

$$\sin B \cos C \sin a + \cos A \cos b \sin b \sin C$$
$$= \sin B [\sin a \cos C + \sin c \cos b \cos A] \quad \text{(II)}$$
$$= \sin B \cos c \sin b \ (^*) = \sin A \cos c \sin a, \quad \text{(II)}$$

endlich

$$\sin B \sin C \cos a - \cos A \sin b^2 \sin C^2$$
$$= \sin C \sin B [\cos a - \sin b \sin c \cos A] \quad \text{(II)}$$
$$= \sin C \sin B \cos b \cos c; \quad \text{(I)}$$

$$7) \quad ddA = \operatorname{cotg} A \sin c^2 dB^2 + \operatorname{cotg} A \sin b^2 dC^2 + \frac{2 \sin b \sin c}{\sin A} dB dC$$
$$+ 2 \sin a \cos b dB da + 2 \sin a \cos c dC da + \frac{\cos b \cos c \sin B \sin C}{\sin A} da^2.$$

§. 6. Um die bisher entwickelten Differentialgleichungen bei einem Beispiele in Anwendung zu bringen, wählen wir nach dem Berliner astronomischen Jahrbuche den Saturns-Ring aus. Nach den in dem dortigen Anhang aufgeführten Angaben ist die Lage des Ringes gegen die Ekliptik gegeben. Dort ist sie nach Bessel für 1800 aufgeführt, und um sie für eine unserer Zeit näher liegende Epoche anzugeben, setzen wir für 1840:

den aufsteigenden Knoten des Saturns-Ringes auf der beweglichen Ebene der Ekliptik $= 167^\circ 24' 7'',4 + 46'',462\, t$,
Neigung gegen dieselbe $= 28^\circ 10' 30'',7 - 0'',350\, t$,
Schiefe der Ekliptik $= 23^\circ 27' 36'',5 - 0'',457\, t$;

wo t, in Jahren ausgedrückt, von 1840 an gerechnet wird. Wir wollen die Lage des Ringes gegen den Aequator bestimmen. Setzen wir in Taf. V. Fig. 5.:

$$N = 167^\circ 24' 7'',4 = a,$$
$$i = 28 \ 10 \ 30,7 = C,$$
$$\varepsilon = 23 \ 27 \ 36,5 = B;$$

so ist die Aufgabe $N' = c$, $\omega = b$ und $i' = 180^\circ - A$ durch Reihen zu bestimmen. Für $t = 0$, also 1840, erhalten wir sogleich, mittelst der in §. 1. aufgestellten Gleichungen:

$$N' = 124^\circ 52' 25'',2;$$
$$i' = \quad 7 \ 12 \ 40,2;$$
$$\omega = \quad 43 \ 46 \ \ 3,6;$$

und nach dem Taylorschen Satze für ein unbestimmtes t

$$(N') = N' + t \cdot \frac{dN'}{dt} + \tfrac{1}{2} t^2 \frac{ddN'}{dt^2},$$

Digitized by Google

$$(i') = i' + t \cdot \frac{di'}{dt} + \tfrac{1}{2}t^2 \frac{ddi'}{dt^2},$$

$$(\omega) = \omega + t \cdot \frac{d\omega}{dt} + \tfrac{1}{2}t^2 \frac{dd\omega}{dt^2}.$$

Wir müssen also die Werthe der in diesen drei Gleichungen enthaltenen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung, ausgedrückt durch $\frac{dN}{dt} = +46'',462$; $\frac{di}{dt} = -0'',350$ und $\frac{d\varepsilon}{dt} = -0'',457$, bestimmen.

§. 7. Um $\frac{dN'}{dt}$ und $\frac{d\omega}{dt}$ zu bestimmen, wenden wir die aus (III) abgeleiteten und (5) entsprechenden Gleichungen:

$$db = \frac{\sin B \cos c}{\sin A} da + \frac{\sin c}{\sin A} dB + \sin b \operatorname{cotg} A dC$$

und

$$dc = \frac{\sin C \cos b}{\sin A} da + \frac{\sin b}{\sin A} dC + \sin c \operatorname{cotg} A dB$$

an. Zur Bestimmung von $\frac{di'}{dt}$ wenden wir die aus (IV) erhaltene Gleichung (6)

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da$$

an. Da nun $A = 180^0 - i'$, so wird $dA = -di'$, $\cos A = -\cos i'$, $\sin A = \sin i'$ und $\operatorname{cotg} A = -\operatorname{cotg} i'$; also

$$\eta)\quad d\omega = \frac{\sin\varepsilon \cos N'}{\sin i'} dN + \frac{\sin N'}{\sin i'} d\varepsilon - \sin\omega \operatorname{cotg} i' di,$$

$$\theta)\quad dN' = \frac{\sin i \cos\omega}{\sin i'} dN + \frac{\sin\omega}{\sin i'} d\varepsilon - \sin N' \operatorname{cotg} i' di,$$

$$\varkappa)\quad di' = \cos N' d\varepsilon + \cos\omega di - \sin\omega \sin i dN.$$

Wendet man die Zahlenwerthe (§. 6.) an, so erhält man

$$\frac{d\omega}{dt} = -85'',327,\quad \frac{dN'}{dt} = +127'',243 \text{ und } \frac{di'}{dt} = -15'',168.$$

Um nun auch die Differentialquotienten zweiter Ordnung zu bestimmen, differentiiren wir die beiden Gleichungen (η) und (θ) noch einmal, und erhalten so:

$$\lambda)\quad dd\omega = \frac{\cos\varepsilon . \cos N'}{\sin i'} d\varepsilon dN - \frac{\sin\varepsilon \sin N'}{\sin i'} dN' dN$$
$$- \frac{\sin\varepsilon \cos N' \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' dN + \frac{\cos N'}{\sin i'} dN' d\varepsilon$$
$$- \frac{\sin N' \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' d\varepsilon - \cos\omega \operatorname{cotg} i' d\omega di + \frac{\sin\omega}{\sin i'^2} di' di,$$

Digitized by Google

$$\mu)\ ddN' = \frac{\cos i \cos \omega}{\cos i'} did N - \frac{\sin i \sin \omega}{\sin i'} d\omega dN - \frac{\sin i \cos \omega \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' dN$$
$$+ \frac{\cos \omega}{\sin i'} d\omega d\varepsilon - \frac{\sin \omega \operatorname{cotg} i'}{\sin i'} di' d\varepsilon - \cos N' \operatorname{cotg} i' dN' di$$
$$+ \frac{\sin N'}{\sin i'^2} di' di;$$

und zur Bestimmung von ddi' nach (7)

$$\nu)\ \ ddi' = \operatorname{cotg} i' \sin N'^2 d\varepsilon^2 + \operatorname{cotg} i' \sin \omega^2 di^2 - \frac{2 \sin \omega \sin N'}{\sin i'} did\varepsilon$$
$$-2 \sin N \cos \omega d\varepsilon dN - 2 \sin N \cos N' did N$$
$$- \frac{\cos \omega \cos N' \sin \varepsilon \sin i}{\sin i'} dN^2.$$

Wegen der geringen Grösse der Werthe von $d\varepsilon$ und di hat man keinesweges nöthig, die Glieder in den drei gefundenen Gleichungen zu benutzen, welche eines dieser beiden Differentiale zum Factor haben; das Endresultat wird dadurch gar nicht oder ganz unbedeutend afficirt. Ausserdem ist zu bemerken, dass man jedes Glied mit 206264″,8 dividiren muss, weil jedes die Differentialquotienten in zwei Dimensionen enthält und der eine von jedem in Theilen des Radius ausgedrückt werden muss. Wir wollen hier, der Vollständigkeit wegen, die erhaltenen Zahlenwerthe alle darstellen und erhalten daher:

$$\frac{dd\omega}{dt^2} = +0{,}00043 - 0{,}07458 - 0{,}04897 + 0{,}00128 - 0{,}00174$$
$$+ 0{,}00083 + 0{,}00113 = -0'',12162$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2} \frac{dd\omega}{dt^2} = -0'',06081;$$

$$\frac{ddN'}{dt^2} = -0{,}00040 + 0{,}05001 + 0{,}07335 + 0{,}00109 - 0{.}00146$$
$$-0{,}00098 + 0{,}00134 = +0'',12295$$
$$\text{und } \tfrac{1}{2} \frac{ddN'}{dt^2} = +0'',06148;$$

$$\frac{ddi'}{dt^2} = +0{,}00001 + 0 - 0{,}00007 + 0{,}00003 - 0{,}00002 + 0{,}00647$$
$$= +0'',00642 \text{ und } \tfrac{1}{2} \frac{ddi'}{dt^2} = +0'',00321.$$

Wir erhalten demnach nach §. 6.

$$(N') = 124^\circ 52' 25'',2 + 127'',243 . t + 0'',06148 . t^2,$$
$$(i') = \ \ 7\ 12\ \ 40,2 - \ \ 15,168 . t + \ 0,00321 . t^2,$$
$$(\omega) = \ 43\ 46\ \ \ 3,6 - \ \ 85,327 . t - \ 0,06081 . t^2.$$

Offenbar würden die zweiten Differentialquotienten fast unverän-

Digitized by Google

dert geblieben sein, wenn man in den beiden ersten Formeln nur je zwei, in der dritten nur das eine beträchtliche Glied allein berechnet hätte. Noch mehr würde eine solche Beschränkung rathsam sein, wenn man auch die dritte Potenz von t benutzen, also die Differentialquotienten dritter Ordnung berechnen wollte, was wir aber hier unterlassen. Statt dessen wollen wir im folgenden Paragraphen zeigen, wie man auch das Hauptglied der Nutation anbringen kann.

§. 8. Bezeichnet ☊ den aufsteigenden Knoten der Mondsbahn, so ist das Glied der Nutation, welches N hinzuzufügen ist, $= -16'',783 \sin ☊$ und das ε hinzuzufügende $= +8'',977 \cos ☊$. Wir haben daher, mit Bezug auf die Nutation:

$$dN' = -\frac{\sin i \cos \omega}{\sin i'} 16'',783 \sin ☊ - \sin N' \operatorname{cotg} i' \, 8'',977 \cos ☊,$$

$$di' = \cos N' . 8'',977 \cos ☊ + \sin \omega \sin i . 16'',783 \sin ☊,$$

$$d\omega = \frac{\sin N'}{\sin i'} 8'',977 \cos ☊ - \frac{\sin \varepsilon \cos N'}{\sin i'} 16,783 \sin ☊;$$

oder, wenn man mit obigen Werthen die Rechnung anstellt,

$$\xi) \quad dN' = -58'',207 \cos ☊ - 45'',589 \sin ☊$$
$$= +73'',93 \sin (☊ + 231^\circ 56',0),$$

$$\pi) \quad di' = -5,133 \cos ☊ + 5,482 \sin ☊$$
$$= -7,51 \sin (☊ + 136^\circ 53',0),$$

$$\varrho) \quad d\omega = +58,670 \cos ☊ + 30,434 \sin ☊$$
$$= +66,09 \sin (☊ + 62^\circ 35,1).$$

Diese Werthe müssen den obigen Ausdrücken für (N'), (i') und (ω) hinzugefügt werden, um auch die Nutation anzubringen.

§. 9. Zum Schluss dieser Betrachtungen stellen wir die verschiedenen Gleichungen, welche wir bisher untersucht haben, übersichtlich zusammen:

$$\text{I)} \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$da = \cos C db + \cos B dc + \sin c \sin B dA,$$

$$dda = \sin C^2 \operatorname{cotg} a db^2 + \sin B^2 \operatorname{cotg} a dc^2 - \frac{2 \sin B \sin C}{\sin a} db dc$$
$$+ 2 \sin A \cos B dA db$$
$$+ 2 \sin A \cos C dA dc - \frac{\sin b \sin c \cos B \cos C}{\sin a} dA^2.$$

II) $\sin a \sin B = \sin b \sin A$,

$$\cot g\, a da + \cot g\, B dB = \cot g\, b db + \cot g\, A dA,$$

$$dda = \frac{\cos b^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin b^2} db^2 + \frac{\cos A^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin A^2} dA^2$$
$$- \frac{\cos B^2 - \cos a^2}{\cos a^2 \sin B^2} dB^2 + \frac{2 \cot g\, b \cot g\, A}{\cos a^2} db dA$$
$$- \frac{2 \cot g\, b \cot g\, B}{\cos a^2} db dB - \frac{2 \cot g\, A \cot g\, B}{\cos a^2} dA dB.$$

*) $\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$.

III) $\sin A \cot g B = \cot g\, b \sin c - \cos c \cos A$,

$$\sin a dB = \sin C db - \cos a \sin B dc - \sin b \cos C dA.$$

**) $\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$.

IV) $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$,

$$dA = -\cos c dB - \cos b dC + \sin b \sin C da,$$

$$ddA = \cot g\, A \sin c^2 dB^2 + \cot g\, A \sin b^2 dC^2 + \frac{2 \sin b \sin c}{\sin A} dB dC$$
$$+ 2 \sin a \cos b dB da + 2 \sin a \cos c dC da$$
$$+ \frac{\cos b \cos c \sin B \sin C}{\sin A} da^2.$$

XLV.

Allgemeine Transformationsformeln für gewisse Integrale.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

In einem meiner früheren Aufsätze habe ich gezeigt, dass sich die Werthe vieler Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \varphi(x)\, dx$$

Digitized by Google

durch Zerlegung des Integrationsintervalles in andere und kleinere Intervalle bestimmen lassen, indem man setzt

$$\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \int_0^\alpha \varphi(x)\,dx + \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + \int_\beta^\gamma \varphi(x)\,dx + \ldots.$$

$$(\alpha < \beta < \gamma < \delta \ldots.)$$

und jedes einzelne Integral einer passenden Transformation unterwirft. In neuerer Zeit liess mich ein Blick auf mehrere gelegentlich entwickelte Reihensummirungen erkennen, dass sich jene Methode auf Integrale von sehr allgemeiner Form anwenden lässt und dabei zu äusserst fruchtbaren Reduktionsformeln führt, die eine Menge mehr oder weniger bekannter Resultate als ganz spezielle Fälle in sich enthalten.

Den nöthigen Apparat verschaffen wir uns auf folgende Weise. In der bekannten Gleichung

$$\left.\begin{aligned} l\sin x = lx + l(1-\frac{x}{\pi}) + l(1+\frac{x}{\pi}) \\ + l(1-\frac{x}{2\pi}) + l(1+\frac{x}{2\pi}) + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

sei $x = y + r\sqrt{-1}$; an die Stelle von $\sin x$ tritt dann

$$\frac{e^r + e^{-r}}{2}\sin y + \sqrt{-1}\,\frac{e^r - e^{-r}}{2}\cos y,$$

und wenn man jetzt die nach der Formel

$$l(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \tfrac{1}{2}l(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{-1}\,\text{Arctan}\frac{\beta}{\alpha}$$

leicht entwickelbaren imaginären Partieen von (1) mit einander vergleicht, so ergiebt sich auf der Stelle:

$$\left.\begin{aligned} \text{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}}\cot y\right) \\ = \text{Arctan}\frac{r}{y} - \text{Arctan}\frac{r}{\pi - y} + \text{Arctan}\frac{r}{\pi + y} - \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Durch Differenziation nach y findet man hieraus, wenn

$$s = \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} \qquad (3)$$

zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} \frac{s}{s^2\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{r}{r^2 + y^2} + \frac{r}{r^2 + (\pi - y)^2} \\ + \frac{r}{r^2 + (\pi + y)^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Digitized by Google

Differenzirt man dagegen die Gleichung (2) nach r und bezeichnet wie folgt:

$$s' = \frac{ds}{dr} = \left(\frac{2}{e^r + e^{-r}}\right)^2, \qquad (5)$$

so erhält man nicht minder leicht

$$\left.\begin{aligned}\frac{s'\tan y}{s^2+\tan^2 y} = \frac{y}{r^2+y^2} - \frac{\pi - y}{r^2+(\pi-y)^2} \\ + \frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2} - \dots\end{aligned}\right\} . \qquad (6)$$

Ganz ähnliche Transformationen sind auf die Gleichung

$$l\left(\frac{1+\cos x}{2}\right)$$

$$= 2l(1-\frac{x}{\pi}) + 2l(1+\frac{x}{\pi}) + 2l(1-\frac{x}{3\pi}) + 2l(1+\frac{x}{3\pi}) + \dots$$

anwendbar; für $x = y + r\sqrt{-1}$ und durch Vergleichung der imaginären Partieen beiderseits ergiebt sich nämlich

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + 2 + e^{-r}}\tan y\right)$$

$$= 2\operatorname{Arctan}\frac{r}{\pi - y} - 2\operatorname{Arctan}\frac{r}{\pi + y} + 2\operatorname{Arctan}\frac{r}{3\pi - y} - \dots$$

Addirt man diese Gleichung zu der unter No. (2) verzeichneten und wendet dabei auf der linken Seite die Formel

$$\operatorname{Arctan}\alpha + \operatorname{Arctan}\beta = \operatorname{Arctan}\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}, \; (\alpha\beta < 1)$$

an, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu der Gleichung:

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan}\left(\frac{e^r - e^{-r}}{2\sin y}\right) = \operatorname{Arctan}\frac{r}{y} + \operatorname{Arctan}\frac{r}{\pi - y} \\ - \operatorname{Arctan}\frac{r}{\pi + y} - \operatorname{Arctan}\frac{r}{2\pi - y} \\ + \operatorname{Arctan}\frac{r}{2\pi + y} + \operatorname{Arctan}\frac{r}{3\pi - y} \\ - \dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

wobei das Vorzeichen von Paar zu Paar wechselt. Setzt man zur Abkürzung

$$p = \tfrac{1}{2}(e^r - e^{-r}) \qquad (7)$$

und differenzirt jene Gleichung nach y, so wird

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}\\&=\frac{r}{r^2+y^2}-\frac{r}{r^2+(\pi-y)^2}-\frac{r}{r^2+(\pi+y)^2}\\&+\frac{r}{r^2+(2\pi-y)^2}+\frac{r}{r^2+(2\pi+y)^2}\\&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Durch Differenziation der obigen Gleichung nach r, wobei man

$$q=\tfrac{1}{2}(e^r+e^{-r})\qquad(9)$$

setzen kann, ergiebt sich dagegen nicht minder leicht:

$$\left.\begin{aligned}\frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y}&=\frac{y}{r^2+y^2}+\frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2}\\&-\frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2}-\frac{2\pi-y}{r^2+(2\pi-y)^2}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

Die so eben entwickelten Summenformeln (4), (6), (8) und (10) führen nun zu eben so viel Transformationen bestimmter Integrale. In kurzer, aber wohl genügender Andeutung ist der dazu nöthige Calcül folgender.

I. Wir betrachten zunächst das Integral

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x),$$

worin F eine ganz beliebige Funktion bezeichnet. Zerlegt man dasselbe nach dem Schema

$$\int_0^\infty X\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} X\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} X\,dx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} X\,dx+\ldots.$$

in eine unendliche Menge anderer Integrale, die sich sämmtlich auf das Integrationsintervall $\frac{\pi}{2}$ beziehen, so lässt sich leicht eine sehr fruchtbare Transformation vornehmen, welche allen jenen Integralen die gleichen Integrationsgränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschafft. Man setze nämlich im ersten Integrale $x=y$, im zweiten $x=\pi-y$, im dritten $x=\pi+y$, im vierten $x=2\pi-y$ u. s. f., so erhält man ohne alle Schwierigkeit:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+y^2}F(\tan^2 y)$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+(\pi-y)^2}F(\tan^2 y)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{rdy}{r^2+(\pi+y)^2}F(\tan^2 y)+\ldots.$$

Wendet man auf der rechten Seite den bekannten Satz

$$\int_a^b udy+\int_a^b vdy+\int_a^b wdy+\ldots.=\int_a^b (u+v+w+\ldots.)dy$$

an, so übersieht man auf der Stelle, dass man die Gleichung aufstellen kann:

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} YF(\tan^2 y)dy,$$

worin Y die Summe der unendlichen Reihe

$$\frac{r}{r^2+y^2}+\frac{r}{r^2+(\pi-y)^2}+\frac{r}{r^2+(\pi+y)^2}+\ldots.$$

bezeichnet. Da wir aber diese Summe vermöge der Gleichung (4) bereits kennen, so ergiebt sich jetzt

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{s^2+\tan^2 y}\cdot\frac{dy}{\cos^2 y}F(\tan^2 y),$$

und einfacher für $\tan y=z$:

$$\int_0^\infty \frac{rdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)=\int_0^\infty \frac{sdz}{s^2+z^2}F(z^2). \tag{11}$$

Die Fruchtbarkeit und der Nutzen dieser Formel werden gleich einleuchten, wenn man berücksichtigt, dass die linke Seiten goniometrische und algebraische Ausdrücke zugleich, die rechte Seite aber nur die letzteren enthält, dass sich mithin der Werth des nach z genommenen Integrales in vielen Fällen ohne Schwierigkeit bestimmen lassen wird.

II. Behandelt man auf ganz dieselbe Weise das Integral

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)f(\tan x),$$

worin $f(u)$ eine Funktion bezeichnet, welche die Eigenschaft $f(-u)=-f(u)$ besitzt, also mit $\tan x$ gleichzeitig ihr Vorzeichen wechselt, so findet man

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)f(\tan x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} YF(\tan^2 y)f(\tan y)dy.$$

Digitized by Google

wobei Y die Summe der Reihe

$$\frac{y}{r^2+y^2}-\frac{\pi-y}{r^2+(\pi-y)^2}+\frac{\pi+y}{r^2+(\pi+y)^2}-\dots$$

bedeutet. Da nach No. (6) diese Summe bekannt ist, so folgt jetzt

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)\,f(\tan x)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{s'\tan y}{s^2+\tan^2 y}F(\tan^2 y)\,f(\tan y)\,dy,$$

und für $\tan y=z$, also $y=\operatorname{Arctan} z$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}F(\tan^2 x)f(\tan x)\\ =&\int_0^\infty \frac{s'z\,dz}{(1+z^2)(s^2+z^2)}F(z^2)\,f(z).\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

III. Geht man von dem Integrale

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}F(\sin^2 x)\,f(\cos x)$$

aus, so verwandelt sich dasselbe nach der bisherigen Methode und unter Berücksichtigung der Formel (6) in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p\cos y}{p^2+\sin^2 y}F(\sin^2 y)f(\cos y)dy,$$

und für $\sin y=z$, also $\cos y\,dy=dz$, wird jetzt

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2}F(\sin^2 x)\,f(\cos x)\\ =&\int_0^1 \frac{p\,dz}{p^2+z^2}F(z^2)f(\sqrt{1-z^2})\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

wobei immer $f(u)$ die Eigenschaft $f(-u)=-f(u)$ besitzen muss.

IV. Wendet man endlich dieselbe Methode auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2}F(\cos^2 x)f(\sin x)$$

an und nimmt auf die Formel (10) Rücksicht, so geht dasselbe zunächst in

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q\sin y}{q^2-\cos^2 y}F(\cos^2 y)\,f(\sin y)\,dy$$

Digitized by Google

über, und mittelst der Substitution $\cos y = z$ ergiebt sich jetzt:

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \frac{x\,dx}{r^2+x^2} F(\cos^2 x) f(\sin x) \\ = \int_0^1 \frac{q\,dz}{q^2-z^2} F(z^2) f(\sqrt{1-z^2}).\end{array}\right\} \quad (14)$$

Um die Leichtigkeit zu zeigen, mit welcher die Formeln (11), (12), (13), (14) zur Kenntniss bestimmter Integrale führen, wollen wir ein paar Beispiele entwickeln. Setzt man in No. (11)

$$F(z^2) = \frac{1}{1+z^2},$$

so geht das nach z genommene Integral in

$$\frac{s}{1-s^2} \int_0^\infty \left(\frac{1}{s^2+z^2} - \frac{1}{1+z^2} \right) dz = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+s}$$

über. Ferner ist $F(\tan^2 x) = \cos^2 x$, und folglich

$$\int_0^\infty \frac{r \cos^2 x}{r^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+s},$$

wofür man auch schreiben kann

$$\int_0^\infty \frac{r(1+\cos 2x)}{r^2+x^2} dx = \frac{\pi}{1+s};$$

der Werth des ersten Integrales links ist aber

$$\int_0^\infty \frac{r\,dx}{r^2+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

und durch Transposition desselben wird jetzt

$$\int_0^\infty \frac{r \cos 2x}{r^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{1-s}{1+s} = \frac{\pi}{2} e^{-2r},$$

wie man vermöge des Werthes von s leicht findet. Für $x = \frac{1}{2}bz$, $r = \frac{1}{2}ab$, wo nun b eine positive, von Null verschiedene Grösse sein muss, findet man hieraus noch

$$\int_0^\infty \frac{a \cos bz}{a^2+z^2} dz = \frac{\pi}{2} e^{-ab},$$

wie man schon aus anderen Untersuchungen weiss.

Nimmt man in der Gleichung (13)

$$F(z^2) = \frac{1}{1+z^2}, \quad f(z) = z,$$

wodurch die Bedingung $f(-z) = -f(z)$ erfüllt ist, so wird

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x \cos x}{r^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{s' z^2 dz}{(1+z^2)^2(s^2+z^2)},$$

und daraus erhält man sehr leicht

$$\int_0^\infty \frac{x \sin 2x}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} e^{-2r},$$

oder für $x = \frac{1}{2}bz$, $r = \frac{1}{2}ab$:

$$\int_0^\infty \frac{z \sin bz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

Die Gleichung (12) giebt ferner für $F(z^2) = 1$, $f(z) = z$:

$$\int_0^\infty \frac{x \tan x}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e^{2r}+1},$$

und für $F(z^2) = 1$, $f(z) = \frac{1}{z}$:

$$\int_0^\infty \frac{x \cot x}{r^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{e^{2r}-1},$$

woraus für $x = bz$, $r = ab$ folgt:

$$\int_0^\infty \frac{z \tan bz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e^{2ab}+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{z \cot bz}{a^2+z^2}\,dz = \frac{\pi}{e^{2ab}-1}.$$

Nimmt man nur etwas allgemeinere Formen für die willkührlichen, in unseren Transformationstheoremen vorkommenden Funktionen, so gelangt man mit der grössten Leichtigkeit zu neuen Resultaten von oft sehr eleganter Gestalt. So z. B. sei in No. (11)

$$F(z^2) = l(1+k^2z^2),$$

so ist

$$\int_0^\infty \frac{rl(1+k^2 \tan^2 x)}{r^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{s dz}{s^2+z^2} l(1+k^2z^2).$$

Den Werth des Integrales rechts findet man sehr rasch auf folgende Weise. Sei

$$\varphi(k) = \int_0^\infty \frac{s dz}{s^2+z^2} l(1+k^2z^2),$$

so folgt durch partielle Differenziation nach k

$$\frac{d\varphi(k)}{dk} = \int_0^\infty \frac{s dz}{s^2+z^2} \cdot \frac{2kz^2}{1+k^2z^2},$$

und der Werth des Integrales rechts ist

$$\frac{\pi s}{1+ks},$$

wie man durch die gewöhnlichen Mittel findet. Es folgt jetzt

$$\varphi(k)=\int\frac{\pi s}{1+ks}\,dk=\pi l(1+ks)+\text{Const}.$$

Da aber nach der ursprünglichen Bedeutung von $\varphi(k)$ die Beziehung $\varphi(0)=0$ statt findet, so ergiebt sich Const. $=0$ und $\varphi(k)=\pi l(1+ks)$; mithin

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\tan^2 x)}{r^2+x^2}\,dx=\pi l\Big(1+k\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}\Big).$$

Eine ganz analoge Gleichung ergiebt sich aus dem Theoreme (11) für

$$F(z^2)=l\Big(1+\frac{k^2}{z^2}\Big)$$

unter Anwendung desselben Verfahrens. Man findet nämlich

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\cot^2 x)}{r^2+x^2}\,dx=\pi l\Big(1+k\frac{e^r+e^{-r}}{e^r-e^{-r}}\Big).$$

Beide Formeln lassen sich unter der sehr eleganten Gestalt darstellen *):

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\tan^2 x)}{r^2+x^2}\,dx=\pi l(1+k\,\text{tghp}\,r),$$

$$\int_0^\infty\frac{rl(1+k^2\cot^2 x)}{r^2+x^2}\,dx=\pi l(1+k\,\text{cthp}\,r).$$

---

*) Bekanntlich hat Herr Prof. Gudermann für die Ausdrücke

$$\frac{e^r+e^{-r}}{2},\quad\frac{e^r-e^{-r}}{2},\quad\frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}},\quad\frac{e^r+e^{-r}}{e^r-e^{-r}}$$

die Bezeichnungen $\mathfrak{Cos}\,r$, $\mathfrak{Sin}\,r$, $\mathfrak{Tan}\,r$, $\mathfrak{Cot}\,r$ eingeführt, die, so passend sie auch sind, sich nur leider nicht gut im Drucke ausnehmen. Vielleicht empfiehlt sich in dieser Hinsicht die Bezeichnung

cshp r, snhp r, tghp r, cthp r,

was sich eben so gut schreibt als drucken lässt. Der Bezeichnung sin, cos, tan, cot gegenüber dienen dann immer drei Buchstaben den goniometrischen und vier den hyperbolischen Funktionen. Auch schliesst sich diess gut an die Jacobi'she Bezeichnung der umgekehrten elliptischen Funktionen [$x=\sin\text{am}(u)$ wenn $u=F(x,c)$] an.

Digitized by Google

Für $x=bz$, $r=ab$ ergeben sich hieraus die etwas allgemeineren Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{al(1+k^2\tan^2 bz)}{a^2+z^2}dz=\pi l[1+k\,\mathrm{tghp}(ab)],$$

$$\int_0^\infty \frac{al(1+k^2\cot^2 bz)}{a^2+z^2}dz=\pi l[1+k\,\mathrm{cthp}(ab)].$$

Nimmt man z. B. $k=1$, so erhält man sogleich

$$\int_0^\infty \frac{al\cos^2 bz}{a^2+z^2}dz=\pi l\left(\frac{1+e^{-2ab}}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{al\sin^2 bz}{a^2+z^2}dz=\pi l\left(\frac{1-e^{-2ab}}{2}\right);$$

wie auf anderem Wege Bidone in den Miscell. Taur. gefunden hat. Man darf hier aber nicht $2l\cos bz$ für $l\cos^2 bz$ schreiben wollen, da diese Funktionen nur für positive $\cos bz$, also nur von $z=-\frac{\pi}{2b}$ bis $z=\frac{\pi}{2b}$ identisch sind; eben so wenig darf man $l\sin^2 bz$ durch $2l\sin bz$ ersetzen, da beide Funktionen nur von $z=0$ bis $z=\frac{\pi}{b}$ zusammenfallen.

XLVI.

Bemerkungen über einige bestimmte Integrale.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Lehramts-Candidaten zu Cassel.

1.

Zur Entwickelung der bestimmten Integrale

$$\int_0^\infty \cos ax\frac{r\partial x}{r^2+x^2} \text{ und } \int_0^\infty \sin ax\frac{x\partial x}{r^2+x^2},$$

welche zuerst von Laplace gegeben wurden, hat man verschiedene Wege eingeschlagen, von denen wohl der als der einfachste bezeichnet werden kann, auf welchem man das bekannte Theorem von Fourier zu Hülfe nimmt *).

Weniger Methoden der Herleitung der Werthe von den obigen der Form nach sehr ähnlichen Integralen

$$\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2} \text{ und } \int_0^\infty \sin ax \frac{x\partial x}{r^2-x^2},$$

welche zuerst der italienische Geometer Bidone gefunden hat, sind bekannt geworden und unter den bekannten keine, welche, was Kürze und Einfachheit angeht, der obigen zur Seite gesetzt werden könnte. Vielleicht wird deshalb die folgende Art, zur Kenntniss dieser bestimmten Integrale zu gelangen, die sich durch ihre Kürze und dadurch, dass sie bloss das bekannte Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\partial x = \frac{\pi}{2}$$

als bekannt voraussetzt, empfiehlt, hier nicht am unrichtigen Platze stehen.

Betrachten wir das Integral $\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2}$, so erhellet leicht, dass selbiges durch Zerlegen des Nenners unter folgende Form gebracht werden kann:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos ax \frac{r\partial x}{r^2-x^2} &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \cos ax \left\{\frac{1}{r+x}+\frac{1}{r-x}\right\}\partial x\\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x + \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Führen wir jetzt im ersten Integrale auf der rechten Seite eine neue Veränderliche $\varphi = r + x$ ein, wodurch $\partial\varphi = \partial r$ und die Gränzen ∞ und 0 resp. in ∞ und r übergehen, so ergibt sich

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x = \int_r^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi. \quad (2)$$

Ebenso ist, wenn wir $\psi = r - x$ setzen,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x = -\int_r^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi}\partial\psi. \quad (3)$$

Nun ist nach einem bekannten Satze aus der Theorie der bestimmten Integrale

$$\int_r^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi = \int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi - \int_0^r \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi$$

---

*) Supplemente zu Klügels mathematischem Wörterbuche. Thl. I. S. 281. — Schlömilch, Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale. S. 39.

und

$$\int_r^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi = \int_0^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi + \int_r^0 \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi.$$

Durch Vertauschen von ψ mit $-\psi$ wird aber

$$\int_0^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi = \int_0^{\infty} \frac{\cos a(r+\psi)}{\psi} \partial\psi.$$

Daher wird, wenn wir das Zeichen ψ in φ umsetzen, was bekanntlich erlaubt ist:

$$\int_r^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi = \int_0^{\infty} \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi} \partial\varphi + \int_r^0 \frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi} \partial\varphi.$$

Wir erhalten jetzt durch Addition der Gleichungen (2) und (3):

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{r+x} \partial x + \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{r-x} \partial x \\
&= \int_r^{\infty} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi - \int_r^{-\infty} \frac{\cos a(r-\psi)}{\psi} \partial\psi \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi - \int_0^{r} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi \\
&- \int_0^{\infty} \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi} \partial\varphi - \int_r^{0} \frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi} \partial\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Nach der Theorie der bestimmten Integrale ist aber

$$\begin{aligned}
\int_r^{\infty} \frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi} \partial\varphi &= -\int_0^{r} \frac{\cos a(r-\varphi)}{\varphi} \partial\varphi \\
&= -\int_0^{r} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi.
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi - \int_0^{r} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi \\
&- \int_0^{\infty} \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi} \partial\varphi + \int_0^{r} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi} \partial\varphi - \int_0^{\infty} \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi} \partial\varphi.
\end{aligned}$$

Die letzten Integrale lassen sich aber wegen der gleichen Integrationsgränzen zusammenziehen, wodurch sich ergibt:

Digitized by Google

$$\int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)}{\varphi}\partial\varphi - \int_0^\infty \frac{\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi$$

$$=\int_0^\infty \frac{\cos a(\varphi-r)-\cos a(r+\varphi)}{\varphi}\partial\varphi = \int_0^\infty \frac{2\sin ar\,.\,\sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi$$

$$=2.\sin ar\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi.$$

Bekanntlich ist aber:

$$\int_0^\infty \frac{\sin a\varphi}{\varphi}\partial\varphi = \frac{\pi}{2},$$

daher nach Gleichung (4)

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{r+x}\partial x + \int_0^\infty \frac{\cos ax}{r-x}\partial x = 2\cdot\frac{\pi}{2}.\sin ar,$$

und endlich nach Gleichung (1):

$$\int_0^\infty \cos ax\frac{r\partial x}{r^2-x^2} = \frac{\pi}{2}\sin ar.$$

Der Werth des zweiten Integrals

$$\int_0^\infty \sin ax\frac{x\partial x}{r^2-x^2}$$

kann auf ganz ähnliche Weise erhalten werden, weshalb ich die wirkliche Herleitung nicht beifüge. Man gelangt dazu kürzer durch Differentiation des so eben bestimmten Integrals nach a, wodurch sich ergibt:

$$\int_0^\infty \sin ax\frac{x\partial x}{r^2-x^2} = -\frac{\pi}{2}\cos ar.$$

2.

Bei dieser Gelegenheit will ich auf einen Weg aufmerksam machen, auf dem man sehr leicht zu dem Werthe des merkwürdigen Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\partial x,$$

welches von Euler herrührt, gelangen kann.

Zu diesem Zwecke will ich das unbestimmte Integral

$$\int\frac{\partial x}{1+a^2\operatorname{tg}x^2}$$

entwickeln.

Digitized by Google

Offenbar ist $\frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \cdot \frac{1-a^2}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2}$, und durch eine einmalige Division ergibt sich sofort:

$$\frac{1}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \left\{ 1 - \frac{a^2(1+\operatorname{tg} x^2)}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} \right\}.$$

Daher ist:

$$\int \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \left\{ \int \partial x - a^2 \int \frac{1+\operatorname{tg} x^2}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} \partial x \right\}$$

$$= \frac{1}{1-a^2} \left\{ \int \partial x - a^2 \int \frac{\frac{\partial x}{\cos x^2}}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} \partial x \right\}.$$

Nach dieser Umgestaltung des Nenners in unserm Integral ergibt sich aber mit Rücksicht auf die bekannte Formel

$$\int \frac{\partial X}{1+X^2} = \operatorname{arctg} X,$$

$$\int \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \{ x - a \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x) \}.$$

Wenn wir jetzt das Integral zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nehmen, so folgt ganz einfach:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{1}{1-a^2} \left(\frac{\pi}{2} - a \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \frac{1-a}{1-a^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+a}.$$

Multipliciren wir jetzt auf beiden Seiten mit ∂a und integriren zwischen den Gränzen 0 und a, so erhalten wir:

$$\int_0^a \partial a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^a \frac{\partial a}{1+a} = \frac{\pi}{2} l(1+a).$$

Kehren wir die Reihenfolge der Integrationen um, so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x \int_0^a \frac{\partial a}{1+a^2 \operatorname{tg} x^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x) \partial x = \frac{\pi}{2} l(1+a).$$

Sobald wir aber dem a den Werth 1 geben, erhalten wir unmittelbar das fragliche Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \partial x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\pi}{2} l(2),$$

oder, was dasselbe ist:

Digitized by Google

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{\cos x}{\sin x}\partial x = \frac{\pi}{2}\,l(2).$$

Ich habe diese Bemerkung um so weniger zurückhalten wollen, weil man durch eine leichte Umformung des obigen Integrals leicht zu einem bemerkenswerthen Integrale gelangen kann, welches Herr Professor Schlömilch *) auf einem andern Wege erhalten hat.

Integriren wir nämlich theilweis, so erhalten wir

$$\int\frac{x\partial x}{\operatorname{tg} x} = \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{\operatorname{tg} x} + \tfrac{1}{2}\int\frac{x^2\partial x}{\operatorname{tg} x^2\cos x^2} = \tfrac{1}{2}\frac{x^2}{\operatorname{tg} x} + \tfrac{1}{2}\int\frac{x^2\partial x}{\sin x^2}.$$

Für die Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ erhalten wir aber augenblicklich

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\partial x}{\sin x^2} = \frac{\pi}{2}\,l(2)$$

oder

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\partial x}{\sin x^2} = \pi l(2).$$

Setzen wir $x = \operatorname{arccot} y$, also $\cot x = y$, $\frac{\partial x}{-\sin x^2} = \partial y$, so hat man die merkwürdige Formel:

$$-\int_\infty^0 (\operatorname{arccot} y)^2\partial y = \int_0^\infty (\operatorname{arccot} y)^2\partial y = \pi l(2).$$

Wird aber $x = \operatorname{arctg} y$, also $\operatorname{tg} x = y$, $\frac{\partial x}{\cos x^2} = \partial y$ genommen, so ist:

$$\frac{x^2\partial x}{\sin x^2} = \frac{x^2}{\operatorname{tg} x^2}\cdot\frac{\partial x}{\cos x^2} = \left(\frac{\operatorname{arctg} y}{y}\right)^2\partial y$$

und

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2\partial x}{\sin x^2} = \int_0^\infty\left(\frac{\operatorname{arctg} y}{y}\right)^2\partial y = \pi l(2),$$

und unter dieser Gestalt ist es dasselbe Integral wie das vom Herrn Prof. Schlömilch am angeführten Ort gegebene.

---

*) Archiv. Thl. IV. S. 75.

Digitized by Google

XLVII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von

Herrn Wilhelm Mösta,

Lehramts-Candidaten zu Cassel.

Wie beweist man mit Hülfe des bekannten Integrals

$$\int e^{-ax}\sin bx\partial x = -\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax} + C$$

die Gleichheit:

$$\int_0^\infty \frac{\cos mx}{1+x^2}\partial x = \int_0^\infty \frac{\sin mx}{1+x^2}x\partial x.$$

Von dem

Herrn Doctor F. Arndt,

Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es ist

$$1.\quad \int_0^1 \frac{\partial x}{lx}\left[a-\tfrac{1}{2}+\frac{x^{a-1}}{(1-x)^2}\{(1-x)(1+alx)+xlx\}\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}-a+l\Gamma(\tfrac{1}{2})-l\Gamma(a)+\tfrac{1}{2}l2.$$

$$2.\quad \int_0^1 \frac{\partial x}{lx}\left[(a-\tfrac{1}{2})\frac{x^{n-1}-x^{\nu-1}}{lx}+\frac{nx^{na-1}}{1-x^n}-\frac{\nu x^{\nu-1}}{1-x^\nu}\right]$$
$$=(n-\nu)[\tfrac{1}{2}-a+l\Gamma(\tfrac{1}{2})-l\Gamma(a)+\tfrac{1}{2}l2].$$

$$3.\quad \int_0^1 \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}}\left[\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{x^{na-1}+(n-1)x^{n-1}}{1-x^n}\right]=\frac{n-1}{2}l2+(\tfrac{1}{2}-na)ln.$$

Digitized by Google

4. $$\int_0^1 \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{nx^{n-1}}{1-x^n}+(na-\frac{n}{2}-\tfrac{1}{2})x^{n-1}+1-na\right]$$

$$=\frac{n-1}{2}l(2\pi)+(\tfrac{1}{2}-na)\,ln.$$

5. $$\int_0^1 \frac{\partial x}{l\frac{1}{x}}\left[\frac{x^{a-1}}{1-x}-\frac{x^{na-1}}{1-x^n}-\frac{(n-1)x^{n-1}}{1-x^n}-\frac{n-1}{2}x^{n-1}\right]$$

$$=\frac{n-1}{2}l(2\pi)+(\tfrac{1}{2}-na)\,ln.$$

XLVIII.

Miscellen.

Johann Caramuel von Lobkowitz, Bischof von Vigerano, gest. 1682, von dem gemeldet wird, dass er 30000 Ketzer bekehrt habe, stellte in der von ihm herausgegebenen „Mathesis audax" die Behauptung auf, dass man alle theologischen Streitfragen, insonderheit die in der Lehre de gratia et libero arbitrio, einzig und allein durch Lineal und Zirkel lösen könne.

Druckfehler

in Thl. X. Heft I. Nr. X.

Seite 104, von oben Zeile 11 muss heissen

$$\cot(2k-1)\frac{M\pi}{2N}=\operatorname{tg}(M\frac{\pi}{2}-(2k-1)\frac{M\pi}{2N}).$$

„ 105, von oben Zeile 7 muss heissen $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{\mu}$.

„ 105, „ „ „ 10 „ „ welche statt welcher.

„ 105, von unten „ 1 „ „ $\left(\frac{a}{p}\right)=(-1)^{T}$.

Thl. X. Heft 3. S. 316. Z. 13 statt Ferm s. m. Form.

Digitized by Google

XXXVII.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Lehr- und Handbuch der Arithmetik. Auf höchsten Befehl Sr. Kais. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Johann, Feldmarschalls und General-Genie-Directors, für den Unterricht in der k. k. Ingenieur-Akademie in Wien verfasst, gleichzeitig für das Selbststudium eingerichtet und herausgegeben von Dr. Alexander Morgante, k. k. Capitän-Lieutenant im Ingenieur-Corps, Professor an der k. k. Ingenieur-Akademie in Wien. Wien. 1847. 8. 1 Rthlr. 20 Sgr.

Dieses Lehrbuch enthält die gewöhnlichen Elemente der sogenannten gemeinen Arithmetik bis einschliesslich zu der Lehre von den Kettenbrüchen und von den Logarithmen, und scheint wegen seiner einfachen und deutlichen Darstellung, bei welcher der Herr Vf. den Gebrauch allgemeiner Zeichen gänzlich vermieden hat, dessenungeachtet aber Alles theoretisch zu erläutern sucht, dem Zwecke, für welchen es bestimmt ist, ganz wohl zu entsprechen. Auf weitere Einzelnheiten bei Büchern von der Art des vorliegenden einzugehen, gestattet die Natur der literarischen Berichte nicht.

Mémoire relatif a la théorie des nombres. Loi réciproque. Par M. Brennecke, Professeur au collége de Jever *). Paris. 1840. 4.

Diese, eine Erweiterung des in der Zahlenlehre so wichtigen Reciprocitätsgesetzes enthaltende Abhandlung ist zufällig erst jetzt zu unserer Kenntniss gelangt. Wir glauben aber, ohne auf ihren Inhalt hier näher eingehen zu können, wenigstens die Liebhaber des genannten wichtigen Theils der Mathematik noch nachträglich auf dieselbe aufmerksam machen zu müssen, damit sie der verdienten allgemeinern Beachtung nicht entgehe.

---

*) Jetzt Rector der höheren Bürgerschule in Colberg.

Digitized by Google

Logarithmisch-trigonometrische Hülfstafeln. Ein zur Horizontalprojection der auf schiefen Ebenen gemessenen Längen, wie auch zu nivellitischen und markscheiderischen Arbeiten unentbehrliches Handbuch für Geometer, Markscheider, Ingenieure, Chaussee- und Wasserbaubeamte. Berechnet und herausgegeben von J. v. Massaloup. Leipzig. 1847. 8. Geheftet 3 Rthlr. 18 Ngr.; dauerhaft gebunden 4 Rthlr.

Der Inhalt dieser äusserlich sehr schön ausgestatteten, 667 Seiten starken Tafeln ist folgender.

Erste Abtheilung. Tafel zur Ermittelung der Grundlinie und Höhe (beider Katheten) eines rechtwinklichten Dreiecks, wenn seine Hypotenuse (gemessene Länge) und der anliegende Elevationswinkel bekannt sind. Für die Längen von 1 bis 50 Ruthen. (S. 1—S. 442.)

Zweite Abtheilung. Enthaltend: Die Höhen für gegebene Grade bei den gemessenen Längen von 0 bis 11 Ruthen. (S. 443—S. 609.)

Dritte Abtheilung. Tafel zur Reduction des Decimal-Maasses auf Werk- und Bergmaas und zwar von 0,001 bis 5,000 Ruthen. (S. 611—S. 662.)

Vierte Abtheilung. Tafel zur Reduction des Bergmaasses auf Ruthen (Decimalmaass). Von 1 bis 20 Lachter. (S. 663—S. 667.)

Die allgemeinen Bemerkungen über die Anwendung der obigen Tafeln füllen S. VII.—XII.

Wir haben den Inhalt dieser Tafeln im Obigen vollständig angegeben. Ob aber solche dickleibige und theure Tafeln zur Auflösung der allereinfachsten trigonometrischen Aufgaben, die es überhaupt geben kann, ohne Logarithmen für Praktiker und Techniker wirklich ein so grosses Bedürfniss sind, wie der Herr Vf. zu meinen scheint, müssen wir dahin gestellt sein lassen. Jedenfalls wird jedoch dieses Bedürfniss mit der streng wissenschaftlichen Ausbildung solcher Leute in umgekehrtem Verhältnisse stehen, und manchem mehr wissenschaftlichen Praktiker oder Techniker wird vielleicht eine kleine fünfstellige Logarithmentafel lieber sein als das vorliegende dickleibige Buch. Auf der andern Seite aber kann und darf nicht in Abrede gestellt werden, dass solche Tafeln in so fern sie alle und jede Rechnung zu beseitigen suchen, allerdings ihren wohlbegründeten Nutzen haben können, wenn eine auch an sich ganz leichte Rechnung in sehr oftmaliger Wiederholung auszuführen ist, in welchen Fällen daher auch der Herausgeber manchen Praktiker sich zu Dank zu verpflichten mit Sicherheit hoffen darf.

Geometrie.

Jahresbericht für die Mitglieder der hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathemati-

Digitized by Google

schen Wissenschaften. Von Fastnacht 1846 bis Fastnacht 1847. 4.

Ausser der schon im Literarischen Berichte Nr. XXXVI. S. 530. besonders angezeigten Abhandlung des Herrn Director Rümker über die Sternbedeckungen enthält dieser Jahresbericht noch einen lesenswerthen Aufsatz des Herrn Ingenieur D. A. Schuback über die Kardioide, worunter man bekanntlich die Curve versteht, welche von den Fusspunkten der von einem festen Punkte des Umfangs eines Kreises auf die stetige Folge der an denselben gezogenen Berührenden gefällten Perpendikel gebildet wird. Unter andern bemerkenswerthen Eigenschaften dieser Curve wird in dem vorliegenden Aufsatze auch der Satz bewiesen, dass die Kardioide diejenige Curve ist, in welcher sich die Planeten um die Sonne bewegen würden, wenn die Anziehungskraft der letzteren umgekehrt wie die vierten Potenzen der Entfernungen wirkte.

In Nr. 603. der astronomischen Nachrichten hat Herr Professor Dr. Anger in Danzig einige sehr beachtungswerthe Bemerkungen über die geometrische Aufgabe: Durch vier gegebene Punkte diejenige Ellipse zu legen, welche den kleinsten Inhalt hat, mitgetheilt. Diese von Euler in den Nov. Act. Acad. Petrop. 1791 p. 138. zuerst aufgelöste Aufgabe führt bekanntlich auf eine Gleichung des dritten Grades. Euler bemerkt, dass, da dies der Fall sei, auch immer eine der gestellten Forderung Genüge leistende Ellipse gefunden werden könne, und dass, wenn sich der Fall ereignen sollte, dass die cubische Gleichung drei mögliche Wurzeln habe, auch eben so viele Lösungen Statt finden würden, deren Eigenschaften näher anzugeben, er andern überlasse. Herr Prof. Dr. Anger hat nun aber durch eine strenge Analyse gefunden, dass die das Problem lösende cubische Gleichung im Allgemeinen immer drei mögliche und zwar positive Wurzeln hat, und dass diejenige, welche hier allein in Betracht kommt, stets die kleinste von allen ist, während die beiden andern Wurzeln sich auf Kegelschnitte, die nicht Ellipsen sind, beziehen.

Wir erkennen in dieser Arbeit einen neuen Beweis für die Richtigkeit der von uns schon öfter ausgesprochenen Behauptung, dass viele früher schon aufgelöste mathematische Probleme noch sehr eine neue tiefer eingehende und allgemeinere Behandlung bedürfen, und sind überzeugt, dass Herr Prof. Dr. Anger auf den Dank der Leser des Archivs mit Bestimmtheit würde rechnen können, wenn er seine interessanten Bemerkungen über die fragliche Aufgabe auch in dieser Zeitschrift, und zwar mit noch etwas mehr Ausführlichkeit als dies in den astronomischen Nachrichten bereits geschehen ist, baldigst mitzutheilen die Güte haben wollte, wozu wir ihn daher hiermit freundlichst aufzufordern uns erlauben.

Trigonometrie.

Ebene Trigonometrie in Anwendung auf Distanz- und Höhenmessung. Eine Sammlung praktischer Auf-

Digitized by Google

gaben und empirischer Beispiele von Dr. Adolph Poppe, Lehrer der Mathematik und Physik in Frankfurt am Main. Mit vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Frankfurt a. M. 1847. 8. 25 Sgr.

Eine Sammlung der gewöhnlichsten Aufgaben der Feldmesskunst oder praktischen Geometrie, durch die einfachsten Sätze der ebenen Trigonometrie aufgelöst, und durch numerische Beispiele erläutert, ohne alle Eigenthümlichkeit und sich nirgends über die allerersten Elemente der ebenen Trigonometrie erhebend. Die „landschaftlichen Darstellungen", wie sie der Herr Vf. nennt, zum Theil „nach der Natur selbst aufgenommene Skizzen", Eisenbahnzüge, Viaducte, alte Ritterburgen, Luftbälle u. dergl., erinnern lebhaft an die Schriften der ältesten Feldmesser, mit denen sie, ungeachtet ihrer jetzt freilich besseren technischen Ausführung, in der That ganz übereinstimmen würden, wenn der Herr Vf. sich auch noch hätte gefallen lassen, die aufgestellten Instrumente — Mensel und Astrolabium — zu zeichnen, und Männchen dahinter, welche durch die Dioptern oder durch das Fernrohr blicken, vielleicht auch mit einem Degen an der Seite, wie man sie in den Schriften der ältesten Feldmesser so häufig findet; das würde den Eifer der lern- und wissbegierigen Jugend in der Aneignung sehr ernsthafter Kenntnisse gewiss noch sehr erhöhet haben! — Wir haben jetzt wirklich in andern ernsten Wissenschaften schon Bilderbücher genug, so dass es fast nur noch fehlt, dass der Jugend, wie es Basedow mit dem ABC gemacht haben soll, die zur Veranschaulichung der theoretischen Lehren bestimmten bildlichen Darstellungen in Zucker gebacken vorgesetzt werden, woraus gewiss ein neuer sehr lucrativer Erwerbszweig für die Conditoren entstehen, und die bekanntlich gar nicht zu solchen Genüssen hin neigende Jugend gewiss auf eine sehr erwünschte Weise immer mehr mit diesen Herren befreunden würde. In einer so ernsten Wissenschaft, wie die Mathematik ist und namentlich bei'm Unterrichte der Jugend immer sein soll, möchte man sich aber doch solche Spielereien sehr ernstlich verbitten, und es ist keineswegs zu wünschen, dass der Herr Vf. und der Verlag der S. Schmerber'schen Buchhandlung in Frankfurt a. M uns fernerhin noch mit einem ähnlichen Büchlein beschenken.

Praktische Geometrie.

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie. Von Carl Friedrich Gauss. Zweite Abhandlung. Aus dem dritten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 1847. 4. 15 Sgr.

Der erste Theil dieser wichtigen Untersuchungen ist im Literarischen Ber. Nr. XIX. S. 296. angezeigt worden. Ueber den Zweck der vorliegenden zweiten Abhandlung spricht sich der Herr Vf. auf S. 3. auf folgende Art aus. „Die Aufgabe, aus der

Digitized by Google

Grösse der Seite eines Dreiecks auf der Erdoberfläche, dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, und der geographischen Breite dieses Endpunkts abzuleiten das Azimuth an dem andern Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte, gehört zu den Hauptgeschäften der höhern Geodäsie. Für den Fall der Kugelfläche ist der Zusammenhang zwischen jenen sechs Grössen am Schlusse der ersten Abhandlung in der einfachsten und zur schärfsten Rechnung geeigneten Form aufgestellt, welche auch leicht zu einer bequemen Auflösung der Aufgabe selbst benutzt werden kann. Es wird dadurch das Verlangen nach dem Besitz einer analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche gültigen Auflösungsart erweckt, und der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, eine solche zu entwickeln. Vorher soll jedoch erst die Auflösung für den Fall der Kugelfläche in ein noch helleres Licht gestellt werden. Des bequemen Zurückweisens wegen lasse ich die Zahlenbezeichnung der Artikel sich an die erste Abhandlung anschliessen."

Man erkennt hieraus den unmittelbaren und innigen Zusammenhang dieser zweiten Abhandlung mit der ersten.

Astronomie.

Lehrbuch der Sternkunde für Schulen und zum Selbstunterrichte. Von Dr. Gotthilf Heinrich von Schubert, Hofrath und Professor der Naturgeschichte an der Königlichen Ludwigs-Maximilians-Universität zu München. Dritte, grossentheils ganz umgearbeitete Auflage. Erlangen. 1847. 8. 20 Sgr.

Diese den Lesern des Archivs gewiss schon aus ihren frühern Auflagen hinreichend bekannte Schrift zeichnet sich vor mehrern andern ähnlichen Schriften durch wahre Popularität vortheilhaft aus. Die neuern astronomischen Entdeckungen haben in dieser dritten Auflage überall gebührende Berücksichtigung gefunden.

Physik.

Beschreibung eines einfachen und sehr wirksamen Papier-Electrophors. Von Dr. Joh. Jos. Ign. Hoffmann, Königl. Bayer. Hofrathe, Director des k. Lyceums zu Aschaffenburg. Aschaffenburg. 1847. 8.

Auf die elektrische Kraft des Papiers ist, wenn wir nicht irren, schon in älterer Zeit hingewiesen worden, dieselbe scheint aber

Digitized by Google

in Vergessenheit gekommen zu sein *). Bei der grossen Einfachheit und der ungemeinen Wohlfeilheit des in der vorliegenden kleinen Schrift beschriebenen Papier-Elektrophors, und namentlich bei den allerdings sehr beträchtlichen Wirkungen, welche der Herr Vf. bei zweckmässigem Gebrauche durch dasselbe erhalten zu haben versichert — er hat demselben nach S. 21. oft 3 bis $3\frac{1}{2}$ Zoll lange Funken entlockt und damit Flaschen von beträchtlicher Grösse in kurzer Zeit stark geladen — scheint die vorliegende Schrift und das in derselben beschriebene Instrument jedenfalls zu verdienen, allen Lehrern der Physik zu sorgfältiger Beachtung, und die Sache an sich zu weiterer Prüfung empfohlen zu werden, was bei der grossen Wohlfeilheit und der sehr leichten Herstellbarkeit des Instruments nicht den geringsten Schwierigkeiten unterliegt und im Interesse der Lehranstalten, namentlich solcher, denen an der Wohlfeilheit der anzuschaffenden Instrumente liegen muss, wünschenswerth ist. Die Schrift enthält ausserdem noch manche andere praktische Bemerkungen, auch über das gewöhnliche Harzkuchen-Elektrophor, die ebenfalls nicht unbeachtet gelassen zu werden verdienen. Zur öffentlichen Mittheilung der Ergebnisse, zu denen etwa mit diesem Instrumente angestellte anderweitige Versuche geführt haben dürften, wird das Archiv gern seine Spalten öffnen.

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1845. Dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin. I. Jahrgang. 1. Abtheil. 25 Sgr. 2. Abtheil. 2 Rthlr. 10 Sgr. Redigirt von Dr. G. Karsten. Berlin. 1847. 8.

Bei dem jetzigen raschen Fortschreiten der Physik werden Schriften wie die vorliegende immer nothwendiger und verdienstlicher, aber in ihrer Abfassung auch immer schwieriger. Wir glauben jedoch, dass der Herr Vf. des vorliegenden Jahrgangs seine Aufgabe recht gut gelöst und in Rücksicht auf den auf dem Titel genannten Zeitraum nichts Wesentliches und wirklich Wichtiges übergangen hat. Daher ist jedenfalls zu wünschen, dass er diesem Unternehmen auch künftighin seine Kraft mit Lust und Liebe widme und die Jahrgänge von 1846 und 1847 recht bald folgen lasse, wobei es noch ausserdem wünschenswerth ist, dass neben dem Inhalte der Journale auch die in eignen grössern Werken niedergelegten eigenthümlichen Untersuchungen stets gehörige, ihnen gebührende Berücksichtigung finden mögen. Die Beschränktheit des Raums gestattet uns hier nur eine oberflächlichere Angabe des sehr reichen Inhalts, welche aber hoffentlich hinreichen wird, um das Werk, wie wir aus Ueberzeugung wünschen, einem grössern Leserkreise zu empfehlen. *Erster Abschnitt.* Allgemeine Physik. 1. Atomtheorie. 2. Cohäsion und Adhäsion. 3. Diffusion. 4 Capillarität. 5. Dichtigkeit und Ausdehnung. 6. Maass und Messen. 7. Statik und Dynamik. 8. Hydrostatik und Hydrodynamik. 9. Aërostatik und Aërodyna-

*) Neuerlich hat auch Herr Prof. Schönbein in Basel ein sehr leicht elektrisch erregbares Papier gefunden (Poggendorf's Annalen. Bd. LXVIII. S. 159. und 160.) Auch bitte ich nachher S. 541. dieses Literar. Ber. zu vergleichen.

Digitized by Google

mik. 10. Elasticität fester Körper. 11. Gase und Dämpfe. 12. Absorption der Gase. 13. Eudiometrie. 14. Veränderung des Aggregatzustandes. 15. Hygrometrie. — *Zweiter Abschnitt.* Akustik. — *Dritter Abschnitt.* Optik. 1. Theoretische Optik. 2. Optische Phänomene. 3. Physiologische Optik. 4. Chemische Wirkungen des Lichts. 5. Optische Instrumente. — *Vierter Abschnitt.* Wärmlehre. 1. Wärmeentwickelung. 2. Physiologische Wärmeerscheinungen. 3 Wärmeleitung. 4. Specifische und latente Wärme. 5. Strahlende Wärme. 6. Wirkungen der Wärme. 7. Theorie der Wärme. — *Fünfter Abschnitt.* Elektricitätslehre. 1. Allgemeine Theorie der Elektricität. 2. Reibungselektricität. *A.* Allgemeine Eigenschaften. *B.* Entladung der elektrischen Batterie. *C.* Elektro-Induction. *D.* Elektrische Apparate. *E.* Dampfelektricität. 3. Atmosphärische Elektricität. 4. Thermoelektricität 5. Galvanismus. *A.* Theorie. *B.* Ladung. *C.* Elektrische Phänomene. *D.* Apparate. *E.* Elektrochemie. Galvanoplastik. 6. Elektrophysiologie. I. Einwirkung der Elektricität auf Organismen. *A.* Pflanzen. *B.* Thiere. II. Entwickelung der Elektricität in Organismen. *A.* Elektromotorische Fische. *B.* Der sogenannte Frosch- und Muskelstrom nebst der contraction induite Matteucci's *C.* Anhang. 7. Elektromagnetismus und Magneto-Elektricität. Induction. Anhang. Elektrische Telegraphie. 8. Magnetismus. — *Sechster Abschnitt.* Angewandte Physik. 1. Instrumente und Apparate von neuer Construction. 2. Angewandte Hydrodynamik. 3. Angewandte Aërodynamik. —. Zusätze und Verbesserungen. Namen-Register.

Schon aus dieser nur oberflächlichen Inhaltsangabe wird man sehen, dass dieses Werk für Jeden, wer mit den raschen Fortschritten der Physik und ihrer technischen Anwendung möglichst gleichen Schritt halten will, gewiss unentbehrlich ist.

Vermischte Schriften.

Wir beeilen uns, auch durch das Archiv zur möglichst allgemeinen Verbreitung eines literarischen Unternehmens beizutragen, mit welchem Herr Professor Dr. Schlömilch in Jena beschäftigt ist, und das mit Neujahr 1848 in's Leben treten soll. Ein wie grosser Gewinn der Wissenschaft aus diesem Unternehmen bei der allgemein bekannten Gewandtheit und Umsicht des Herrn Professor Dr. Schlömilch jedenfalls erwachsen wird, werden die Leser des Archivs aus dem folgenden Prospectus, den wir hier mit Auslassung seines hier nicht her gehörenden ganz unwesentlichen Schlusses, vollständig mittheilen, selbst entnehmen können. Möge dieses in seiner Anlage wohl durchdachte Unternehmen stets einen erfreulichen ungestörten Fortgang haben, und der Wissenschaft im reichsten Maasse den Nutzen bringen, welchen im reinsten Interesse für dieselbe der Herr Herausgeber durch diese neue Zeitschrift zu stiften beabsichtigt! Das sich immer mehr kund gebende lebhafte Treiben auf dem Felde der

Digitized by Google

mathematischen und physikalischen Literatur muss überhaupt auch jeden wahren Freund dieser in jeder Beziehung so wichtigen Wissenschaften mit grosser Freude erfüllen.

„*In einer Zeit, die sich durch beständig wachsende Eroberungen auf dem Gebiete der Mathematik und Physik, sowie deren praktischer Anwendungen auszeichnet, wird es gewiss täglich schwerer mit allen diesen Fortschritten gleich bekannt zu bleiben und sich, um einen modernen Ausdruck zu brauchen, auf der Höhe der Zeit zu erhalten. Diese von vielen Seiten bestätigte Bemerkung brachte mich schon mehrmals auf die Idee einer Zeitschrift, deren Zweck lediglich die übersichtliche Darstellung von den Fortschritten jener Wissenschaften sein sollte; aufgemuntert durch den Beifall, welchen der Gedanke bei mehreren bedeutenden Gelehrten in und ausser Deutschland gefunden hat, liess ich mir seit längerer Zeit die Realisirung desselben angelegen sein und bin jetzt so glücklich, eine Hauptsache, nämlich den Verlag gesichert zu sehen.*

Der Plan ist folgender: die mit Neujahr 1848 beginnende Zeitschrift führt den Titel:

Revue für Mathematik und Physik

und erscheint in vierteljährigen Heften von 12—15 Bogen. Jedes Heft zerfällt in folgende 3 Abtheilungen:

1) *Leitende Artikel, enthaltend: Darstellung der Fortschritte einzelner Zweige der Wissenschaft (z. B. der theoretischen und praktischen Dioptrik, der praktischen Geometrie, der elektromagnetischen Telegraphik und dergl.), ferner: Aufsätze über Geschichte, Methodik und Philosophie der Mathematik und Physik, endlich: Relationen über die Arbeiten gelehrter Gesellschaften, die Ergebnisse wissenschaftlicher Reisen und Auszüge aus den verschiedenen, theils rein wissenschaftlichen, theils technischen Journalen.*

2) *Recensionen aller Werke, welche entweder für die Erweiterung der Wissenschaft, oder für die Methode von Bedeutung sind.*

3) *Schul-, Universitäts- und Personalnachrichten, Programmenrevüe und Bücheranzeigen.*

Spezielle Aufsätze über einzelne Punkte der Wissenschaft bleiben ausgeschlossen, und den Journalen von Crelle, Grunert und Poggendorf überwiesen.

Den Verlag hat die Buchhandlung von Ferdinand Enke in Erlangen übernommen; im ersten Jahre wird kein Honorar bezahlt, von da ab 6 Thaler pr. Cour. für den Druckbogen und später mehr, wenn der Absatz diess erlaubt.“

Digitized by Google

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Nr. 68. bis 93. (Vom 17ten April 1846 bis 10ten März 1847.)

Wir haben schon in einigen früheren Nummern des Literarischen Berichts auf den in mehrfacher Beziehung interessanten Inhalt dieser Mittheilungen hingewiesen, welche jedenfalls ein sehr vortheilhaftes Zeugniss von der Thätigkeit der Gesellschaft, welche sie herausgiebt, ablegen, und wollen jetzt durch eine etwas ausführlichere Inhaltsangabe der grössern Anzahl uns jetzt vorliegender Nummern die Aufmerksamkeit der Leser des Archivs noch mehr auf dieselbe hinzulenken suchen, wobei wir absichtlich auch solche Aufsätze nicht ausschliessen wollen, die, streng genommen, nicht in den Kreis dieser Zeitschrift gehören. Die Schweiz ist ein in allgemeiner naturwissenschaftlicher Rücksicht so interessantes Land, dass alle derartigen Mittheilungen von dort die Aufmerksamkeit aller derer, welche sich überhaupt für die Fortschritte der Naturwissenschaften interessiren, nothwendig sehr in Anspruch nehmen müssen.

In mathematischer Beziehung sind die folgenden Abhandlungen hervorzuheben:

L. Schläfli, über ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere. (Nr. 68, 69, 70, 71.)

Derselbe, über den Ort der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung beim Ellipsoid, die kürzeste Kurve auf demselben und verwandte Gegenstände. (Nr. 75. und 76.)

R. Wolf, Joost Bürgi und der Proportionalzirkel. (Nr. 77. und 78.)

Derselbe, eine Grundregel für geometrische Schattenconstructionen. (Das.)

Derselbe, Beiträge zur Ballistik, welche den Beweis folgender Eigenschaften der Wurflinie (im leeren Raume) enthalten:

Alle Wurflinien derselben Wurfgeschwindigkeit haben dieselbe Leitlinie, und zwar liegt sie in der Höhe des vertikalen Wurfs.

Der Ort der Brennpunkte sämmtlicher Wurflinien ist ein aus dem Ausgangspunkte mit der Höhe des vertikalen Wurfs beschriebener Kreis.

Die Scheitel aller Wurflinien bilden eine Ellipse, deren Axen durch das Maximum der Wurfweite (?) und der Wurfhöhe dargestellt werden. (Nr. 79 und 80.)

In physikalischer und chemischer Rücksicht heben wir folgende Aufsätze hervor:

C. Brunner, neue Methode zur Bestimmung der Kohlensäure in ihren Salzverbindungen. (Nr. 73 und 74.)

R. Wolf, über elektrische Maschinen aus Papier. (Nr. 77 und 78.)

Müller, über Schiessbaumwolle. (Nr. 85 und 86.)

Digitized by Google

In naturhistorischer Rücksicht bemerken wir:

L. R. Meyer, Uebersicht der im Canton Bern, und namentlich in der Umgegend von Burgdorf vorkommenden Arten der Libellen. (Nr. 81 und 82.)

A. J. Carl v. Fischer, zweiter Nachtrag zu J. B. Brown's Catalog der Pflanzen der Umgegend von Thun und des Berner Oberlandes. (Nr. 87 und 88.)

In physiologischer Rücksicht ist der folgende, ziemlich ausführliche Aufsatz interessant:

H. Demme, über die durch Aether-Einathmung bewirkte Unempfindlichkeit. (Nr. 90—93.)

In allgemeiner literar.-historischer Rücksicht sind endlich die schon in frühern Literarischen Berichten hervorgehobenen Auszüge aus Briefen an Albrecht von Haller, mit literar-historischen Notizen, bemerkenswerth, welche Herr R. Wolf in mehreren der vorliegenden Nummern mit sehr lobenswerthem Eifer fortsetzt; so wie auch desselben Herrn Verfassers Notizen zur Geschichte der Mathematik und Physik in der Schweiz, unter denen vorzüglich die ausführlicheren Mittheilungen über Conrad Gyger und seine Zürcher Karte in Nr. 83 und 84, welche auch in einem besondern Abdrucke unter dem Titel: Conrad Gyger. Ein Beitrag zur Zürcherischen Culturgeschichte. Der physikalischen Gesellschaft in Zürich zu ihrer Säcularfeier gewidmet von Rudolf Wolf. Bern. 1846. 8. erschienen sind, das Interesse des Lesers in Anspruch zu nehmen geeignet sein dürften.

In der uns vorliegenden Reihe fehlt noch Nr. 72, deren Inhalt wir später anzuzeigen uns angelegen sein lassen werden.

Berichte über die Mitttheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien; gesammelt und herausgegeben von Wilhelm Haidinger. I. Band. Nr. 1—6. Mai, Juni, Juli, August, September, October 1846. Wien. 1847. 8. Pr. 1 Fl. 40 Kr. C. M.

Ausser der Stiftung der grossen Kaiserlich österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien ist die Gründung eines freien naturwissenschaftlichen Vereins in der Hauptstadt des Kaiserstaates, welcher im vorigen Jahre zusammengetreten ist, ein neues, höchst erfreuliches Zeichen von dem übrigens auch sonst schon genugsam bekannten dortigen regen wissenschaftlichen Leben, namentlich was die Fortbildung der sogenannten realen Wissenschaften betrifft, und wir begrüssen daher auch diesen neuen Verein mit besonderer Freude. Derselbe wird die folgenden Wissenschaften in den Kreis seiner Thätigkeit ziehen, welche wir hier ganz in der Ordnung angeben, wie sie in der vorliegenden Schrift nach einer bestimmten, dort näher erläuterten wissenschaftlichen Eintheilung genannt werden: Die Wissenschaften der Massenvorkommen, nämlich Astronomie, Meteorologie, Geographie, Geologie; die Wissenschaften der Individuen, aus welchen jene zusammengesetzt sind, nämlich: Mineralogie, Botanik, Zoologie, dazu Anatomie und

Digitized by Google

Physiologie; die Wissenschaften der Materie, aus welcher die Individuen bestehen, nämlich Physik und Chemie; endlich die Wissenschaft des Raumes, innerhalb dessen alles Materielle beobachtet wird, nämlich die Mathematik; und wird zwei Arten von Schriften herausgeben, nämlich die vorliegenden „Berichte über die einzelnen Sitzungen" und „naturwissenschaftliche Abhandlungen." Für beide ist Herr Wilhelm Haidinger als Herausgeber genannt, dessen Name für die Tüchtigkeit des Inhalts vollkommen Bürgschaft leistet.

Eine auch nur oberflächliche Angabe des Inhalts der vorliegenden Berichte ist wegen ihrer ungemein grossen Reichhaltigkeit hier ganz unzulässig; wir wollen daher nur ganz im Allgemeinen bemerken, dass gewiss jeder naturwissenschaftlich und mathematisch gebildete Leser etwas Interessantes in denselben finden wird, und dass namentlich auch Ausführlicheres über die bekannten optischen Entdeckungen des Herrn W. Haidinger und des Herrn Botzenhart in denselben zur Sprache kommt.

The American Journal of science and arts. Conducted by Professors B. Silliman and B. Silliman, Jr., and James D. Dana. Second Series. New-Haven.

Von diesem namentlich in naturwissenschaftlicher Rücksicht sehr ausgezeichneten Journal sind wir in den Stand gesetzt, wieder drei neue Nummern anzeigen zu können, und müssen die Leser des Literar. Ber. nur um Verzeihung bitten, dass diese Anzeigen wegen der grossen Entfernung, aus welcher dieses Journal zu uns gelangt, nicht immer ohne alle Unterbrechung erfolgen können, werden uns aber bemühen, solche unangenehme Unterbrechungen künftig möglichst zu beseitigen. Den Inhalt der einzelnen Hefte werden wir von jetzt an immer möglichst vollständig angeben.

Vol. II. Nr. 6. November. 1846. On the Sabbatic River; by W. M. Thomson. — On Three several Hurricanes of the American Seas and their relations to the Northers, so called, of the Gulf of Mexico and the Bay of Honduras, with Charts illustrating the same; by W. C. Redfield (continued). — On the Volcanoes of the Moon; by James D. Dana. — Description of three varieties of Meteoric Iron; by Prof. G. Troost. — A Sketch of the Geology of Texas; by Dr. Ferd. Roemer. — Fusion of Iridium and Rhodium; by Prof. R. Hare, M. D. — On the Meteoric Iron of Texas and Lockport; by Prof. B. Sillimann, Jr., and T. S. Hunt. — Report on Meteorites; by Prof. Charles Upham Shepard, M. D. — Catalogue of Shells inhabiting Tampa Bay and other parts of the Florida Coast; by T. A. Conrad. — Description of New Species of Organic Remains from the Upper Eocene Limestone of Tampa Bay; by T. A. Conrad. — Scientific intelligence.

Vol. III. No. 7. January. 1847. On Zoöphites, No. III; by James D. Dana. — On the Induction of Atmospheric Electricity on the Wires of the Electrical Telegraph; by Prof. Joseph Henry. — A New Mineral from the Azores; by J. E. Teschemacher. —

Digitized by Google

On the Delta and Alluvial Deposits of the Mississippi, and other points in the Geology of North America, observed in the years 1845, 1846; by C. Lyell. — Hybridity in Animals, considered in reference to the question of the Unity of the Human Species; by Samuel George Morton, M. D. — Solution of a Mathematical Problem; by O. Root. *) — On the North American Species of Isoëtes and Marsilea; by Prof. A. Braun. Communicated by Dr. G. Engelmann. — Review of the New York Geological Reports. — Notice of New Fossil Footprints; by James Deane. — Notes on the Algae of the United States; by J. W. Bailey, Professor of Chemistry, etc., at the U. S. Military Academy. — On the Fossil Vegetation of America; by J. E. Teschemacher. — On the existence of certain Lacustrine Deposits, in the vicinity of the Great Lakes, usually confounded with the „Drift"; by I. A. Lapham. — On the Origin of Continents; by James D. Dana. — Description of two New Species of Shells; by William Case, Cleveland, Ohio. — Scientific intelligence.

Vol. III. No. 8. March. 1847. A general Review of the Geology of Russia; by M. E. de Verneuil. — On Zoophytes, No. IV.; by James D. Dana. — Review of the New York Geological Reports. — Caricography; by Prof. C. Dewey, M. D. — On Coracite, a new Ore of Uranium; by John L. le Conte, M. D. — Geological Results of the Earth's Contraction in consequence of Cooling; by James D. Dana. — Notes on the Herbaria, Gardens and Botanists of Upsal, St. Petersburg, etc., gathered from the letters of a distinguished botanist during a continental tour. — Observations on the Rocky Mountains and Oregon; from Reports of the Exploring Expeditions of Capt. J. C. Fremont. — Hybridity in Animals, considered in reference to the question of the Unity of the Human Species; by Samuel George Morton, M. D. — Abstract of a Meteorological Journal, for the year 1846, kept at Marietta, Ohio; by S. P. Hildreth, M. D. — On the Analysis of the Oat; by Prof. John Pitkin Norton. — Observations on the uses of the Mounds of the West, with an attempt at their Classification; by E. G. Squier. — Description of a Fossil Maxillary Bone of a Palaeotherium, from near White River; by Hiram A. Prout, M. D. — Observations upon the Development of Electricity in Bands of Leather; by John M. Batchelder. — Revolution of a Magnet on its own Axis without the use of Mercurial Conductors, and also without Visible Support; by Chas. G. Page, M. D. — Scientific intelligence.

---

*) Die Aufgabe ist folgende: A straight line whose length is (r) being so moved as always to terminate in the side of a right angle, required the locus of its consecutive intersection.

Digitized by Google

XXXVIII.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Die Buchstabenrechnung und Lehre von den Gleichungen. Mit einer Sammlung von Aufgaben von F. Rummer, Lehrer der Mathematik an der höheren Bürgerschule und Hauptlehrer der Gewerbschule zu Heidelberg. Zweiter Theil. Die höhere Buchstabenrechnung, und die Lehre von den Gleichungen höheren Grades enthaltend. Heidelberg. 1847. n. 1 Thlr.

Dieses Buch bildet den zweiten Theil des im Liter. Berichte Nr. XXXV. S. 510. angezeigten Buchs desselben Herrn Verfassers, auf dessen Titel übrigens die Bezeichnung „Erster Theil" fehlt. Der vorliegende zweite Theil enthält die Lehre von den Kettenbrüchen, die Combinationslehre, den binomischen und polynomischen Satz, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die höheren arithmetischen Reihen, zusammengesetzte Reihen, Anwendung der Reihen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Rentenrechnung u. s. w., die cubischen, biquadratischen und höheren Gleichungen, verschiedene Eliminationsmethoden, und ist, ohne auf tiefere Untersuchungen sich in irgend einer Art einzulassen, in derselben einfachen, deutlichen und stets auf das Praktische gerichteten Weise verfasst wie der erste Theil; auch ist wie dort eine ziemlich reiche Sammlung von Uebungsbeispielen den einzelnen Lehren beigegeben. Eben so wie der erste verdient daher auch dieser zweite Theil vorzugsweise die Berücksichtigung von Seiten der an hauptsächlich eine praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten wirkenden Lehrer.

Leçon d'Arithmétique, dédiée aux candidats aux Écoles spéciales, sur la multiplication abrégée (avec la mesure de l'erreur); le nombre des chiffres du quotient dans la division; la division ordonnée de Fourier; la division abrégée de M. Guy; l'extraction de la racine cubique; la théorie des approximations numériques de M. Guilmin. Par M. P. F. Verhulst, membre

Digitized by Google

de l'Académie, professeur d'analyse à l'École militaire de Belgique. Bruxelles. 1847. in 12 de 72 pages.

Diese kleine Schrift des Herrn Professors Verhulst in Brüssel verdient wegen der darin behandelten neueren, theils die Abkürzung, theils die Erhöhung der Genauigkeit verschiedener arithmetischer Operationen bezweckenden Methoden der Aufmerksamkeit der Lehrer der Arithmetik und Mathematik überhaupt an allen höheren Lehranstalten gar sehr empfohlen zu werden. Ihr Inhalt ist auf dem Titel schon so ausführlich angegeben worden, dass es unnütze Weitläufigkeit sein würde, wenn wir darüber hier noch weiter berichten wollten.

Logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst verschiedenen andern nützlichen Tafeln und Formeln und einer Anweisung, mit Hilfe derselben logarithmische Rechnungen auszuführen. Zum Gebrauche in Schulen, besonders aber für jene, welche sich mit praktischen Anwendungen der Mathematik beschäftigen. Von S. Stampfer, Professor der praktischen Geometrie am k. k. polytechnischen Institute zu Wien. Dritte, abermals vermehrte und verbesserte Auflage. Wien. 1846. 8. 1 Rthlr. 5 Sgr.

Wenn auch von diesen empfehlenswerthen Tafeln, die auch äusserlich recht schön ausgestattet sind, schon die dritte Auflage erschienen ist, so scheinen sie doch, wenigstens ausserhalb Oesterreich, noch nicht so bekannt geworden zu sein, wie sie ihres nützlichen Inhalts und ihrer zweckmässigen Einrichtung wegen jedenfalls verdienen. Wir wollen daher, um auch das Unsrige zu ihrer weitern Bekanntmachung beizutragen, den Inhalt im Folgenden etwas genauer angeben. Auf die sehr deutliche Anleitung zum Gebrauche der Tafeln und Einige in der angewandten Mathematik öfters vorkommende Zahlen und Logarithmen folgt die Tafel der gemeinen Logarithmen. Diese Tafel reicht von 1 bis 10000, die Logarithmen sind sechsstellig, und die Proportionaltheile und Differenzen sind überall beigefügt. Logarithmen der Sinus, Tangenten und Bögen für die ersten 10 Secunden von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ Secunde. — Logarithmen der Sinus, Tangenten und Bögen für die ersten sechs Minuten von Secunde zu Secunde. — Tafel der trigonometrischen Logarithmen (von Minute zu Minute, in den ersteren Graden von 10 zu 10 Secunden; ebenfalls sechsstellige Logarithmen; der Tafel ist alle für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch nöthige Ausdehnung gegeben). — Tafel der Sinus und Tangenten für den Halbmesser 1 (von 10 zu 10 Minuten). Die Beifügung dieser Tafel der natürlichen Linien ist gewiss sehr zweckmässig, namentlich auch für den Unterricht. — Zeichen der trigonometrischen Linien für positive und negative Winkel in allen 4 Quadranten. — Länge der Kreisbögen für einzelne Grade. — Länge der Kreisbögen für einzelne Minuten. — Länge der Kreisbögen für einzelne Secunden. — Tafel der Quadrat- und Kubikwurzeln aller Zahlen von 1 bis 100. — Tafel der ersten 7 Potenzen aller Zahlen von 1 bis 100. — Tafel der Quadrate aller Zahlen von 1 bis 1000. — Tafel zu barometrischen

Digitized by Google

Höhenmessungen (dies sind die Gaussischen Tafeln für Wiener Klaftern berechnet). — Erhebung des scheinbaren über den wahren Horizont. — Sehnentafel für den Halbmesser =500. — Geschwindigkeit des Schalls bei verschiedener Temperatur der Luft. — Ausdehnung einiger Körper durch die Wärme vom Gefrier- bis zum Siedpunkte des Reaumur-Thermometers (Längenausdehnung und Volumenausdehnung). — Expansivkraft des Wasserdampfs (in Wiener Maass und Gewicht). — Vergleichung der Längenmaasse. — Vergleichung verschiedener Meilenmaasse, die mittlere Länge eines Erdgrades =58588,3 Wiener Klafter gesetzt. — Vergleichung der Flächenmaasse verschiedener Orte. — Vergleichung der Handels- und Münz-Gewichte verschiedener Orte. — Spezifisches Gewicht (Dichte) verschiedener Körper. — Auflösung der rechtwinkligen ebenen und sphärischen Dreiecke für den Halbmesser 1. — Auflösung der schiefwinkligen ebenen Dreiecke für den Halbmesser 1. — Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke mit einem Hülfswinkel; der Halbmesser =1. — Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke ohne Hülfswinkel; der Halbmesser =1. — Formeln aus der analytischen Trigonometrie für den Halbmesser 1 (sehr vollständig). Einige praktische Formeln aus der Progressionslehre (Formeln zur Zins- und Rentenrechnung, zum Einschalten u. dergl.).

Man sieht hieraus, wie vieles Nützliche in diesen Tafeln auf dem geringen Raume von etwa 10 Bogen bei sehr schöner äusserer Ausstattung derselben geboten wird, und wüssten in der That nicht, was dem mathematischen und physikalischen Unterrichte und dem gewöhnlichen praktischen Gebrauche noch zu wünschen übrig bleiben sollte, empfehlen daher auch diese Tafeln allen Lehranstalten und Praktikern recht sehr. Sollten wir uns erlauben dürfen, dem geehrten Herrn Verf. und der Verlagshandlung noch einen Rath zu geben, so würde es gewiss der zu wünschenden möglichst weiten Verbreitung dieser Tafeln sehr förderlich sein, wenn auch schon den Exemplaren der jetzigen dritten Auflage bei ihrer Versendung etwa noch ein halber Bogen beigelegt würde, welcher die Tafel für das Höhenmessen mit dem Barometer, die Tafel für die Erhebung des scheinbaren über den wahren Horizont, die Geschwindigkeit des Schalls, die Expansivkraft des Wasserdampfs nicht für wiener, sondern für französisches (metrisches) Maass berechnet enthielte. Bei der Vergleichung der Längen- und Flächenmaasse mag immer die Wiener Klafter zum Grunde gelegt werden, was nach unserer Meinung der allgemeineren Einführung der Tafeln kein wesentliches Hinderniss entgegen setzt. Aber die Beifügung der oben genannten kleinen Tafeln für französisches Maass scheint uns leicht zu bewerkstelligen und nöthig zu sein, wenn diese Tafeln auch ausserhalb Oesterreich sich den allgemeinen Eingang verschaffen sollen, welchen sie nach unserer Meinung so sehr verdienen. Liessen sich endlich den folgenden Ausgaben auch noch die in vielen Fällen so nützlichen Gaussischen Logarithmen beifügen, so würde den Tafeln dadurch noch ein besonderer Vorzug gesichert werden.

Digitized by Google

Geometrie.

Erster Cursus der Planimetrie. Für Gymnasien, Real- und Bürgerschulen, so wie zum Gebrauche für Hauslehrer und beim Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. August Wiegand, Oberlehrer an der Realschule zu Halle. Zweite, verbesserte und durch einen Anhang vermehrte Auflage. Mit zwei Kupfertafeln. Halle. 1847. 8. 10 Sgr.

Das baldige Erscheinen einer zweiten Auflage dieses empfehlenswerthen Lehrbuchs ist der beste Beweis für dessen Brauchbarkeit. Zu durchgreifenderen Umgestaltungen hat der Herr Vf. keine Veranlassung gefunden, aber in einem Anhange eine Reihe von Lehrsätzen und Aufgaben als Materialien zur Uebung beigefügt.

Die Lehre von den geradlinigen Gebilden in der Ebene. Ein Versuch einer systematisch-elementarischen Entwicklung der sogenannten Planimetrie, Goniometrie und Trigonometrie, der Anfangsgründe der analytischen Geometrie u. s. w. von Rudolf Wolf. Zweite vermehrte Ausgabe. Bern u. St. Gallen. 1847. 8. 15 ggr.

Die erste Ausgabe dieser sehr zu empfehlenden Schrift ist im Liter. Ber. Nr. III. S. 53. angezeigt worden, und das baldige Erscheinen einer zweiten Ausgabe derselben hat das dort über dieselbe ausgesprochene günstige Urtheil vollkommen bestätigt; auch scheint dieselbe daher die allgemeinere Verbreitung, welche wir ihr damals wünschten, gefunden zu haben. Ihre Anlage ist mit Recht im Ganzen völlig dieselbe geblieben, und auch jetzt noch besteht ihr Hauptverdienst nach unserer Ansicht darin, dass sie die Ergebnisse und Behandlungsweisen der sogenannten neueren Geometrie auf eine sehr verständige Weise für die Zwecke des mathematischen Elementar-Unterrichts zu benutzen und in denselben einzuführen sucht, dabei aber auch den analytischen Methoden, sowohl in der Geometrie als auch in der Trigonometrie, diejenige Berücksichtigung zu Theil werden lässt, welche denselben in jeder Beziehung so sehr gebührt, namentlich für die Schüler, welche dereinst auf der Bahn der Mathematik weiter fortzuschreiten oder auch deren Anwendung in irgend einem praktischen Fache sich zuzuwenden gedenken. In dieser Beziehung hat der Herr Vf. mit Recht in der zweiten Ausgabe noch etwas mehr gethan als in der ersten und namentlich die Trigonometrie noch weiter ausgeführt, auch Einiges über die Kegelschnitte beigebracht, und in einem dritten Anhange die wichtigsten Sätze der Raum-Geometrie beigefügt, so dass gewiss jeder Schüler, welcher sich den Inhalt dieses Büchleins vollkommen zu eigen gemacht und dabei namentlich auch noch in der Auflösung recht verschiedenartiger geometrischer und trigonometrischer Aufgaben sich vielfach geübt hat, von der Schule sowohl einen grossen Schatz geometrischer

Kenntnisse für das Leben überhaupt, als auch eine hinreichende Vorbereitung, um mit Erfolg sich dem Studium der höheren Theile der Mathematik zuwenden zu können, mitnehmen wird. Wir empfehlen daher auch diese zweite Ausgabe des vorliegenden Büchleins angelegentlichst zu allgemeinerer Berücksichtigung, wie wir dies schon bei der ersten Auflage gethan haben.

Ueber die Inhaltsberechnung der Körper nach einer einzigen Formel. Mit besonderer Rücksicht auf die Praxis bearbeitet von W. Ligowsky, Feuerwerker in der 7ten Artillerie-Brigade. Berlin. 1847. 8. 9 Sgr.

Wegen dieser Schrift verweisen wir auf die Einleitung zu der im nächsten Hefte des Archivs (Thl. X. Heft 3. S. 260.) abgedruckten Abhandlung Nr. XXVIII., und können uns hier einer weitern Besprechung derselben enthalten.

Dissertatio mathematica de quibusdam curvarum affinitatibus. Auctor Johannes Gerardus Henricus Swellengrebel, Rheno-Trajectinus. Trajecti ad Rhenum. MDCCCXLVII. 4.

Die auf den holländischen Universitäten erscheinenden Dissertationen zeichnen sich vor den, namentlich hin und wieder auf manchen deutschen Universitäten erscheinenden Gelegenheitsschriften dieser Art durch eine besondere Sorgfalt, mit welcher sie verfasst werden, durch ihre Gründlichkeit und ihre Ausdehnung, die sie öfters zu wirklichen Büchern anwachsen lässt, sehr vortheilhaft aus. Zu diesen sehr gründlichen und eine grössere Ausdehnung habenden Dissertationen gehört auch die vorliegende 13 Bogen mit 4 Figurentafeln starke Schrift, welche jedenfalls sehr verdient, in einem weitern Kreise, als bei solchen Schriften gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, bekannt zu werden, und einen sehr erfreulichen Beweis von der Gründlichkeit der Kenntnisse ihres Vfs. ablegt. Der Titel der Abhandlung lässt schon den Zweck derselben deutlich erkennen, indem nämlich der Verfasser die Curven, welche durch gewisse Gleichungen analytisch ausdrückbare Verwandtschaften mit einander haben, einer genaueren Untersuchung unterwirft, und also die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, welche bekanntlich in neuerer Zeit vorzugsweise bei geradlinigen Systemen betrachtet worden sind, auch auf Curven überträgt. Um den Zweck des Vfs. möglichst deutlich mit dessen eigenen Worten den Lesern des Archivs vor Augen zu legen, wollen wir ausser dem Inhaltsverzeichnisse auch noch die Einleitung hier vollständig mittheilen, woraus zugleich auch erhellen wird, dass der Vf. den Arbeiten deutscher Mathematiker besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat.

Ordinis conspectus.

Introitus. — Caput I. De affinitate $xx'=1$, $yy'=1$. — Caput II. De affinitate $x=x'$, $yy'=1$. — Caput III. De affinitate $\varphi=\varphi'$, $rr'=1$. — Caput IV. De affinitate $\left(\frac{y}{\alpha+x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha+x'}\right)=1$. $\left(\frac{y}{\alpha-x}\right)\left(\frac{y'}{\alpha-x'}\right)=1$.

Digitized by Google

Introitus.

Lineae alicujus *HCG* *) formam si analytica formula indicare velimus, notum est, ita hoc potissimum fieri solere, ut rectas duas fixas fingamus XX' et YY', quas *coordinatarum axes* dicimus, distantias autem *CD* et *CE*, quibus figurae propositae punctum quodlibet *C* ab axibus hisce distet, puncti illius *C abscissam* et *ordinatam* sive ejusdem *coordinatas* vocemus. Aequatio jam si proponitur aliqua $f(x,y)=0$, mutua prodit coordinatarum relatio, h. e. series prodit punctorum, quibus linea proposita *GCH* constet. *Coordinatarum* vero notio, — ut monuit inter alios Drukkenmüller, *die Uebertragungsprincipien der analytischen Geometrie* pag. 1, — latius spectat: Variabilia enim si fingamus quaelibet quanta u et v — sive sint lineae sive anguli sive numeri — quaecumque inter variabilia ista proponitur aequatio $f(u,v)=0$ sive $v=F(u)$, si alteri coordinatae u cunctos deinceps tribuamus valores a, a', a'', etc., seriem quamdam profert rerum recte definitarum

$$u=a \quad v=F(a)$$
$$u=a' \quad v=F(a')$$
$$u=a'' \quad v=F(a'')$$

quas, Druckenmüllero praeeunte II. pag. 4, *elementa* vocemus. *Elementum* istiusmodi si punctum lineamve aliamve quamdam indicat rem geometricam, elementorum ista series sive aequatio proposita $f(u,v)=0$ lineam quamdam indicare solet: cujus rei apud Druckenmüllerum II. et apud Plückerum **) exempla occurrunt bene multa. Duo jam eligamus istiusmodi *elementorum* genera: u et v, u' et v': eandemque functionem f primum horum, deinde illorum mutuam relationem indicare statuamus: duae ita prodibunt lineae $f(u,v)=0$ et $f(u',v')=0$, quae, si elementa u' et v' ex elementis u et v originem ceperint adeoque aequatione quadam $F(u,v,u',v')=0$ vel duabus aequationibus $F(u,v,u',v')=0$ et $F(u,v,u',v')=0$ cum illis cohaereant, ipsae quoque erunt secum invicem affinitate quadam conjunctae. Ex innumeris istis coordinatarum mutuis relationibus simplicissimam eligamus hancce, qua constans sit analogarum coordinatarum productum: figurarum oritur ita affinitas, quam aequationes repraesentant $uu'=A^2$, $vv'=B^2$, aliave earumdem affinitas, aequationibus $u=u'$, $vv'=B^2$ indicata. Quarum affinitatum posterior, si ponamus $B=1$ coordinatasque u et v orthogonales esse h. e. u abscissam x, v contra applicatam y denotare statuimus, eadem illa est relatio $x=x'$, $yy'=1$, de qua cl. Verdam egit in Commentariis Institut. Belgici vol. XII. pag. 67—93. Sin alium statuamus coordinatarum u et v significatum, relatio proposita $u=u'$, $vv'=B^2$ aliam denotat figurarum affinitatem, ab affinitate modo memorata $x=x'$, $yy'=1$ plane diversa, quod ad mutuam analogarum asymptotarum relationem vel quod ad reliquas attinet geometricas analogarum figurarum qualitates.

---

*) Die Figur wird sich Jeder leicht selbst zeichnen können.

**) *Analytische Entwickelungen, System der analytischen Geometrie,* et alibi.

Digitized by Google

At vel sic tamen formulae analyticae $f(u, v, \frac{du}{dv}, \ldots u', v', \frac{du'}{dv'} \ldots)$ $=0, f(u, v, \frac{du}{dv}, \ldots u', v', \frac{du'}{dv'} \ldots)=0$, etc. quae coordinatarum relatione proposita $u=u'$, $vv'=B^2$ e figurarum affinitate $x=x'$, $yy'=B^2$ sequebantur, intactae in nova affinitate permanent, sed ut eas alio sensu interpretemur requirunt. Generales igitur figurarum affinitates propositas — $uu'=A^2$, $vv'=B^2$ et $u=u'$, $vv'=B^2$ — si in una aliqua coordinatarum u et v definitione consideraverimus, duplicem triplicemque hinc fructum hauriri licebit ea agendi ratione, quam commendat Plückerus, *System der analytischen Geometrie*, pag. 48.: „ . . . . *so können wir auch den Symbolen irgend einer vorliegenden analytischen Beweisführung verschiedene Coordinaten-Bedeutung beilegen, und erhalten alsdann eben so viele geometrische Sätze.*"

De priore igitur videamus e generalibus affinitatibus propositis, h. e. de affinitate, quam aequationes indicant $uu'=A^2$, $vv'=B^2$. Quum autem, generalis hujus affinitatis qualitates quid significent, sit ita maxime perspicuum, si u et v orthogonales designent sive vulgares coordinatas, affinitatem nostram ea hypothesi interpretemur, ut u abscissam x, v contra applicatam y denotet.

Dies wird gewiss hinreichend sein, um die Leser des Archivs sowohl von dem Zwecke dieser Schrift in der Kürze mit möglichster Deutlichkeit zu unterrichten, als auch, wie wir wünschen, zur verdienten Beachtung derselben zu veranlassen.

Praktische Geometrie.

Vorschule der praktischen Geometrie. Bearbeitet von Dr. ph. Heinrich von Bünau, Lehrer der Mathematik an der Königlichen Gewerb- und Baugewerken-Schule zu Chemnitz. Mit 20 Kupfertafeln. Leipzig. 1847. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Eine recht deutliche, ganz elementare, nur die einfachsten Kenntnisse der ebenen Geometrie und Trigonomntrie und elementaren Algebra voraussetzende Anleitung zur gewöhnlichen Feldmesskunst, die Real-, Bürger- und Gewerbschulen mit Recht zur Beachtung empfohlen werden darf.

Mechanik.

Leonhard Euler's Mechanik oder analytische Darstellung der Wissenschaft von der Bewegung, mit Anmerkungen und Erläuterungen herausgegeben von Dr.

Digitized by Google

J. Ph. Wolfers (astronomischen Rechner an der Königl. Sternwarte zu Berlin). Erster Theil. Greifswald. 1848. 8. 2 Thlr. 15 Sgr.

Euler's Werke sind sämmtlich klassisch, und kein Mathematiker darf dieselben auch jetzt noch ungelesen lassen. Die Originale sind entweder gar nicht mehr oder nur schwer auf dem Wege des Buchhandels zu beziehen, weshalb auch, so viel wir wissen, die Petersburger Akademie der Wissenschaften eine neue Ausgabe der sämmtlichen Werke dieses grossen Mathematikers vorbereitet; ausserdem sind dieselben sämmtlich lateinisch verfasst, und daher namentlich für manchen eine mehr praktische Richtung verfolgenden Mathematiker, oder überhaupt für des Lateinischen unkundige Techniker, nicht lesbar. Deshalb sind gute Uebersetzungen derselben jedenfalls sehr wünschenswerth, ja, man kann mit Recht sagen, ein wahres Bedürfniss auf dem Felde der mathematischen Literatur, wobei man nur die in jeder Beziehung grosse Wichtigkeit aller dieser Werke nicht aus den Augen lassen darf. Die rein analytischen Werke, namentlich die „Introductio in Analysin infinitorum", die „Institutiones calculi differentialis" und die „Institutiones calculi integralis" sind bekannter als die übrigen Werke, und schon mehrfach, namentlich von Michelsen und Salomon, in's Deutsche übersetzt. Die der Mechanik und Dioptrik gewidmeten Werke sind weniger bekannt als die rein analytischen Werke und in's Deutsche noch nicht übertragen worden. Eine vollständige Uebersetzung der Dioptrik würden wir aus mehreren Gründen, deren Entwickelung nicht hierher gehört, widerrathen; übrigens aber hat ja schon Klügel bekanntlich in seiner Analytischen Dioptrik eine Art Auszug aus diesem drei Quartbände starken Werke geliefert, und dadurch für diejenigen, welche den damaligen Zustand der Dioptrik kennen lernen wollen, vollständig und nach unserer Ueberzeugung auf eine sehr zweckmässige Weise gesorgt. Es sind also eigentlich unter den grösseren Werken nur die „Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes" und die der Mechanik gewidmeten Werke noch nicht übersetzt *). Die in der ersteren Schrift niedergelegten Resultate erhält man jetzt bekanntlich leichter durch die allgemeinen Methoden der Variationsrechnung, und es früge sich daher, ob eine Uebersetzung dieser Schrift, für so schön wir dieselbe auch nach unserer vollkommensten Ueberzeugung halten, jetzt noch zeitgemäss sein möchte, wenn man nicht etwa eine vollständige Uebersetzung aller Euler'schen Werke liefern wollte. Dagegen haben wir eine Uebersetzung der die Mechanik betreffenden Werke immer für sehr wünschenswerth gehalten, und zwar aus folgenden Gründen. Man kann nicht leugnen, dass gerade die Mechanik derjenige Theil der mathematischen Wissenschaften ist, dessen Gestalt sich seit Euler's Zeiten am mei-

*) Einzelne die Mechanik flüssiger Körper betreffende Abhandlungen Eulers hat früher Brandes übersetzt, unter dem Titel: Eulers Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung flüssiger Körper. übersetzt mit Zusätzen von Brandes. Leipzig. 1806., welches Werk aber nicht in die Kategorie der grössern Euler'schen Werke gehört.

Digitized by Google

sten verändert hat, und **Euler's** Mechanik wird durch die Darstellung dieser Wissenschaft in den Werken der neueren, namentlich französischen Mathematiker, was wahrhaft philosophische Darstellung, Erstrebung der höchsten Allgemeinheit in den Grundgesetzen und der daraus gezogenen Folgerungen, was endlich auch die Systematik und die völlig rein analytische, sich von jeder durch Figuren gewährten Anschauung frei machende Darstellung betrifft, ganz unzweifelhaft weit überraget. Aber eben diese grosse Allgemeinheit erschwert das Studium der Mechanik für denjenigen, der sich zuerst demselben zuwendet, sehr, und zwar um so mehr, weil diese über unser Lob erhabenen neueren Werke es wegen der grossen Allgemeinheit, die sie zu erstreben suchen, meistens verschmähen, dem Leser durch Figuren und einen Reichthum von einzelnen Beispielen und Aufgaben zu Hülfe zu kommen. Ganz das Gegentheil hiervon finden wir in den Euler'schen, der Mechanik gewidmeten Werken. Erstens im Allgemeinen eine Darstellung nach Euklidischer Methode, welche ohne alle Widerrede namentlich dem Anfänger das Verständniss sehr erleichtert; ferner eine nach unserer Ueberzeugung gerade hauptsächlich in diesen Euler'schen Werken äusserst schöne Verbindung der geometrischen und analytischen Methode, welche Alles zur vollkommensten Anschaulichkeit zu bringen sucht, eine Methode, durch die bekanntlich auch neuerlich Miss **Sommerville** in ihrer sehr schönen **Mechanic of Heavens** die **Mécanique céleste** weniger mit den rein analytischen Methoden vertrauten Lesern näher zu bringen gesucht hat; und endlich ein überaus grosser Reichthum höchst instructiver Beispiele und mechanischer Aufgaben, wie man ihn, so weit wenigstens unsere Kenntniss der betreffenden Literatur reicht, in keinem andern derartigen Werke findet: dies sind die Eigenschaften, welche auch gegenwärtig noch das Studium der Euler'schen, die Mechanik betreffenden Werke höchst lehrreich machen, und durch dasselbe nach unserer Ueberzeugung die beste Vorbereitung gewähren, um dann das Studium der neueren rein analytischen Werke ungehindert verfolgen zu können. Ausserdem wird aber eben wegen der jetzt hervorgehobenen Eigenschaften das Studium der Euler'schen Werke Praktikern sehr zu empfehlen sein; denn wenn dieselben freilich auch aus diesen Werken, was auch deren Zweck nicht ist und sein soll, keineswegs lernen, eine Maschine zu berechnen, so wird doch ihnen in denselben die beste Vorschule für weitere specieller auf ihr eigentliches Fach gerichtete Studien jedenfalls dargeboten. Dies sind die Gründe, wegen welcher wir das Erscheinen dieser Uebersetzung freudigst begrüsst haben.

Was die Uebersetzung selbst betrifft, so sieht man es ihr auf den ersten Blick an, dass sie nicht aus einer jener Uebersetzungsfabriken, die jetzt oft ganz unnütze Uebersetzungen mathematischer Schriften dutzendweise zu Tage fördern, hervorgegangen, sondern das Resultat einer langen, eifrigen und hingebenden Beschäftigung mit dem Euler'schen Werke ist, wofür namentlich auch die fast fünf Bogen füllenden Anmerkungen und Erläuterungen und das sehr sorgfältig und vollständig ausgearbeitete Inhaltsverzeichniss nach den einzelnen Aufgaben und Sätzen überhaupt, welches im Originale ganz fehlt, zum Beweise dienen. Fehler im

Digitized by Google

Originale, falsche Bezeichnung der Paragraphen in demselben sind überall, wo sie sich fanden, verbessert worden, woher es auch kommt, dass die Nummern der Paragraphen in der Uebersetzung mit denen im ersten Theile des Originals, welchem der erste Theil der Uebersetzung sonst ganz entspricht, nicht völlig übereinstimmen. Die Anmerkungen und Erläuterungen des Herrn Uebersetzers sind mit Recht von der Uebersetzung selbst ganz geschieden, auch nicht unter den Text gesetzt, sondern in einem Anhange beigefügt worden, so dass wir also hier, wie es schon die Achtung vor einem Manne wie Euler gebot, bis auf die Sprache ganz den wahren Euler vor uns haben, und die äussere Ausstattung, rücksichtlich des Papiers, des Drucks und der Figurentafeln, ist in jeder Beziehung eine würdige zu nennen; auch ist der Preis im Verhältniss zu dieser äusseren Ausstattung und der Stärke von 31¼ Druckbogen und vier Figurentafeln niedrig gestellt. Daher zweifeln wir nicht, dass jeder theoretische Mathematiker oder Praktiker, welcher das Original der Euler'schen Mechanik noch nicht besitzt, oder den die Sprache, in welcher dasselbe ursprünglich verfasst ist, hindert, sich den aus dem Studium eines jeden Werkes dieses grossen Mathematikers hervorgehenden Genuss zu verschaffen, sich in den Besitz dieser in jeder Beziehung empfehlenswerthen Uebersetzung setzen wird, und schliessen mit dem Wunsche, dass der Herr Uebersetzer das mathematische Publikum nicht zu lange auf die Fortsetzung warten lassen möge.

Studien der Mechanik und Physik von Hermann v. Kauffmann. Erstes Heft. Die Statik der Linie. Kopenhagen. 1846. 4. 12 Sgr.

Nach einer in der Versammlung deutscher Naturforscher zu Kiel im Jahre 1846 gehaltenen Vorlesung als Vorrede enthält diese Schrift eine: „Die Statik der krummen Linie" überschriebene analytische Abhandlung, welche bei der Versammlung deutscher Naturforscher zu Nürnberg im Jahre 1845 vorgetragen worden ist.

Praktische Mechanik.

Bewegung der Wagenzüge auf atmosphärischen Eisenbahnen nach den Grundsätzen der Mechanik beurtheilt von J. W. v. Deschwanden, Lehrer an der Cantonsschule zu Zürich. Zürich. 1846. 8. 26¼ Sgr.

Der Herr Vf. legt in dieser Schrift eine gute Kenntniss der theoretischen und praktischen Mechanik an den Tag, und wir glauben daher dieselbe solchen Mechanikern, welche vor einem grösseren, bei dergleichen Untersuchungen aber, wenn sie mit Gründlichkeit angestellt werden sollen, natürlich nicht zu umgehenden Formelnreichthume nicht erschrecken, aus Ueberzeugung zur Beachtung empfehlen zu dürfen.

Digitized by Google

Astronomie.

Études d'Astronomie stellaire. Sur la voie lactée et sur la distance des étoiles fixes. Rapport fait a son Excellence M. le Comte Ouvaroff, Ministre de l'instruction publique et Président de l'Académie Impériale des sciences, par F. G. W. Struve, Directeur de l'observatoire central de Russie et Membre de l'Académie. St.-Pétersbourg. 1847. (Für die astronomischen Nachrichten besonders abgedruckt.)

Von grossem allgemeinen Interesse ist besonders der historische Theil dieser Schrift, welcher sich über die Untersuchungen und Ansichten über den Fixsternhimmel von Copernikus, Galilei, Keppler, Huyghens, Kant, Lambert, Michell, Herschel und anderer Astronomen bis auf die neueste Zeit in einer sehr ansprechenden und gründlich unterrichtenden Darstellung verbreitet. Der übrige Theil betrifft die eigenen Untersuchungen und Beobachtungen des berühmten Directors der Poulkovaer Sternwarte über denselben Gegenstand. Ueber die vermeintliche und gleich bei ihrer Bekanntmachung vielfach bezweifelte Entdeckung einer Centralsonne, von der bekanntlich namentlich in populären astronomischen Schriften und belletristischen Blättern viel Redens gemacht, und dadurch das nicht urtheilsfähige Publikum vielfach irre geführt worden ist, äussert sich Herr v. Struve p. 47. auf folgende Art: „M. Maedler de Dorpat a envisagé, depuis, le mouvement propre des étoiles sous un point de vue opposé. Il croit que les Pleïades forment le groupe central du système de la voie lactée, et que la plus brillante étoile de ce groupe, Alcyone, peut être regardée comme soleil central de la voie lactée, autour duquel toutes les étoiles se meuvent avec une vitesse moyenne angulaire identique, quelle que soit la distance linéaire au corps central, et l'inclinaison de l'orbite. Une hypothèse analogue a été énoncée par Sir J. Herschel en 1833, comme celle qui rend possible la stabilité du système d'un amas globulaire, dans lequel un très grand nombre d'étoiles, de même grandeur et uniformément espacées, se trouvent réunies. En reconnaissant la hardiesse de l'application de cette hypothèse au système de la voie lactée entière, je crois qu'elle est beaucoup trop hasardée pour l'état actuel de la science, et qu'elle est exposée à des objections très graves, soit théoriques, soit du coté des phénomènes célestes.“

Sonnensystem. Bewegungen und Bahnen der Gestirne nach einer neuen Auffassung. Von Hermann Milberg. Berlin. 1847. 8.

Wir bekennen gern, dass der Inhalt dieser Schrift entweder über oder unter unserm Horizonte ist.

Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen, von Dr. Wilhelm Olbers. Mit Berichtigung und Erweiterung

Digitized by Google

der Tafel und Fortsetzung des Cometen-Verzeichnisses bis zum Jahre 1847, von Neuem herausgegeben von J. F. Encke, Director der Berliner Sternwarte. Mit dem Bildniss von Olbers und einer Figurentafel. Weimar. 1847. 8. 2 Rthlr.

Ein neuer Abdruck der bekannten classischen Abhandlung von Olbers über die Berechnung der Cometenbahnen aus drei Beobachtungen in würdigster äusserer Ausstattung, mit dem wohlgetroffenen Bildniss von Olbers. Die sehr bedeutenden Zusätze, welche diese neue Ausgabe der jedem Astronomen völlig unentbehrlichen Olbers'schen Abhandlung, durch deren Besorgung der Herr Herausgeber sich ein grosses Verdienst erworben hat, erhalten hat, sind auf dem Titel angegeben. Die Barker'sche Cometentafel für die parabolische wahre und mittlere Bewegung hat Herr Stud. Luther von Neuem berechnet, und die Cometentafel hat Herr Dr. Galle zusammengestellt und bis zum Jahre 1847 fortgeführt. Verschiedene von Olbers selbst herrührende Zusätze zu seiner Abhandlung sind nebst noch einigen anderen Tafeln, einer Erläuterung der Berechnung und des Gebrauchs der Tafeln, und einer summarischen Uebersicht der bequemsten Formeln zur Berechnung einer Cometenbahn ebenfalls beigefügt, so dass diese neue Ausgabe der Olbers'schen Abhandlung in der That als ein vollständiges Repertorium alles dessen zu betrachten ist, was einem Berechner von Cometenbahnen in theoretischer und praktischer Rücksicht zu wissen nöthig ist und zur Hand sein muss, wenn dieses Geschäft mit günstigem Erfolg ausgeführt werden soll. Endlich hat der Herr Herausgeber durch die in der Vorrede zur neuen Ausgabe zugleich gegebene im höchsten Grade ansprechende Schilderung der Persönlichkeit Olbers's und durch das von Herrn d'Arrest zusammengetragene vollständige Verzeichniss der Schriften dieses grossen Astronomen allen Mathematikern und Astronomen ein sehr angenehmes Geschenk gemacht, und wir zweifeln daher nicht, dass sich gewiss ein Jeder, wer an diesen Studien irgend Interesse nimmt, sogleich in den Besitz dieser vortrefflichen Schrift setzen wird. Wie viele Vermehrungen die neue Ausgabe gegen die ältere erhalten hat, lassen schon die Seitenzahlen erkennen, indem die ältere Ausgabe ausser der Vorrede 80, die neue dagegen, ebenfalls ausser der XXXVI Seiten starken Vorrede, 251 Seiten umfasst.

Verzeichniss aller bis zum Jahre 1847 berechneten Kometenbahnen. Entworfen von G. A. Jahn, Dr. Phil., Director der astronomischen Gesellschaft zu Leipzig u. s. w. Leipzig. 1847. Queer Fol. 1 Rthlr. 15 Sgr.

Dieses Verzeichniss scheint uns durch das Erscheinen der vorher angezeigten neuen Ausgabe der Abhandlung von Olbers über die Berechnung der Cometenbahnen ganz entbehrlich gemacht worden zu sein, um so mehr, da die vorliegenden Paar Bogen 1 Rthlr. 15 Sgr. kosten, jene treffliche Schrift dagegen mit ihrem reichen Inhalte für nur 2 Rthlr. zu erhalten ist.

Die Erde in ihrem Verhältniss zum Sonnensystem und als planetarisches Individuum, oder Versuch einer

Digitized by Google

astronomischen und physikalischen Geographie. Nach den besten Hülfsquellen zum Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. J. Meyer. Zürich. 1847. 8. 3 Rthlr. 3 Sgr.

Ein sich recht gut lesendes, übrigens ganz populäres Buch, dessen freilich etwas hoher Preis seiner weiteren Verbreitung wahrscheinlich einigermassen hinderlich sein wird.

Das Dipleidoscop. Seine Theorie, Einrichtung und Anwendung, von Dr. Franz Heinen, Realschul-Direktor. Düsseldorf. 1847. 8. 10 Sgr.

Diese kleine Schrift enthält eine sehr deutliche Beschreibung und ganz elementar, hauptsächlich bloss mit Hülfe elementar-geometrischer Sätze und Betrachtungen durchgeführte Theorie des Dipleidoscops, und ist allen denen, welche sich mit diesem schönen kleinen Instrumente näher bekannt machen wollen, sehr zu empfehlen. Nur wo es unerlässlich nöthig war, hat sich der Herr Vf. auch trigonometrischer Betrachtungen bedient, und am Ende noch einen analytischen Beweis für den Satz beigefügt, dass die Deckung erfolgt, wenn eine durch den Strahl einer Kante des Prismas parallel gelegte Ebene mit dem Vorderglase einen Winkel bildet, welcher dem Winkel des Prismas gleich ist, wobei jedoch der Einfachheit wegen angenommen worden ist, dass das Prisma rechtwinklig, übrigens aber beliebig sei. Die Einfachheit der geometrischen Betrachtung in dieser Schrift ist vorzüglich bedingt worden durch einen verallgemeinerten Ausdruck der Grundgesetze der Zurückwerfung und Brechung des Lichts, welcher mit den eignen Worten des Herrn Vfs. so lautet: „Der Neigungswinkel des zurückgeworfenen Strahles gegen eine beliebige, durch das Einfallsloth gelegte Ebene ist stets dem Neigungswinkel des einfallenden Strahles gegen dieselbe Ebene gleich; und der Sinus des Neigungswinkels des gebrochenen Strahls gegen eine beliebige, durch das Einfallsloth gelegte Ebene hat zum Sinus des Neigungswinkels des auffallenden Strahles gegen dieselbe Ebene stets ein unveränderliches Verhältniss.“ Beide Sätze sind leicht zu beweisen und verdienen in dieser verallgemeinerten Form häufiger bei optischen Untersuchungen in Anwendung gebracht zu werden. Wir erlauben uns nochmals die Aufmerksamkeit aller derer, welche sich mit dem Dipleidoscop näher bekannt machen und dasselbe selbst zu Zeitbestimmungen anwenden wollen, auf diese kleine Schrift aufmerksam zu machen.

Physik.

Naturphilosophie von Dr. Carl Ludolf Menzzer. Erster Band. Allgemeine Einleitung in die Naturphilosophie und Theorie der Schwere. Halberstadt. 1847. 8. 1 Rthlr.

Mathematiker und mathematische Naturforscher werden sich wahrscheinlich nicht die Mühe nehmen, dieses Buch aufmerksam

Digitized by Google

zu lesen. Vielleicht macht der Herr Vf., was wir ihm von Herzen wünschen, bei den Philosophen mehr Glück.

Recherches sur les étoiles filantes par Mr. Coulvier-Gravier et Saigey. Introduction historique. A Paris et a Alger. 1847. 8. 1 Rthlr. 20 Sgr.

Wir lernen aus diesem Buche, dessen Vf. Herr Saigey ist, zuerst einen Mann, Herrn Coulvier-Gravier von Reims, der sich aber seit dem November 1843 zu Paris aufhält, kennen, welcher mit der grössten Beharrlichkeit schon seit dem Jahre 1811 sich ununterbrochen der Beobachtung der Sternschnuppen gewidmet hat und, wie Herr Saigey, der Verfasser dieser Introduction historique, sagt, abandonnait périodiquement ses occupations commerciales, et faisait douze voyages de Reims, théâtre de ses observations, à Paris, centre des lumières et des commissions peu diligentes. Fatigué de toutes ces lenteurs, M. Coulvier-Gravier prit un parti extrême: il brula ses vaisseaux, ou, en termes plus vulgaires, il abandonna son industrie pour se vouer exclusivement à l'étude des météores; et, afin de rendre sa résolution plus irrevocable, il vint avec sa famille à Paris, à proximité de cet observatoire royal, ou il croyait trouver les moyens de continuer ses laborieuses recherches. Nun, wie dem auch sein mag, so haben wir in diesem Buche eine ganz neue und höchst vollständige Bearbeitung der Sternschnuppenprobleme, hauptsächlich von der praktischen Seite, zu erwarten, und was die vorliegende Introduction historique betrifft, so können wir nicht anders sagen, als dass der Vf. derselben mit allem, was bisher auf diesem Felde, namentlich auch in Deutschland, geleistet worden ist, höchst vollständig vertraut ist, können daher auch dieselbe einem Jeden, wer sich mit diesen Leistungen auf eine möglichst leichte und übersichtliche Weise bekannt machen will, als ein ziemlich vollständiges Repertorium empfehlen. Freilich scheinen uns die Leistungen anderer Beobachter nicht immer ganz gerecht beurtheilt zu sein, und dass von Herrn Coulvier-Gravier natürlich alles Heil auf diesem Felde fernerhin allein zu erwarten ist, versteht sich von selbst.

Vermischte Schriften.

The Cambridge and Dublin mathematical Journal. Edited by Wm. Thomson, B. A., F. R. S. E., Fellow of St. Peter's College, Cambridge, and Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. Vergl. Liter. Ber. Nr. XXXV. S. 523.

Nr. X. et XI. On Principal Axes of a Body, their Moments of Inertia, and Distribution in Space. Continued. By R. Townsend. — On Logarithmic Integrals of the Second Order. Part II. By Francis W. Newmann. — On a Problem in Combinations. By the Rev. Thomas Kirkman. — On Symbolical Geometry. Continued. By Sir W. R. Hamilton. — On the Differential

Digitized by Google

Equations which occur in Dynamical Problems. By A. Cayley. — On a Multiple Integral connected with the Theory of Attractions. By A. Cayley. — On the Existence of Roots of Algebraical Equations. By the Rev. H. Goodwin. — On the Forces experienced by small Spheres under Magnetic Influence; and on some of the Phenomena presented by Diamagnetic Substances. By William Thomson. Mathematical Notes. I. Relative to Mr. Newman's paper on Logarithmic Integrals of the Second Order. II. On the Caustic by Reflection at a Circle. III. Solution of a Problem from the Senate House papers for 1847. IV. On a system of magnetic curves. (Nr. XII. will be published on the 1st of November 1847.)

In den Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Tome XIII. IIme Partie. 1846. und T. XIV. Ire Partie. 1847. (M. vergl. Literar. Ber. Nr. XXXIV. S. 506.) finden sich ausser mehreren anderen kleineren Aufsätzen und kürzeren Mittheilungen die folgenden besonders beachtungswerthen mathematischen und physikalischen Abhandlungen.

Tome XIII. IIme Partie. Note sur une extension d'un théorème de M. Cauchy, par M. Timmermans. p. 17. (Es ist dies das wichtige Theorem, wovon im Archiv. Thl. I. S. 364. ausführlich die Rede gewesen ist.)

Sur les proportions de M. Cantfield, l'hercule des États-Unis. Note de M. Quetelet. p. 256. (M. vergl. Liter. Ber. Nr. XXXIV. S. 508.)

Observations de la planète Leverrier, faites à l'observatoire royal de Bruxelles. p. 346.

Note sur une fonction exponentielle, par M. Pagani. p. 347. Der Inhalt dieser Note ist folgender:

„Dans tous les traités d'analyse algébrique on a coutume de n'attribuer à la fonction exponentielle e^x qu'une seule valeur, correspondante à chaque valeur de la variable x. Cependant il est aisé de prouver que cette fonction est susceptible de plusieurs valeurs, dont le nombre peut même aller à l'infini. La formule générale qui les donne toutes est la suivante:

$$e^x = (1+\frac{x}{m})^m(\cos 2k\pi x + \sin 2k\pi x\sqrt{-1}),$$

m étant un nombre entier infiniment grand, k un nombre entier infiniment grand, k un nombre entier quelconque, et π le rapport de la circonférence au diamètre. On démontre aussi que l'on doit avoir:

$$e^{x\sqrt{-1}} = (1+\frac{2k\pi x}{m})^m(\cos x + \sin x\sqrt{-1}).\text{“}$$

Sur la disposition géométrique des parties foliacées des palmiers, lettre de M. le conseiller de Martius, secrétaire de la classe des sciences de l'Académie de Munich, à M. Quetelet. p. 351.

Digitized by Google

Tome XIV. 1re Partie. Nouvelle démonstration de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques, par M. Schaar. p. 79.

Sur les proportions des hommes qui se font remarquer par un excès ou un défaut de taille, par M. Quetelet. p. 138.

In diesem in mehrfacher Beziehung interessanten Aufsatze sagt Herr Quetelet u. A.: „On rapporte que le Suédois qui faisait partie de la garde du grand Frédéric, avoit 2m,52 de hauteur; c'est à la vérité la taille la plus élevée qui ait été constatée d'une manière authentique. On peut donc être remarquable sans atteindre de pareilles proportions.“

Nouvelle démonstration des formules relatives au rayon du cercle osculateur, par M. Pagani. p. 185.

Troisième mémoire sur l'induction, par M. le professeur Élie Wartmann de Genève. p. 187.

Observations géodésiques et magnétiques faites en Autriche pendant l'année 1846, par M. Kreil, directeur de l'Observatoire de Prag (Extrait d'une lettre de M. Kreil à M. Quetelet). p. 286.

Rapport sur un mémoire de M. Meyer, relatif au développement en séries de quatre fonctions (Commissaires M. M. Pagani et Timmermanns). p. 425.

Es sind dies irrationale Functionen von der Form der Function

$$\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=\frac{n}{1+\sqrt{1-n^2}}$$

und ähnlicher.

Description de quelques appareils destinés aux démonstrations expérimentales dans les cours publics; par J. G. Crahay. p. 562.

Es sind dies ein Apparat zur Erläuterung der Gesetze aller Arten des Hebels und der Grundgesetze der Statik überhaupt, ein Apparat zur Erläuterung der Gesetze des Keils, und ein Apparat zur Erläuterung verschiedener aerostatischer Gesetze. Wir glauben die Vorsteher physikalischer Kabinete auf diese, wie es uns scheint, sehr zweckmässig construirten und einen sehr ausgedehnten Gebrauch gestattenden Apparate aufmerksam machen zu müssen.

Digitized by Google

XXXIX.
Literarischer Bericht.

Arithmetik.

Robertson, C. N.: Arithmetic Freed from its only Imperfection by the Correction of the Erroneous Theories of Equation of Payments by Burrow, Cocker, Hatton, Keith, Kersey, Malcolm and Sir Samuel Moreland. 8. 1847. 1 sh.

Traité général et complet, théorique et pratique, du calcul des intérêts composées etc. du calcul des intérêts simples etc. par L. Moulin-Collin. Paris. 1847. 4°.

Elementi di calcolo sublime, proposti da Giorgio nob. Foscolo, primo tenente nell' i. r. corpo degli ingegneri navali, professore di matematica nell' i. r. collegio della marina di Venezia. Venezia. 1846. 8. 5. 22.

Elementär Afhandling om Seriers Convergens. Praes. Mag. Carl Joh. Hill, Math. Professor; Resp. Carl Otto Nathanaël Dahlgren. III. Lund. 1847. 8.

Methodus Cl. Graeffi aequationes numericas altioris gradus solvendi. Praes. Carolus Joh. Hill, Math. Prof.; Resp. Auctor Johannes Christophorus Toll. I. Lundae. 1847. 8.

Geometrie.

Elements of Geometry, with a New Demonstration, not depending on any Postulate, that the Sum of the Angles of a Plane Triangle is equal to Two Right Angles. By J. D. 1847. 8. 3 sh.

Théorie des parallèles, démontrée d'une manière simple et rigoureuse, sans aucune consideration de l'infini; par Achille Lefrançois. Cherbourg. 1847. 8.

Geometrische Ausläufer. Eine Sammlung grösstentheils neuer zusammenhängender Uebungsaufgaben

Digitized by Google

für angehende Mathematiker von Johann Heinrich Traugott Müller, Schulrath und Director des Herzoglichen Realgymnasiums zu Wiesbaden. Erstes Heft, enthaltend 9 Abhandlungen mit 13 Figuren. Halle 1846. 8. 25 Sgr.

Der Herr Vf. hat bei der Herausgabe dieser Abhandlungen eine doppelte Absicht gehabt. Einmal sollen dieselben denen eine Sammlung von Uebungen — Uebungsaufgaben wollen und dürfen wir nicht sagen — darbieten, welche sich selbstthätig mit der Mathematik vertrauter machen und auf die bereits gewonnenen Fundamente weiter fortbauen wollen, damit sie die Fähigkeit erlangen, die Grundwahrheiten der Geometrie in den verschiedensten Beziehungen anzuwenden. Diesen Zweck allein erfüllen indess schon die vielen Sammlungen von Aufgaben, die wir bereits besitzen, unter denen sich keine von den übrigen durch einen besonders hervortretenden, ihr eigenthümlichen Charakter auszeichnet. Bei Weitem die meisten dieser Sammlungen enthalten aber nur lauter abgebrochene und vereinzelt dastehende Sätze, deren Studium zwar erfreut, aber den jüngern Mathematiker allerdings zu zerstreuen und an ein desultorisches Umhersuchen zu gewöhnen leicht Veranlassung werden kann, eine Richtung, welche gewiss keineswegs vortheilhaft ist, weil sie leicht zu einem wissenschaftlichen Naschen führt, während nur ein tieferes Eingehen in irgend einen besonderen Gegenstand gründlich fördert und die geistige Thätigkeit concentrirt. Auf das Letztere nun hat der Herr Vf. mit der vorliegenden Sammlung geometrischer Uebungen hauptsächlich hinwirken wollen, indem er gesucht hat, einen und denselben meistens sehr einfachen Gegenstand nach den verschiedensten Seiten hin zu verfolgen und damit zugleich zu noch weiteren Untersuchungen Veranlassung zu geben. Ausserdem hat er die Betrachtungen auch im Einzelnen noch möglichst gruppirt, um zu einem geordneten Studium die Hand zu bieten und dem Anfänger die nöthigen Ruhepunkte zu gewähren. Der Lehrer, der dieselben etwa für seine Schüler benutzen möchte, würde auch noch aus jener sorgfältigern Gruppirung den Vortheil ziehen können, eine solche einzelne Gruppe zum Gegenstande einer besondern Aufgabe zu machen, wo es an Zeit fehlte, den ganzen Gegenstand zu behandeln. Dass endlich die aufgestellten Sätze bei Weitem zum grössten Theile neu sind, dürfte den obigen Zweck noch in der Beziehung fördern, dass derjenige, welcher schon andere Uebungsbücher benutzt hat. bei der Benutzung des vorliegenden nicht leicht wieder auf ihm Bekanntes stossen, und daher gewiss an den Wahrheiten immer selbst seine Freude haben wird, wenn ihm nur überhaupt der erforderliche mathematische Sinn nicht abgeht, ohne welchen sich aber auch gewiss schon überhaupt Keiner an das Studium eines Buchs wie das vorliegende machen wird.

Mit dem letzteren Umstande steht die zweite Absicht in Verbindung, welche der Herr Vf. bei der Herausgabe seines mit grosser Bescheidenheit Ausläufer betitelten vortrefflichen Buchs hatte. Er wollte nämlich in demselben auch eine Reihe eigenthümlicher geometrischer Untersuchungen veröffentlichen, die gewiss auch für jeden Mathematiker von Fach Interesse haben werden, und sehr zu beachtende Beiträge zum weitern Ausbau

unserer Wissenschaft liefern. Während die Betrachtungen über die Vielecksringe (Nr. I.) ausschliesslich, und die über die Eigenschaften der in den Scheiteln eines Dreiecks auf dessen Seiten errichteten Lothe (Nr. II.), so wie die über den Kreisausschnitt mit seinen Berührungskreisen (Nr. III.) vorzugsweise für den Schüler Interesse haben dürften, aber doch auch überhaupt nicht wenig an sich Bemerkenswerthes darbieten, verdienen gewiss alle übrigen Abhandlungen eine allgemeinere Beachtung. Hierher gehört zuerst der Kreis mit seinen vier gleichgestalteten Berührungsdreiecken (Nr. IV.), der den Gegensatz zum Dreieck mit seinen vier Berührungskreisen bildet, und, so viel wir wissen, noch nirgends näher betrachtet worden ist; ferner die zwei Kreise mit ihren zwei Paaren gemeinschaftlicher Berührungslinien (Nr. V.), die in sich selbst ihren Gegensatz haben, indem man dabei eben so wohl von den beiden Kreisen, als auch von den beiden Linienpaaren ausgehen kann, deren Verbindungsaxe der Durchschnittspunkte das eine Winkelpaar halbirt; eben so das Streifendreieck und Streifenparallelogramm (Nr. III.), worin den geraden Linien Streifen von beliebiger Breite substituirt sind, woraus sich eine Menge, hier nur zum kleineren Theile aufgestellter merkwürdiger Beziehungen ableiten lässt, und gewissermassen ein ganz neuer Theil der Planimetrie resultirt, in welchem die geraden Linien durch Streifen vertreten sind, was zugleich in der Stereometrie ein Analogon findet, indem hier parallelepidale Räume u. s. w. die Kanten ersetzen; endlich hauptsächlich die allgemeinen Betrachtungen über die Stützpunkte *) der Vielecksumfänge (Nr. VIII.), welche bisher noch ganz vernachlässigt worden sind, aber doch ausserordentlich viel Merkwürdiges darbieten, weshalb auch der Herr Vf. mit besonderer Vorliebe bei diesen Betrachtungen verweilt, und diesem Aufsatze mit Recht eine grössere Ausdehnung gegeben hat. Aber auch die beiden noch übrigen Aufsätze über die Eigenschaften der Geraden, welche die Winkel des vollständigen Vierecks halbiren (Nr. VI.), und die Untersuchungen über den Schwerpunkt des Dreiecksumfangs (Nr. VIII.) bieten noch viele bemerkenswerthe Beziehungen dar.

Die Leser des Archivs sehen hieraus, ein wie grosser Reichthum interessanter, grösstentheils ganz neuer Sätze ihnen auf diesen wenigen Bogen geboten wird, und diese in jeder Beziehung ausgezeichnete Schrift verdient daher vollkommen die allgemeinste Beachtung, die ihr auch gewiss nicht entgehen wird. Besonders werden auch alle Lehrer der Mathematik einen vielfachen höchst zweckmässigen Gebrauch von dem ihnen hier vorliegenden reichen

---

*) Eigentlich gleichbedeutend mit Schwerpunkt; weshalb der Herr Vf. den Namen Stützpunkt gewählt hat, würde hier auseinanderzusetzen zu weitläufig sein, und muss in der Abhandlung selbst nachgesehen werden. Ganz in der Kürze wollen wir nur bemerken, dass er bei zwei parallelen Kräften einen Unterschied macht, wenn die Kräfte gleichstimmig und ungleichstimmig parallel sind; im zweiten Falle, meint er, sei kein eigentlicher Schwerpunkt vorhanden, und findet dadurch Veranlassung, die Benennung Stützpunkt einzuführen.

Digitized by Google

Stoffe machen können, und angehende Mathematiker werden aus dem Studium dieser Abhandlungen eine vortreffliche Uebung und eine gewiss sehr fruchtbringende Vorbereitung zu weiteren schwereren Studien schöpfen können. Auch pflichten wir den von dem Herrn Vf. dargelegten Ansichten über die beste Art mathematischer Uebungen vollkommen bei. Blicke doch auch nur jeder Mathematiker einmal auf seine eigene Erfahrung zurück! Dann wird er sich wohl noch mit dem grössten Danke der Früchte erinnern, welche ihm das *zusammenhängende* Studium jeder Euler'schen Abhandlung trug, ganz abgesehen von dem materiellen Inhalte. Diese Abhandlungen müssen immer und immer wieder von Neuem gelesen werden.

Élémens de géométrie déscriptive etc.; par C. Bertaux-Levillain. Paris. 1847. 8. 6. 0.

Leçons nouvelles de géométrie analytique, précédées des Élémens de la trigonométrie; par M. M. Briot et Bouquet. Paris. 1847. 8. 7. 50.

Dissertatio mathematica inauguralis de Lemniscata Bernouillana, quam pro gradu magisterii et doctoratus summisque in Mathesi et Philosophia naturali honoribus ac privilegiis in Academia Lugduno-Batava rite et legitime consequendis publico ac solemni examini submittet David Bierens de Haan, Amstelodamensis. Amstelodami. MDCCCXLVII. 4.

In dieser vierzehn Bogen starken Dissertation hat der Herr Vf. die Theorie der Bernoulli'schen Lemniscate sehr ausführlich und vollständig behandelt, auf eine sehr deutliche und einfache Weise nach einer gemischten analytisch-geometrischen Methode. Je mehr sich bekanntlich in neuerer Zeit die grosse Wichtigkeit der Lemniscaten für verschiedene Untersuchungen und mehrere Theile der Mathematik herausgestellt hat, desto angenehmer muss es den Lesern des Archivs sein, dass ihnen in dieser Schrift ein Mittel dargeboten wird, die Eigenschaften dieser merkwürdigen Curven — wenigstens der Bernoulli'schen Lemniscate — namentlichst auch die neuerlichst aufgefundenen, in ziemlicher Vollständigkeit auf eine leichte Weise kennen lernen zu können, und nicht erst in vielen in Journalen u. s. w. zerstreuten einzelnen Abhandlungen zusammensuchen zu müssen. Der Inhalt der einzelnen Paragraphen ist folgender: §. 1. De Aequatione. §. 2. De Tangente, Normali, Subtangente ac Subnormali. §. 3. De Radio Curvaturae et Evoluta. §. 4. De Quadratura et Areae Multiplicatione ac Divisione. §. 5. De Rectificatione nec non Arcus Multiplicatione et Divisione. §. 6. Observationes diversae. §. 7. De Constructione sive Delineatione et Generatione. — Man sieht hieraus, dass nicht leicht etwas Wesentliches übergangen sein wird. Zugleich aber ist die Arbeit des Herrn Vfs. auch nicht ohne Ausbeute an verschiedenen neuen Sätzen geblieben, worüber wir jedoch hier ausser dieser allgemeinen Andeutung jetzt nichts weiter sagen wollen, weil der Herr Vf. die Güte gehabt hat, diese hauptsächlich auf Neuheit Anspruch machenden Sätze in einem selbstständigen, zu dem Abdruck im Archiv bestimmten Aufsatze

welchen die Leser im nächsten oder wenigstens in einem der nächsten Hefte unserer Zeitschrift finden werden, zusammen zu stellen und grösstentheils mit neuen Beweisen zu versehen, so dass dieser Aufsatz auch ganz unabhängig von der hier besprochenen Dissertation verständlich und an sich von Interesse sein wird. Dass die letztere einen sehr erfreulichen Beweis von der sehr gründlichen mathematischen Ausbildung des Herrn Vfs. liefert, und dass der altehrwürdigen berühmten Hochschule, welcher derselbe seine Bildung verdankt, und deren verdienten Lehrern zu solchen Schülern nur Glück zu wünschen ist, bedarf nach dem Obigen wohl nicht noch der besonderen Erwähnung. Wiederholt aber empfehlen wir die vorliegende Schrift zu allgemeinerer Beachtung, welche dieselbe gewiss in mehr als einer Beziehung vollkommen verdient.

Amiot, B.: Mémoire sur les points singuliers des surfaces, in 4°. (Extrait du tome XXI des mémoires couronnés par l'Académie de Bruxelles). Bruxelles. 1847.

Mechanik.

Polemisches.

Von dem

Herrn Fabriken-Kommissionsrathe A. Brix zu Berlin.

Die Vorrede zur zweiten Auflage der Geodynamik des Herrn Dr. Moritz Rühlmann, Professors an der polytechnischen Schule zu Hannover, enthält einen vom genannten Verfasser gegen mich gerichteten Angriff, den ich nicht ohne Erwiderung lassen darf. Dabei werde ich, mit Vermeidung jeder Persönlichkeit, nur Thatsachen sprechen lassen.

In den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen vom Jahre 1844 habe ich einen Aufsatz über die elementare Berechnung des Widerstandes prismatischer Körper gegen Biegung abdrucken lassen, welcher eben die Presse verlassen hatte, als Herr Professor Rühlmann zur Besichtigung der Gewerb-Ausstellung nach Berlin kam, und auch mir die Ehre seines Besuches schenkte.

Bei einer solchen Gelegenheit erbat sich derselbe ein Exemplar dieser Abhandlung, vorgebend, er sei eben mit der Bearbeitung der zweiten Auflage seiner Geostatik beschäftigt, und da er gerade bis zu dem Kapitel über die Festigkeit der Körper gekommen sei, so wünsche er, dabei meine Arbeit über diesen Gegenstand benutzen zu dürfen.

Natürlich nahm ich nicht den mindesten Anstand, diesem Wunsche sofort zu willfahren; denn ich durfte billig voraussetzen, dass Herr Professor Rühlmann nicht unterlassen würde, schicklicher Weise seine Quelle zu nennen. Als mir daher die im folgenden

Jahre herausgekommene zweite Auflage seines Buches zu Händen kam und ich in demselben meine Arbeit wirklich benutzt fand, so war ich nicht wenig erstaunt, statt aller Quellenangabe, in der zugehörigen Vorrede Folgendes zu lesen:

„In Bezug auf Darstellungsweise als neu, dürfte besonders „das Kapitel über die Festigkeit der Körper erscheinen; eine „nochmehrige Vereinfachung scheint mir hier, ohne der nothwen-„digen wissenschaftlichen Begründung zu schaden, beinahe un-„möglich.“

Ich war hierüber um so mehr erstaunt, als Herr Professor Rühlmann selbst mir dieses Buch mit einem Begleitschreiben voller Höflichkeiten zugesandt hatte! — Und deshalb wird man es begreiflich finden, wenn ich ein gewisses menschliches Gefühl nicht überwinden konnte, sondern demselben gelegentlich Worte lieh, indem ich mich in einer Note zu einem andern Aufsatze, der im fünften Hefte der vorhin genannten Verhandlungen vom Jahr 1845 abgedruckt ist, für die Ehre bedankte, die ein auswärtiger Professor der Mathematik mir durch Benutzung meiner Abhandlung über Biegung prismatischer Körper in seinem Leitfaden der Geostatik erzeigt habe. Dabei erwähnte ich noch, vollkommen der Wahrheit gemäss:

1) dass der Verfasser mit mir von derselben Grundansicht ausgehe;

2) auch die von mir gewählten Beispiele benutze;

3) in der weitern Ausführung aber darin von mir abweiche, dass er nach dem Vorgange von Minding die Theorie der Kräftepaare in Anwendung bringe. Unstreitig werde man — so schliesst meine sehr glimpfliche Aeusserung — seine Verfahrungsweise für neu und eigenthümlich erklären, wie er es in der Vorrede seines Buches beanspruche!

Diese Note hat den Eingangs erwähnten Angriff des Herrn Professors Rühlmann gegen mich hervorgerufen, was ich zur nähern Aufklärung des Sachverhältnisses um so mehr vorausschicken musste, als die Verhandlungen des hiesigen Gewerbe-Vereins in der wissenschaftlichen Welt nur wenig gekannt sein mögen. Ich gehe nun sofort auf eine Erörterung der Argumente ein, die Herr Rühlmann vorbringt, um die in meiner Note dem auswärtigen Professor — als welchen er sich bekennt — gemachten Vorwürfe zu widerlegen.

ad 1) behauptet Herr Professor Rühlmann, ich sei in meiner Abhandlung über die Biegung prismatischer Körper nirgend von einer Grundansicht ausgegangen, welche nicht schon von Poncelet, Navier, Moseley u. A. (in einer Anmerkung wird noch Kuppler genannt) aufgestellt worden wäre.

Mit dieser Behauptung, deren Richtigkeit einstweilen auf sich beruhen möge, wird aber die eigentliche Frage umgangen; denn dass der Herr Professor eine von mir abweichende Grundansicht zum Ausgangspunkte genommen hätte, wird nicht gesagt. Somit giebt er also implicite zu, in dieser Beziehung entweder mit mir, oder — wenn es ihm lieber ist — mit jenen andern Schriftstellern übereinzustimmen. Folglich ist er eingestandener-

Digitized by Google

maassen in dem Princip seiner Entwickelung (S. 143—162 der Geostatik), d. h. in der Benutzung der Trägheitsmomente und des Satzes von der Reduction derselben auf parallele Achsen, nicht neu! — Bringt man damit in Zusammenhang, was Herr Professor Rühlmann ad 3) zugiebt, dass nämlich Minding die Gleichungen für die Biegung eines elastischen Stabes wirklich mit Ziehung der Kräftepaare ableitet, wobei geringe Verschiedenheiten wohl nicht sehr in Betracht kommen können, so fällt offenbar jeder Grund für ihn weg, sein Kapitel über die Festigkeit der Körper in Bezug auf Darstellungsweise (conferatur Vorrede) als neu zu bezeichnen.

Um die vorliegende Frage vollständig zu beleuchten, darf ich die von Herrn Professor Rühlmann ad 1) aufgestellte Behauptung auch hinsichtlich der Beschuldigung, welche sie in Bezug auf mich involvirt, nicht unerörtert lassen. In dieser Hinsicht erlaube ich mir, dem Herrn Herausgeber dieses Archivs *) ein, meinen Vorträgen am Königl. Gewerb-Institute zu Berlin im Jahr 1837 nachgeschriebenes Heft vorzulegen, in welchem unter den §§. 13. und 14. die von mir in Anspruch genommenen Gesetze schon in derselben Weise vorkommen, wie solche in §. 5. meiner Abhandlung veröffentlicht worden sind **). Es genügt dann die einfache Bemerkung, dass die Werke der Schriftsteller, welche Herr Professor Rühlmann mir entgegenstellt, sämmtlich später erschienen sind, um jede ungehörige Verdächtigung zurückzuweisen; ausserdem aber kann ich es Jedem überlassen, der sich näher dafür interessirt, sich durch eigene Vergleichung zu überzeugen, ob und in wiefern die in meiner Abhandlung vorgetragene Behandlung des Biegungsphänomens in jenen Werken ein Vorbild hat finden können.

ad 2) sagt Herr Professor Rühlmann nur, die in seinem Buche benutzten Beispiele seien nicht von mir erfunden, womit er also meinen Vorwurf: dass er die von mir gewählten Beispiele benutzt habe, genügend erledigt zu haben glaubt.

Nicht also — nach meiner Ansicht! Vielmehr muss ich zur vollständigen Erledigung dieses Punktes den Herrn Professor Rühlmann schon um die genaue Angabe der Quelle bitten, aus welcher er die bei ihm unter Zus. 2. zu §. 114. und ebenfalls unter Zus. 2. zu §. 115. seiner Geostatik vorkommenden Aufgaben entnommen hat. Dieselben finden sich in meiner Abhandlung bezüg-

*) Welcher die Richtigkeit vollkommen bezeugt und zu vertreten bereit ist. G.

**) Bei dieser Gelegenheit will ich unter Andern nur darauf aufmerksam machen, dass in dem fraglichen Hefte die bei Herrn Rühlmann unter §. 107. enthaltene Aufgabe in gleicher Behandlungsweise unter §. 8. vorgetragen ist; dass ebenso die Berechnung des Torsionswiderstandes in beiden Schriften auf ganz gleiche Weise, nämlich mit Zuziehung der Trägheitsmomente, durchgeführt wird; dass ferner S. 138. bei Rühlmann und §. 60. des geschriebenen Heftes von Parallelcohäsion die Rede ist, ein Ausdruck, den ich zuerst gebraucht und der englischen Benennung „Detrusion“ nachgebildet habe u. s. w. Es ist dies ein eigenthümliches Zusammentreffen, das ich nur deshalb hier hervorhebe, um in künftigen Fällen gegen ähnliche Beschuldigungen, wie die obige, gesichert zu sein. B.

Digitized by Google

lich unter §. 11. und §. 10., die zweite aber ausserdem noch in dem beigefügten Vortragshefte unter §. 18., wo die nächstfolgenden §§. noch Mehreres dergleichen enthalten. Dass diese Aufgaben aber vor mir schon von andern Schriftstellern behandelt worden sind, möge Herr Professor Rühlmann speciell nachweisen, wenn er mir die Priorität bestreiten will.

Als characteristisch für die Beurtheilung der in Rede befindlichen Sache führe ich ferner noch an, dass der genannte Verfasser der Geostatik meiner mündlichen Mittheilung auch die Aufgabe verdankt, die er in dem Zusatze zu §. 103. mit einem Kräftepaare einleitet, dann aber bis auf Weiteres auf sich beruhen lässt. Dass dieses Kräftepaar 22 Seiten weiter (in Zus. 3. zu §. 114.) nichts Anderes als ein falsches Resultat herausbringt, ist nicht meine Schuld, sondern allein der eigenthümlichen Betrachtungsweise beizumessen, welche unwillkührlich an das englische: „some Professors are mere Guessers" erinnert! — Diesen Umstand überging ich früher absichtlich mit Stillschweigen, als ich die fragliche Aufgabe, da sie für die Praxis von Wichtigkeit ist, zum Gegenstande einer besondern Abhandlung machte, die in den Verhandlungen des Gewerbe-Vereins vom Jahr 1845 und in Grunert's Archiv der Mathematik und Physik. Thl. VII. S. 288. u. f. abgedruckt ist. Hier muss ich aber noch einige Worte darüber sagen:

Herr Professor Rühlmann findet nämlich für die absolute Festigkeit eines Cylinders, wenn die zerreissende Kraft in der Mantelfläche wirkt, den Ausdruck $Q = \frac{2}{5} p\pi r^2$ (welcher noch dazu aus der Gleichung $Q - \frac{3}{4} p\pi r^2 = p\pi r^2$ folgen soll!), anstatt dass diese Festigkeit durch $\frac{1}{5} p\pi r^2$ ausgedrückt wird. Eben so ist die von dem genannten Herrn in der zugehörigen Note (S. 158.) für ein Parallelepipedum angegebene Formel $Q = \frac{2}{3} pbh$ falsch! Sie muss $Q = \frac{1}{4} p.bh$ heissen, was dann auch mit Tredgold übereinstimmt, welcher freilich bloss den zuletzt erwähnten besondern Fall im 1sten Bande der Transact. of the Civil Ingeneers behandelt. Man vergleiche hiermit meinen zweiten Aufsatz in den genannten Verhandlungen von 1845, wo auch auf Tredgold Bezug genommen wird.

Schliesslich noch ein Wort über ein offenbar absichtliches Qui pro quo, welches Herr Professor Rühlmann sich in einer Anmerkung zu seinem Angriffe gegen mich erlaubt, indem er sich wörtlich also ausdrückt:

„Zur fernern Characteristik der fraglichen Sache kann noch „dienen, dass Brix in §. 24. seiner Abhandlung von 1844 Tred- „gold tadelt, weil dieser die zulässige Durchbiegung nicht auf „rationelle Grundsätze zurückgeführt habe, und deshalb dafür „§. 24. einen Ausdruck ableitet, der genau derselbe ist, wel- „chen Tredgold selbst in seinem Strength of Cast Iron „§. 87. entwickelt und §. 174. etc. auf praktische Fälle anwendet!"

Wer dies so bona fide liest und meine Abhandlung nicht zur Hand hat, um selbst zu prüfen, wird kaum auf den Gedanken kommen, dass die bei obiger Darstellung beobachtete Methode zu denen gehört, welche die höflichen Franzosen corriger la vérité nennen!

Digitized by Google

Zuvörderst ist die Rühlmannsche Angabe, ich hätte Tredgold deshalb getadelt, weil er die zulässige Biegung auf rationelle Grundsätze zurückzuführen unterlassen habe, nicht in der Wahrheit begründet. Ich habe nur eine einzelne, von ihm herrührende praktische Regel, welche — gestützt durch seine Autorität — selbst in ganz neuen Werken über Mechanik noch als allgemein gültig angewendet wird, als unrichtig bezeichnet, und das mit Recht, wie jeder Sachverständige mir sicherlich zugeben wird. In seinen Elementary Principles of Carpentry, London 1820, giebt nämlich Tredgold die, späterhin von ihm nirgend wiederrufene Regel, dass bei horizontal liegenden Balken, welche an beiden Enden unterstützt und in der Mitte belastet sind, die ohne Nachtheil zulässige Senkung der Mitte auf jeden Fuss der Länge $\frac{1}{40}$ Zoll betragen könne. Er setzt also die fragliche Senkung einfach der Länge proportional, ohne auf die übrigen Abmessungen der Balken Rücksicht zu nehmen, und das ist es, was ich nicht als richtig anerkennen kann.

Nach diesem Widerspruch gegen Tredgold leite ich nunmehr in §. 24. meiner Abhandlung allgemeine Ausdrücke her, um bei prismatischen Körpern die zulässige Senkung für jede Form ihres Querschnittes zu bestimmen, Ausdrücke, welche sich bei Tredgold nicht finden. Dieselben werden demnächst in §. 25. auf parallelepipedische Balken angewendet, wo sie auf das Gesetz führen, dass bei solchen Körpern die grösste Senkung sich direct wie das Quadrat der Länge und umgekehrt wie die Höhe des Körpers verhält; aber nirgend habe ich gesagt, dass ich dieses Gesetz als neu betrachtet wissen wolle. Das konnte mir um so weniger einfallen, als mir sehr wohl bekannt war, dass jenes Gesetz schon in dem bei uns allgemein verbreiteten Handbuche der Statik fester Körper von Eytelwein (§. 456.) auf gleiche Weise vorkömmt, der Strength of Cast Iron von Tredgold und anderer Werke, die dasselbe vielleicht auch enthalten mögen, nicht zu gedenken.

Die vorstehend dargelegten Thatsachen werden hoffentlich genügen, den Angriff des Herrn Professors Rühlmann in seiner wahren Gestalt erscheinen zu lassen. Ich überlasse es nunmehr getrost dem unbefangenen Urtheil eines jeden Mannes vom Fach, eine Polemik der besprochenen Art gebührend zu würdigen.

Berlin im November 1847.

Cours de Mécanique, ou Résumé de leçons sur la dynamique, la statique et leurs applications à l'art de l'ingenieur, par J. B. Belanger. Première partie. Dynamique et statique générales Hydrostatique. Paris. 1847. 8.

Elementi di Mecanica e D'Idraulica, di Giuseppe Venturoli. Settima edizione. Vol. I. Milano. 1846. 8. 6. 10.

Digitized by Google

Astronomie.

Sir J. T. W. Herschel: Results of Astronomical Observations, made during the years 1834, 5, 6, 7, 8 at the Cape of Good Hope; being the completion of a Telescopic Survey of the whole Surface of the Visible Heavens, commenced in 1825—1847. Royal 4°. L. 4. 4 sh.

Physik.

Lärobok i Elementerne i Fysiken, utgifwen af A. Th. Bergius, Ph. Mag. Astron. Doc. wid Upsala Akad. Förra Delen. Stockholm. 1847. 8°. 3 Rdr.

Vermischte Schriften.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti Bononiensis. Tomus sextus. Bononiae. 1844. Enthält: Petri Callegari: De usu subtractionis et divisionis extentendo ad nonnullas praesertim propositiones demonstrandas tentamen. — Tomus septimus. Bononiae. 1844. Enthält Aloysii Casinelli Disquisitiones analyticae super aequationibus trinomialibus formae $Xx \pm Ax \pm B = 0$. — Julii Bedetti: De revolutionibus duorum corporum se mutuo trahentium, dissertatio. Aloysii Casinelli: De aequationibus algebraicis, quarum radices constant quatuor elementis, dissertatio. — Petri Callegari: Aliae nonnullae applicationes calculi symbolici, quo subtractionis et divisionis usum in doctrina numerorum et aequationum juvari et extendi posse demonstratur.

The Cambridge aud Dublin mathematical Journal. Edited by W. Thomson, B. A., F. R. S. E., Fellow of St. Peters College, and Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow. Vergl. Literar. Ber. Nr. XXXVIII. S. 558.

Nr. XII. On Principal Axes of a Body, their Moments of Inertia, aud Distribution in Space. Continued. By R. Townsend. — Notes on Descriptive Geometry. No. II. By T. S. Davies. — On the theory of Elliptic Functions. By A. Cayley. — On certain Algebraic Functions. By James Cockle. — On Conjugate Hyperboloids. By Thomas Weddle. — Notes on Hydrodynamics. By William Thomson. — Mathematical Note. On the maximum or minimum property of Incident and Reflected Rays.

(No. XIII. will published on the 1st of February 1848.)

Digitized by Google

XL.
Literarischer Bericht.

Schriften über Unterrichts-Methode.

Zwei lesenswerthe Aufsätze über die Methode des mathematischen Unterrichts nebst Proben einer schulmässigen Entwickelung der Geometrie von Herrn Doctor Th. Wittstein in Hannover finden sich in Mager's pädagogischer Revue. Achter Jahrgang. S. 1—30 und S. 297—323.

Die höheren technischen Schulen nach ihrer Idee und Bedeutung dargestellt und erläutert durch die Beschreibung der höheren technischen Lehranstalten zu Augsburg, Braunschweig, Carlsruhe, Cassel, Darmstadt, Dresden, München, Prag, Stuttgart und Wien, von Dr. Friedrich Schoedler, Lehrer der Naturwissenschaften am Gymnasium zu Worms. Braunschweig. 1847. 8. 20 Sgr.

Alle die, welche sich für die Organisation und den Fortschritt der in unserer Zeit so wichtigen technischen Lehranstalten interessiren, müssen wir auf diese Schrift, namentlich wegen der in derselben ziemlich ausführlich mitgetheilten Lehrpläne u. s. w. einiger der bedeutendsten und berühmtesten technischen Lehranstalten in Deutschland aufmerksam machen. Es sind auch die Namen der an diesen Lehranstalten wirkenden Lehrer, ihre Etats u. s. w. angegeben, Notizen über die betreffenden Gebäude beigebracht u. s. w., so dass man allerdings aus dieser Schrift ein recht anschauliches Bild von den auf ihrem Titel genannten Anstalten erhält.

Arithmetik.

Lehrbuch der Arithmetik. Zum Gebrauche für die oberen Klassen von Gymnasien und höheren Bürger-

Digitized by Google

schulen bearbeitet von Dr. G. Radicke (jetzt ausserordentlichem Professor an der Universität zu Bonn). Coblenz. 1847. 8. 22½ Sgr.

Dieses an die Darstellungsweise von Ohm sich anschliessende, aber doch auch in mehreren Stücken von derselben abweichende und einen eigenthümlichen Gang befolgende, Lehrbuch der Arithmetik verdient von den Liebhabern dieser Methode beachtet zu werden.

Notice sur une méthode élémentaire de résondre les équations numériques d'un degré quelconque par la sommation des séries. Par C. A. Agardh, Evéque de Carlstad, et des Ord. Roy. M. de l'Acad. d. Sc. Carlstad. 1847. 8. 10 Sgr.

Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch, welches die gemeinen oder Briggischen Logarithmen für alle Zahlen bis 108000 auf sieben Decimalstellen, die Gaussischen Logarithmen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen von zehn zu zehn Secunden für die neun ersten und neun letzten Grade des Quadranten und von Minute zu Minute für die übrigen Grade desselben, goniometrische Formeln und einige andere mathematische Tafeln, die oft gebraucht werden, enthält. Herausgegeben von Heinrich Gottlieb Köhler, Dr. Phil. und Privatdocenten zu Göttingen. Stereotypausgabe erster Abdruck. Leipzig, Verlag von Bernh. Tauchnitz jun. 1847. 1 Rthlr. 7½ Sgr.

Der Inhalt dieser Tafeln ist auf ihrem Titel schon so ausführlich angegeben worden, dass Weiteres darüber zu sagen nicht nöthig ist. Auf das Rühmlichste müssen wir aber ihre äussere Ausstattung anerkennen, in welcher Beziehung dieselben den Vergleich mit allen andern Tafeln nicht nur aushalten können, sondern selbst die meisten bei Weitem übertreffen, wofür auch schon der Name der berühmten Verlagshandlung hinreichend bürgt. Diese Tafeln sind mit Stereotypen gedruckt, und um sie mit der Zeit ganz fehlerlos zu liefern, hat die Verlagshandlung auf die Entdeckung eines jeden Fehlers einen Preis von einem Louisd'or gesetzt. Die Herren Dr. Köhler in Göttingen, Dr. Jahn und Dr. Michaelis in Leipzig sind als Schiedsrichter ernannt und die Fehler sollen dann in unserm Archive bekannt gemacht werden, wozu wir die Hand zu bieten sehr gern bereit sind, auch für möglichste Verbreitung der Bekanntmachungen durch mehrmaligen kostenfreien Abdruck derselben Sorge tragen werden. Jedenfalls sind diese sehr schönen Tafeln auch ihres Inhaltes wegen (sie enthalten auch eine Tafel der natürlichen Logarithmen, eine Tafel der Primzahlen, eine Factorentafel, eine Tafel der Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis 100, Quadrat- und Cubiktafeln und mehreres andere Nützliche) der Aufmerksamkeit der Mathematiker besonders zu empfehlen. Der Preis von 1 Rthlr. 7½ Sgr. ist gewiss bei der schönen Ausstattung so niedrig gestellt, als es nur irgend möglich war, so dass auch in dieser Beziehung nichts zu wünschen übrig bleibt.

Mathematische Abhandlungen, besonders aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der Elliptischen

Digitized by Google

Functionen, von Dr. G. Eisenstein, Privat-Docenten an der Universität zu Berlin. Mit einer Vorrede von Prof. Dr. Gauss. Berlin. 1847. 4. 3 Rthlr. 15 Sgr.

Diese in dem vorliegenden Werke gesammelten Abhandlungen sind schon früher in Crelle's Journal erschienen. Ihr Inhalt ist folgender: 1. Allgemeine Untersuchungen über die Formen dritten Grades mit drei Variabeln, welche der Kreistheilung ihre Entstehung verdanken. — 2. Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante. — 3. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. I. Ableitung des biquadratischen Fundamentaltheorems aus der Theorie der Lemniscatenfunctionen, nebst Bemerkungen zu den Multiplications- und Transformationsformeln. II. Neuer Beweis der Additionsformeln. III. Fernere Bemerkungen zu den Transformationsformeln. — 4. Notiz über Partialbrüche. — 5. Theorema. — 6. Neue Theoreme der höhern Arithmetik. — 7. Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. IV. Ueber einen allgemeinen Satz, welcher das Additionstheorem für elliptische Functionen als speciellen Fall enthält. V. Ueber die Differentialgleichungen, welchen der Zähler und der Nenner bei den elliptischen Transformationsformeln genügen. VI. Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen (als eine neue Begründungsweise der Theorie der elliptischen Functionen, mit besonderer Berücksichtigung ihrer Analogie zu den Kreisfunctionen). — 8. Aufgaben und Lehrsätze.

Zur Theorie der Eulerschen Integrale. Von M. A. Stern. Abgedruckt aus den Göttinger Studien. 1847. Göttingen. 1847. 8. 7½ Sgr.

Diese Abhandlung enthält theils neue Ableitungen schon bekannter Sätze von den Eulerschen Integralen, theils ganz neue Sätze, theils Verallgemeinerungen bekannter Sätze, und muss den Mathematikern sehr zur Beachtung empfohlen werden. Ihren Inhalt ausführlicher anzugeben, ist leider an diesem Orte nicht möglich, weil dazu ein zu grosser Raum in Anspruch genommen werden würde, auch zu viele Formeln hierher gesetzt werden müssten, was dem Zwecke der Literarischen Berichte nicht entspricht.

Otto, F., Beitrag zu den Anleitungen zur Integration der Differential- oder Ableitungs-Gleichungen. A. u. d. T. Erste Fortsetzung der Bemerkungen über den Einfluss der Umdrehung der Artillerie-Geschosse auf ihre Bahn. 4. Neisse. 1847. 4½ Rthlr.

Geometrie.

Leitfaden der Elementar-Geometrie für die oberen Classen einer Bürgerschule. Berlin. 1847. 27 Ngr.

Lehrbuch der reinen Elementar-Geometrie zum öffentlichen Gebrauche und Selbstunterrichte. Her-

Digitized by Google

ausgegeben von Joseph Salomon, Professor am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Dritte, durchaus verbesserte Auflage. Mit vielen in den Text eingedruckten Holzschnitten. Wien. 1847. 8. 3 Rthlr.

Ein in der dritten Auflage erscheinendes Lehrbuch bedarf keiner Empfehlung mehr. Da das Buch zunächst für den Unterricht am k. k. polytechnischen Institute zu Wien bestimmt ist, so ist es ganz recht, dass der Herr Vf. die neueren Forschungen auf dem Gebiete der Geometrie nur so weit berücksichtigt und benutzt hat, als sie ihm für den angehenden Techniker nöthig und nützlich erschienen; denn man darf in diesen Dingen — ein Fehler, in den man wegen des grossen Interesses des Gegenstandes nur zu leicht verfällt, — auch nicht zu weit gehen. Besonders Technikern ist dieses Lehrbuch der ebenen Geometrie und der Stereometrie seiner Deutlichkeit wegen, und wegen der sehr verständigen Berücksichtigung der Bedürfnisse der Techniker, recht sehr zu empfehlen, und verdient in einem möglichst weiten Kreise bekannt zu werden. Auch die in den Text gedruckten, sehr deutlich ausgeführten Holzschnitte gereichen dem Buche zur Empfehlung.

Leichtfassliche und strenge Begründung der in der Elementar-Geometrie vorkommenden Proportionen. Von Dr. A. Hohl, ausserordentlichem Professor der Mathematik an der K. Universität Tübingen. (Mit einer lithographirten Tafel.) Tübingen. 1847. 8. 18 Sgr. 9 Pf.

Diese Schrift, mit welcher der Herr Vf. der ältern, die Incommensurabilität der Grössen berücksichtigenden Behandlung der Elementar-Geometrie wieder mehr Eingang zu verschaffen beabsichtigt, enthält in drei Abtheilungen eine grundrissliche Darstellung der allgemeinen Grössen-Lehre, die allgemeine Proportionen-Lehre und deren Anwendung in der Elementar-Geometrie. Auch wir sind der Meinung, dass neben den neueren, möglichste Allgemeinheit erstrebenden geometrischen Forschungen die euklidische Geometrie oder vielmehr überhaupt die Geometrie der Alten fortwährend sorgfältig studirt, und dass namentlich beim gelehrten Schulunterrichte der Unterricht in der Geometrie immer vorzugsweise auf dem von den Alten uns vorgezeichneten Wege behandelt werden muss, wenn derselbe wirkliche Früchte tragen soll, wobei immer zugleich auch die neueren geometrischen Forschungen, so weit es der Zweck des Schulunterrichts zulässt, gebührende Berücksichtigung finden können. Wenn wir daher auch diese Schrift den Liebhabern der ältern Geometrie empfehlen, so hätten wir doch gewünscht, dass der Herr Vf. bei der Erklärung der Proportion sich ganz an Euklides gehalten und sich nicht gleich von vorn herein mehr der neueren Definition angeschlossen hätte. Legt man nämlich die Euklidische Definition zum Grunde, so wird die Schwierigkeit wegen der Incommensurabilität bei der Theorie der Proportionen mit einem Male ganz beseitigt und erfordert gar keine Berücksichtigung weiter; und zu zeigen, dass vier Grössen, die im euklidischen Sinne in Proportion stehen, dann jederzeit auch im Sinne der Neueren proportional sind, un-

Digitized by Google

terliegt bekanntlich gar keiner Schwierigkeit. Wenn dies auch schon oftmals bewiesen worden ist, so möchten doch die folgenden Bemerkungen über diesen für die Geometrie nicht unwichtigen Gegenstand hier nicht am unrechten Orte sein.

Die Grössen A, B sowohl, als auch die Grössen A', B' seien gleichartig. Dann sind diese vier Grössen im Sinne des Euklides proportional, d. h. es ist $A:B=A':B'$, wenn, indem m und n ganze Zahlen bezeichnen, welche ganze Zahlen man auch für m und n setzen mag, immer gleichzeitig

$$mA \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nB, \quad mA' \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} nB'$$

ist, so dass sich nämlich die obern, mittlern und untern Zeichen stets auf einander beziehen.

Um nun zu zeigen, dass die vier in diesem Sinne proportionalen Grössen A, B; A', B' jederzeit auch im Sinne der Neueren proportional sind, kann man auf folgende Art schliessen.

Wenn zuerst A und B commensurabel sind, so giebt es ein gemeinschaftliches Maass dieser beiden Grössen, welches wir durch M bezeichnen wollen, so dass, indem μ, ν ganze Zahlen bezeichnen,

$$A=\mu M, \quad B=\nu M$$

ist. Weil nun

$$\nu A=\mu\nu M, \quad \mu B=\mu\nu M$$

ist, so ist

$$\nu A = \mu B,$$

und weil die vier Grössen A, B; A', B' nach der Voraussetzung im euklidischen Sinne proportional sind, so ist nach dem Obigen auch

$$\nu A' = \mu B'.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$\frac{1}{\mu} A' = M',$$

also $A'=\mu M'$, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\nu A' = \mu B' = \mu\nu M',$$

also $B'=\nu M'$; und es ist daher

$$A=\mu M, \quad B=\nu M; \quad A'=\mu M', \quad B=\nu M';$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass auch im Sinne der Neueren die vier Grössen A, B; A', B' proportional sind, oder

Digitized by Google

$$A:B = A':B'$$

ist.

Wenn ferner A und B incommensurabel sind, so setze man, indem μ eine ganze Zahl bezeichnet,

$$A = \mu M;$$

dann wird man, indem auch ν eine gewisse ganze Zahl bezeichnet, jederzeit

$$\nu M < B < (\nu + 1) M$$

zu setzen berechtigt sein. Weil nun

$$\nu A = \mu\nu M$$

und

$$\mu\nu M < \mu B < \mu(\nu + 1) M$$

oder

$$\mu\nu M < \mu B < \mu\nu M + \mu M$$

ist, so ist

$$\nu A < \mu B < \nu A + A,$$

d. i.

$$\nu A < \mu B < (\nu + 1) A,$$

und folglich, weil nach der Voraussetzung die Grössen A, B: A', B' im euklidischen Sinne proportional sind, auch gleichzeitig

$$\nu A' < \mu B' < (\nu + 1) A'.$$

Also ist gleichzeitig

$$\frac{\nu}{\mu} < \frac{B}{A} < \frac{\nu + 1}{\mu},$$

$$\frac{\nu}{\mu} < \frac{B'}{A'} < \frac{\nu + 1}{\mu};$$

und es sind folglich

$$\frac{B}{A} \text{ und } \frac{B'}{A'}$$

immer zwischen denselben Gränzen

$$\frac{\nu}{\mu}, \quad \frac{\nu + 1}{\mu}$$

enthalten. Der Unterschied dieser Gränzen ist

$$\frac{\nu+1}{\mu}-\frac{\nu}{\mu}=\frac{1}{\mu}$$

und kann, weil man μ offenbar beliebig gross anzunehmen berechtigt ist, beliebig klein gemacht werden. Daher lassen sich also

$$\frac{B}{A} \text{ und } \frac{B'}{A'}$$

immer zwischen denselben einander beliebig nahe kommenden Gränzen einschliessen, d. h. die im euklidischen Sinne proportionalen Grössen A, B; A', B' sind auch im Sinne der Neuern proportional.

Wenn also die Grössen A, B; A', B' im Sinne des Euklides proportional sind, so sind dieselben auch jederzeit im Sinne der Neueren proportional.

Stellt man nun die Lehre von den Proportionen ganz im Sinne des Euklides dar, wodurch die Schwierigkeit wegen der Incommensurabilität, auch bei den Anwendungen derselben auf die Geometrie, mit einem Male ganz beseitigt wird, und des Falls der Incommensurabilität gar nicht weiter gedacht zu werden braucht, so lässt sich durch die obige oder eine andere derselben ähnliche Darstellung die in diesem Sinne dargestellte Lehre von den Proportionen mit den neueren Ansichten über diese Lehre leicht in Verbindung bringen, und dadurch die für die neuere Mathematik natürlich sehr nothwendige Verbindung der Geometrie mit der Arithmetik auf der Stelle vermitteln.

Wir sind daher auch gegenwärtig der Ansicht, dass diese Darstellungsmethode der so wichtigen Lehre von den Proportionen die beste und namentlich für den Schulunterricht die zweckmässigste ist, empfehlen aber nochmals das Büchlein des Herrn Vfs. den Liebhabern der Geometrie der Alten zur Beachtung.

Rössler, H., Die darstellende Geometrie. 2te Auflage. Darmstadt. 1847. 1 Rthlr.

Wolff, F., Die beschreibende Geometrie, die geometrische Zeichenkunst und die Perspective. 2te Aufl. gr. 8. Berlin. 1847. $4\frac{2}{3}$ Rthlr.

Ausführliches Lehrbuch der analytischen oder höhern Geometrie zum Selbstunterricht. Von H. B. Lübsen. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Hamburg. 1842. 8. 1 Rthlr. 10 Sgr.

Die erste Auflage dieses mit grosser Deutlichkeit und Anschaulichkeit verfassten Lehrbuchs ist von uns im Literar. Ber. Nr. V. S. 78. angezeigt und gebührend empfohlen worden. Wir freuen uns, unsere damalige Empfehlung durch das Erscheinen der vorliegenden, nicht wesentlich umgestalteten, aber allerdings vermehrten und verbesserten zweiten Auflage gerechtfertigt zu sehen, und wünschen recht sehr, dass dieses Buch fortfahren möge, durch seine grosse Deutlichkeit der analytischen Geometrie (im neueren Sinne) immer mehr Freunde zu gewinnen, und zum eifrigen Studium dieses auch für die praktische Anwendung so wichtigen Theils der Mathematik immer mehr anzuregen.

Digitized by Google

Praktische Geometrie.

Fleischans, K., der ausübende Geometer. gr. 8. Prag. 1848. 27 Ngr.

Astronomie.

Der Weltenbau, seine Entstehung und wunderbaren Harmonien. Populär dargestellter Inbegriff der vorzüglichsten astronomischen Entdeckungen des Joh. Gottlieb Schimko, Doctors der Medicin, Physikus der Königl. Hauptstadt Olmütz. Wien. 1847. 8. 20 Sgr.

Auf eine nähere Angabe und Prüfung dieser vermeintlichen astronomischen Entdeckungen können wir uns hier nicht einlassen.

Deutschlands vorzüglichste Sternwarten. Aus C. L. v. Littrow's Kalender für alle Stände (1848) besonders abgedruckt. Mit 7 Kupfertafeln. Wien. 1848. 8. 8 Sgr.

Diese interessante kleine Schrift enthält die Beschreibung der Sternwarten zu Gotha (Seeberg), Göttingen, Königsberg, München, Hamburg, Berlin, Bonn, mit Abbildungen dieser sämmtlichen Sternwarten. Einige populäre Betrachtungen über den Nutzen der Astronomie sind der Beschreibung dieser Sternwarten angehängt.

Storia celeste del R. Osservatorio di Palermo dal 1792 al 1813. Parte prima. 1792—1802. Tomo quarto. 1799—1800. Vienna. 1846. 4. Tomo quinto. 1801—1802. Vienna. 1847. 4. Auch unter dem Titel: Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von C. L. von Littrow, Director der Sternwarte und o. ö. Professor der Astronomie an der k. k. Universität zu Wien u. s. w. und F. Schaub, Adjunct der Sternwarte. 27ster Theil. Neuer Folge 7r Band. Wien. 1846. 4. Enthaltend Piazzi's Beobachtungen in den Jahren 1799 u. 1800. — 28ster Theil. Neuer Folge 8r Band. Enthaltend Piazzis Beobachtungen in den Jahren 1801 und 1802. Wien. 1847. 4.

Die drei ersten Theile dieses wichtigen Werks sind im Literarischen Bericht Nr. XXXI. S. 464. und Nr. XXXV. S. 521. angezeigt worden. Indem wir unsere Freude über den raschen Fortgang dieses Unternehmens von Neuem aussprechen, wird es jetzt genügen, wegen der Bedeutung und Tendenz desselben die Leser des Archivs auf jene beiden Anzeigen zu verweisen.

Kleiner astronomischer Almanach auf das Jahr 1848. Vorzüglich zum Gebrauch der Seeleute herausgegeben von Herrmann

Digitized by Google

Karsten, Dr. Phil., Prof. der Mathematik und Physik an der Universität Rostock. Neunter Jahrgang. Rostock. 10 Sgr.

Weisse, M., positiones mediae stellarum fixarum in zonis Regiomontanis. gr. 8. Petropoli. 1846. 5 Rthlr.

Physik.

Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien, so wie auch für gebildete Leser überhaupt, von Karl Koppe, Professor und Oberlehrer am Gymnasium zu Soest. Mit zahlreichen, in den Text eingedruckten Holzschnitten. Erster Theil. 1847. 8. 20 Sgr.

Die Lehren der Physik sind in diesem auf zwei Theile berechneten Buche in drei Abtheilungen vorgetragen, nämlich:

Einleitung. — *Erste Abtheilung.* Mechanische Erscheinungen. Erster Abschnitt: Mechanische Eigenschaften der Körper im Allgemeinen. Zweiter Abschnitt: Mechanische Erscheinungen fester Körper. Dritter Abschnitt: Mechanische Erscheinungen flüssiger Körper. Vierter Abschnitt: Mechanische Erscheinungen luftförmiger Körper. — *Zweite Abtheilung.* Chemische, magnetische und electrische Erscheinungen. Fünfter Abschnitt: Chemische Erscheinungen. Sechster Abschnitt: Magnetismus. Siebenter Abschnitt: Electricität. — *Dritte Abtheilung.* Schall, Licht und Wärme. Achter Abschnitt: Vom Schalle. Neunter Abschnitt: Vom Lichte. Zehnter Abschnitt: Von der Wärme.

Der vorliegende erste Theil enthält die ersten acht Abschnitte, der zweite Theil wird den neunten und zehnten Abschnitt, nämlich die Lehre vom Lichte und von der Wärme enthalten.

In der Vorrede sagt der Herr Vf.: „Dieses Lehrbuch unterscheidet sich von der Mehrzahl der physikalischen Lehrbücher gleichen Umfangs in dem Umstande, dass in demselben die Naturerscheinungen, sowohl die sogenannten Meteore, welche durch die ungestörte Wirksamkeit der Natur herbeigeführt werden, als auch die durch die menschliche Thätigkeit im gewöhnlichen bürgerlichen Leben veranlassten Naturprocesse, vorzugsweise berücksichtigt sind. Von den Lesern, welchen der Verfasser dieses Lehrbuch hauptsächlich bestimmt hat, steht den wenigsten die Benutzung kostbarer Instrumente zu Gebote. Dasselbe gilt auch von der bei Weitem grösseren Zahl der Schüler nach ihrem Eintritte in's bürgerliche Leben, als Geistliche, Richter, Aerzte, u. s. w. Alle aber sehen sich täglich und stündlich von den mannigfaltigsten Erscheinungen umgeben, in denen die geheimen Kräfte der Natur ihre Wirksamkeit offenbaren. Diese Erscheinungen nun unter bestimmte Gesetze zusammenzufassen und so in die Mannigfaltigkeit derselben Uebersicht und Zusammenhang zu

Digitized by Google

bringen, glaubt der Verfasser als das erste Ziel, nach welchem derselbe bei Abfassung dieses Lehrbuchs für seine Leser und Schüler gestrebt hat, und die Erweckung des Sinnes und die Befähigung für verständige Naturbeobachtung als das zweite bezeichnen zu müssen. Dagegen hat auf solche Leser, welche zur Ausübung eines bestimmten Berufes oder Gewerbes gewisser physikalischer Kenntnisse bedürfen, eine besondere Rücksicht nicht genommen werden können."

„Ueberall ist in dem Lehrbuche von den Erscheinungen ausgegangen, und erst, nachdem das Thatsächliche festgestellt worden, sind auch die zur Erklärung versuchten Hypothesen mitgetheilt, um einerseits dem eigenen Urtheile des Schülers oder Lesers nicht vorzugreifen, und um andererseits denselben zu gewöhnen, die Naturerscheinungen ohne vorgefasste Meinungen zu beobachten. Die Geschichte der Wissenschaft liefert nur zu zahlreiche Beispiele, wie das umgekehrte Verfahren das Auffinden der Wahrheit erschwert und die Fortschritte der Wissenschaft aufgehalten hat."

„Da das Lehrbuch für die erste Einführung in die Wissenschaft bestimmt ist, so hat sich der Verfasser in dem eigentlichen Texte, welcher die Hauptgesetze und die wichtigsten Erscheinungen behandelt, deren Kenntniss jedem Gebildeten wünschenswerth ist, der möglichsten Deutlichkeit und Fasslichkeit befleissigt. Das minder Wichtige oder vielleicht nur für einen Theil der Schüler oder Leser Verständliche ist in den Anmerkungen behandelt. Dies gilt insbesondere auch von den mathematischen Ableitungen, da es eben so unbillig als unpädagogisch sein würde, einen Schüler deshalb, weil er in der Mathematik zurückgeblieben ist, auch von den Fortschritten in der Physik ausschliessen zu wollen."

Wir haben im Vorhergehenden den Herrn Vf. selbst reden lassen, weil wir glauben, dadurch die Grundsätze, von denen er bei der Abfassung dieses neuen Elementarlehrbuchs der Physik geleitet worden ist, den Lesern des Archivs am besten vor Augen legen zu können. Im Allgemeinen können wir auch diesen Grundsätzen unsern Beifall nicht versagen, und sind der Meinung, dass sich dieses Lehrbuch durch Einfachheit, Deutlichkeit und Bestimmtheit der Darstellung vor vielen andern Elementarlehrbüchern der Physik vortheilhaft auszeichnet, weshalb wir dasselbe auch in den Händen recht vieler Leser und Lehrer zu sehen wünschen, so wie denn der Herr Vf. auch namentlich für den Schulunterricht eine zweckmässige Auswahl der vorzutragenden Lehren getroffen, und sich mit Recht nicht darauf eingelassen hat, alle neueren Erfindungen aufzunehmen oder bloss anzudeuten, wie dies in vielen andern physikalischen Lehrbüchern, selbst in solchen, die allgemeineren Beifall gefunden haben, oft in sehr oberflächlicher Weise geschieht, um sich nur das Ansehen möglichster Vollständigkeit zu geben, wodurch der Leser aber nur Notizen erhält, ohne sich eine völlig gründliche Einsicht in die eigentliche Natur der betreffenden Gegenstände verschaffen und aneignen zu können. Was die mathematischen Partieen des vorliegenden Buchs betrifft, so glauben wir freilich, dass wenigstens für die Schüler der beiden oberen Klassen der höheren Lehranstalten sich etwas tiefer und mit grösserer Strenge zu Werke gehende mathematische Darstel-

Digitized by Google

lungen physikalischer Lehren sehr wohl eignen und von wesentlichem Nutzen für die mathematische und physikalische Ausbildung der schon weiter vorgeschrittenen Schüler sind. Jedoch mögen wohl in dieser Beziehung in der Organisation unserer Lehranstalten manche schwer zu beseitigende Hindernisse liegen; und ausserdem frägt es sich, ob solche strengere mathematische Darstellungen physikalischer Lehren nicht besser mit dem mathematischen Unterrichte, an geeigneten Stellen, als mit dem physikalischen Unterrichte zu verbinden sind, so dass also durch die obige Bemerkung kein bestimmter Tadel des vorliegenden, überdies auch zugleich für gebildete Leser überhaupt — die leider immer noch meistens vor aller Mathematik zurückschrecken — bestimmten Lehrbuchs, dessen zweitem Theile wir mit Verlangen entgegen sehen, ausgesprochen sein soll. Die in den Text eingedruckten Holzschnitte entsprechen ihrem Zwecke recht wohl.

Vieth, G. U. A., Grundriss der Physik für Schulen. Dritte Auflage. Herausgegeben von F. Götz. 8. Zerbst. 1847. ½ Rthlr.

Physikalische Briefe für Gebildete aller Stände, von Leonhard Euler und Dr. Johann Müller, Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Br. Stuttgart. 1848. 8. 1 Rthlr. 24 Sgr.

Wir freuen uns, Eulers durch wahre Popularität sich auszeichnende Briefe an eine deutsche Prinzessin in sehr anständiger äusserer Ausstattung wieder in's Publikum gebracht, und mit einem Supplemente, welches die neuesten Ergebnisse und Bereicherungen der Physik gleichfalls in Briefform behandelt, aus Herrn Professor Müllers gewandter Feder bereichert zu sehen. Dass Eulers philosophische Briefe weggelassen worden sind, ist ganz recht, da diese bekanntlich die schwächste Partie des sonst trefflichen Buchs ausmachen. Dass aber Condorcet's Lobrede auf Euler beigefügt und mit derselben in dem Buche der Anfang gemacht worden ist, verdient besondern Dank. Mit der dankbarsten Erinnerung an die vielfache Belehrung, die wir selbst früher bei unsern physikalischen Elementarstudien aus diesem Buche geschöpft haben, empfehlen wir dasselbe aus vollkommenster Ueberzeugung allen Lesern, welche nicht eine blumenreiche Sprache und lange Tiraden über die Offenbarung der Weisheit des Schöpfers in der Einrichtung der Natur, aber eine nüchterne wahrhafte Belehrung über die in der Natur vorkommenden Erscheinungen suchen und lieben. Möge das treffliche Buch auch in seiner neuen Gestalt allen von dem verdienten Herrn Herausgeber und der Verlagshandlung beabsichtigten Nutzen im reichsten Maasse stiften! Wir wüssten in der That kaum ein besseres populäres Lehrbuch der Physik als das vorliegende zu nennen.

Die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung, vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 23sten Juli 1847 von Dr. H. Helmholtz. Berlin. 1847. 8. 10 Sgr.

Der Inhalt dieser lesenswerthen Abhandlung ist folgender: Einleitung. — I. Das Princip der Erhaltung der lebendigen Kraft.

Digitized by Google

— II. Das Princip der Erhaltung der Kraft. — III. Die Anwendung des Princips in den mechanischen Theoremen. — IV. Das Kraftäquivalent der Wärme. — V. Das Kraftäquivalent der electrischen Vorgänge. — VI. Kraftäquivalent des Magnetismus und Electromagnetismus.

Das Alkoholometer und dessen Anwendung. Ein Handbuch für Eichungsbehörden, Steuerbeamte, Instrumentenmacher, Brennereibesitzer, Destillateure und für Gewerbtreibende, die sich mit dem Spiritushandel befassen. Herausgegeben von dem Director der Königlich Preussischen Normal-Eichungs-Kommission A. F. W. Brix. Berlin. 1847.

Diese kleine Schrift verdient allen denen, welche sich mit der Construction und der genauen Anwendung des Alkoholometers bekannt machen wollen, recht sehr empfohlen zu werden. Dieselbe enthält nicht bloss eine sehr deutliche Darstellung der Theorie, sondern auch Anleitung zum praktischen Gebrauche nebst den nöthigen, von dem Physico-Mathematiker Herrn Dr. W. **Brix** neu berechneten Tafeln, und berücksichtigt, was besonders hervorgehoben werden muss, überall gehörig die bekannte sogenannte Contraction bei der Mischung von Alcohol und Wasser mit einander.

Leichtfassliche Darstellung der Meteorologie. Von August Kunzek, Professor der Physik und angewandten Mathematik an der Universität zu Lemberg. Mit vielen xilographirten Abbildungen. Wien. 1847. 8. 1 Thlr.

Wir können dieses Buch einem Jeden, wer sich in kurzer Zeit über die Hauptsätze der Meteorologie mit möglichster Deutlichkeit belehren will, aus vollkommenster Ueberzeugung sehr empfehlen. Es sind, um dasselbe vollkommen verstehen zu können, nur einige wenige ganz elementare mathematische Vorkenntnisse, und selbst auch nur ein sehr geringes Maass physikalischer Vorkenntnisse erforderlich, weil der Herr Vf. es sich hat angelegen sein lassen, die Sätze der allgemeinen Naturlehre jederzeit am Anfange der Kapitel der Meteorologie, wo sie zur Anwendung kommen, zwar kurz, aber überall mit vollkommener Deutlichkeit zu erläutern. Je wichtiger eine genauere Bekanntschaft mit der Meteorologie von Tage zu Tage für die verschiedenen Klassen der Gesellschaft, namentlich für den Landmann wird, desto mehr wünschen wir diesem mit grosser Verständlichkeit verfassten Buche eine möglichst allgemeine Verbreitung, die ihm gewiss auch nicht fehlen wird.

Vermischte Schriften.

Populäre Vorlesungen über wissenschaftliche Gegenstände von F. W. Bessel. Nach dem Tode des Ver-

Digitized by Google

fassers herausgegeben von H. C. Schumacher. Hamburg. 1848. 8. 3 Rthlr.

Der Inhalt dieser Vorlesungen ist folgender. 1. Ueber den gegenwärtigen Standpunkt der Astronomie (diese Vorlesung ist am 2ten März 1832 gehalten). — 2. Ueber das, was uns die Astronomie von der Gestalt und dem Inneren der Erde lehrt. — 3. Ueber die physische Beschaffenheit der Himmelskörper. — 4. Ueber den Halley'schen Kometen. — 5. Von den Erscheinungen, welche der Halley'sche Komet gezeigt hat. — 6. Ueber Flut und Ebbe. — 7. Messung der Entfernung des 61. Sterns im Sternbilde des Schwans. — 8. Ueber Maass und Gewicht im Allgemeinen und das Preussische Längenmaass im Besonderen. — 9. Ueber den Magnetismus der Erde. — 10. Ueber Wahrscheinlichkeits-Rechnung. — 11. Ueber die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie. — 12. Gleichgewicht und Bewegung. — 13. Astronomische Beobachtungen. — 14. Oerter der Fixsterne an der Himmelskugel. — 15. Ueber den Mond.

Dass diese zum Theil schon an anderen Orten bekannt gemachten, zum Theil aber hier zum ersten Male gedruckt erscheinenden Vorlesungen einen reichen Schatz von Belehrungen enthalten, versteht sich von selbst, und Herr Conferenzrath Schumacher hat sich jedenfalls um viele Leser ein grosses Verdienst erworben, dass er sich der Herausgabe derselben unterzogen hat. Ganz besonders bemerkenswerth ist es, dass Bessel in der am 28. Februar 1840 gehaltenen Vorlesung über die Verbindung der astronomischen Beobachtungen mit der Astronomie (S. 447 ff.) den jetzt entdeckten Planeten Neptun aus eben den Betrachtungen, die zu seiner Entdeckung geführt haben, schon ankündigt. Seit längerer Zeit hatte er alle anderen möglichen Erklärungen der Anomalien, die Uranus in seinen Bewegungen zeigt, mit seiner gewohnten Gründlichkeit untersucht, und war, nachdem er sie am Ende als ungenügend erkannte, im Begriffe, den Weg, der zum Ziele geführt hätte, einzuschlagen, als zunehmende Kränklichkeit und angestrengte Arbeiten mit einem neuen vortrefflichen Meridian-Instrumente von Repsold, denen er sich ohnerachtet seiner Kränklichkeit unterzog, ihm eine der glänzendsten Entdeckungen, für die er so viel gethan hatte, in dem Augenblicke entrissen, in dem er seine Hand nach dem Preise ausstrecken durfte. Die für diese Untersuchungen von seinem talentvollen, auch schon verstorbenen Schüler Flemming mit der äussersten Schärfe gemachten Reductionen der Uranusbeobachtungen, deren Bessel S. 452. erwähnt, werden in den Astronomischen Nachrichten erscheinen, und den Ernst zeigen, mit dem Bessel seine Nachforschungen unternahm.

Naturwissenschaftliche Abhandlungen, gesammelt und durch Subscription herausgegeben von Wilhelm Haidinger. Erster Band. Mit XXII. Tafeln. Subscriptionsjahr vom 1. Juli 1846 bis 1. Juli 1847. Wien. 1847. gr. 4°. Preis 15 Fl. C. M. Ausgegeben am 13. Aug. 1847.

Schon in Nr. XXXVII. S. 542. hatten wir die Freude, zugleich mit der Nachricht von der Stiftung einer freien naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Wien einen Theil der von dieser Gesell-

Digitized by Google

schaft herausgegebenen Berichte über ihre Verhandlungen anzuzeigen. Eine noch grössere Freude wird uns jetzt zu Theil, indem wir im Begriff sind, den vor Kurzem an uns gelangten ersten Band der im Namen dieser Gesellschaft von Herrn Bergrath Wilhelm Haidinger herausgegebenen naturwissenschaftlichen Abhandlungen anzuzeigen. Leider verstatten uns die Gränzen des Literarischen Berichts nur die Angabe des Inhalts dieses prachtvoll ausgestatteten Bandes; die Leser des Archivs werden aber daraus ersehen, dass fast kein Theil der Naturwissenschaft leer ausgegangen und selbst auch die Mathematik mit einer sehr schönen und wichtigen Abhandlung bedacht worden ist, so dass es schwerlich eine naturwissenschaftliche Gesellschaft geben möchte, welche sich einer gleichen Mannigfaltigkeit ihrer Verhandlungen rühmen dürfte. Gewiss wird aber eben diese grosse Mannigfaltigkeit, durch welche jedoch der Gründlichkeit in keiner Weise Abbruch gethan worden ist, das beste Mittel sein, diese naturwissenschaftlichen Abhandlungen, wie sie in hohem Grade verdienen, in einem möglichst grossen Kreise zu verbreiten; denn der Naturforscher wird dieselben hinfüro eben so wenig wie der Mathematiker entbehren können, wobei wir beiläufig noch erwähnen wollen, dass auch die spätern, im Archive noch nicht angezeigten Berichte der Gesellschaft manche sehr schätzbare mathematische Bemerkungen enthalten, auf welche wir in einem der folgenden Hefte unserer Zeitschrift die Leser derselben noch besonders aufmerksam machen werden. Der Inhalt des uns vorliegenden Prachtbandes ist nun folgender:

I. Ueber den Pleochroismus des Amethysts. Von Wilhelm Haidinger. — II. Neue Arten von Arachniden des k. k. Museums, beschrieben und mit Bemerkungen über verwandte Formen begleitet von Dr. Friedr. W. Rossi. — III. Ueber die Cephalopoden des Muschelmarmors von Bleiberg in Kärnthen, von Franz Ritter v. Hauer. — IV. Ueber Endophyten der Pflanzenzelle, eine gesetzmässige, den Samenfäden oder beweglichen Spiralfasern analoge Erscheinung. Von Siegfried Reissek. — V. Muscorum frondosorum species novas halicienses profert Conventui amicorum scientiae naturalis Hyacinthus Strzemie Lobarzewski. — VI. Ueber die Pseudomorphosen nach Steinsalz. Von Wilhelm Haidinger. — VII. Der Aspasiolith als Pseudomorphose nach Cordierit, nebst Bemerkungen über Metamorphismus. Von Wilhelm Haidinger. — VIII. Ueber die Hagelstürme in Steiermark am 1. Juli 1846. Von Georg Göth. — IX. Ueber den Hauerit, eine neue Mineralspecies aus der Ordnung der Blenden. Von Wilhelm Haidinger. — X. Chemische Analyse des Hauerits. Von Adolph Patera. — XI. Ueber Caprina Partschii, eine neue Bivalve aus den Gosauschichten der österreichischen Alpen. Von Franz Ritter von Hauer. — XII. Die Erscheinungen der Ebbe und Fluth unter dem Einflusse der Rotation. Von V. Streffleur, k. k. Hauptmann und Professor. — XIII. Ueber das Schillern von Krystallflächen. Von Wilhelm Haidinger. — XIV. Ueber die beiden Arten Cephalaspis Lloydii und Lewisii, Agassiz, und einige diesen zunächst stehende Schalenreste. Von Prof. Dr. Rudolph Kner. — XV. Ueber die Krystallform des Lazuliths. Von Karl Prüfer. — XVI. Integration der Differential-Gleichungen von linearer Form. Von

Digitized by Google

Professor Joseph Petzval. (Eine sehr ausführliche Abhandlung, die noch fortgesetzt werden soll.) — XVII. Neue Cephalopoden aus dem rothen Marmor von Aussee. Von Franz Ritter von Hauer. — XVIII. Beschreibung einiger Oxyuris-Arten. Von Dr. Karl E. Hammerschmidt. — XIX. Geognostische Skizze der Gegend von Kremnitz. Von Johann von Pettko. — XX. Ueber Dolomit und seine künstliche Darstellung aus Kalkstein. Von A. von Morlot. — XXI. Meteorologische Beobachtungen während eines dreiwöchentlichen Winteraufenthalts auf dem Dachsteingebirge *). Von Friedrich Simony. — XXII. Ueber den Nickelarsenikglanz (Gersdorffit) von Schladming in Steiermark und von Prackendorf in Oberungarn. Von A. Löwe, k. k. General-Land- und Hauptmünzamts-Probirer. — XXIII. Ueber die Fossilien von Korod in Siebenbürgen. Von Franz Ritter von Hauer. — XXIV. Ueber die Brachiopoden der silurischen Schichten von Böhmen. Von Joachim Barrande.

Die XXII diesem Bande beigegebenen Tafeln sind sehr schön ausgeführt.

Wir wünschen schliesslich, dass der Eifer der Gesellschaft und des berühmten Herausgebers dieser naturwissenschaftlichen Abhandlungen durch den erfreulichsten Fortgang des so trefflich begonnenen Unternehmens, mit welchem die neu gestiftete Gesellschaft auf eine höchst achtbare Weise in die Reihe der so vielen schon bestehenden naturwissenschaftlichen Vereine getreten ist, reichlichst belohnt werden möge, und werden jederzeit durch unsere Literarischen Berichte nach Kräften dazu beizutragen suchen, dass demselben eine möglichst grosse und weite Verbreitung gesichert werde.

The American Journal of sience and arts. Conducted by Professors B. Silliman and B. Silliman, Jr., and James D. Dana. Second Series. New-Haven. (M. s. Literar. Ber. Nr. XXXVII. S. 543.)

Vol. III. No. 9. May, 1847. On the Relations which exist between the Phenomena of Erratic Blocks in Northern Europe and the Elevations of Scandinavia; by M. Desor. — On the Analysis of the Oat; by Prof. John Pitkin Norton. — On Free Electricity; by Robert Hare, M. D. — On Zoöphytes, No. V.; by James D. Dana. — Notices of Koordistan. Hot Sulphur Spring, Manna, Mines of Lead, Sulphur and Orpiment, Rock Salt and Saline Springs, Ruins, etc., derived chiefly from the letters of Rev. A. H. Wright, M. D., of the Mission of the A.B.C.F.M., at Oroomiah, Persia; communicated by Oliver P. Hubbard, M. D. — Caricography; by Prof. C. Dewey, M. D. — On a New Metal, Pelopium, contained in the Bavarian Tantalite; by Prof. H. Rose. — Termination of the Palaeozoic Period, and Commencement of the Mesozoic; by D. D. Owen, M. D. — Glycocoll (Gelatine Sugar) and some of its Products of Decomposition; by E. N. Horsford. — Origin of the Grand Outline Features of the

*) Der 9493 Wien. Fuss hohe Gränzknoten Oesterreichs, Salzburgs und Steiermarks.

Digitized by Google

Earth; by James D. Dana. — Notes on the Algae of the United States; by Prof. J. W. Bailey. — A few Remarks on the Silurian Classification; by Sir Roderick Impey Murchison, G. C. St. S., F. R. S., etc. — Hydrate of Nickel, a New Mineral; by Prof. B. Silliman, Jr. — On Cupellation with the Blowpipe; by Wm. W. Mather. — On the Variation of a Differential Coefficient of a Function of any number of Variables; by Prof. A. D. Stanley. — Scientific Intelligence.

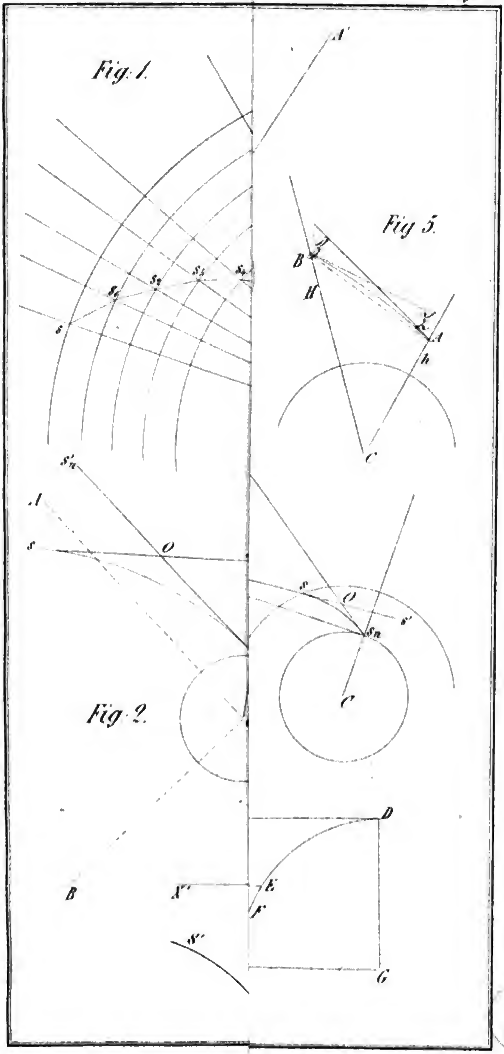
Vol. IV. No. 10. July, 1847. On Terrestrial Magnetism; by Prof. William A. Norton. — General Geological Distribution and probable Food and Climate of the Mammoth; by Prof. R. Owen. — Note upon Carex loliacea, Linn., and C. gracilis, Ehrh.; by A. Gray. — Description of Three New Carices, and a New Species of Rhynchospora; by John Carey. — Observations on the Whirlpool, and on the Rapids, below the Falls of Niagara; by R. Bakewell. — On certain Improvements in the Construction and Supply of the Hydro-oxygen Blowpipe, by which Rhodium, Iridium, or the Osmiuret of Iridium, also Platinum in the large way, have been fused; by Prof. Robert Hare, M. D. — Description of Two New Species of Fossil Footmarks found in Massachusetts and Connecticut, or, of the Animals that made them; by Rev. Edward Hitchcock. — Glycocoll (Gelatine Sugar) and some of its Products of Decomposition; by Prof. E. N. Horsford. (continued.) — On the Potato Disease. — Report on Meteorites; by Prof. Charles Upham Shepard. — A General Review of the Geological Effects of the Earth's Cooling from a state of Igneous Fusion; by James D. Dana. — Review of the Organic Chemistry of M. Charles Gerhardt; by T. S. Hunt — Scientific Intelligence.

Vol. IV. No. 11. September, 1847. On the Destruction and partial Reproduction of Forests in British North America; by John William Dawson, Esq. of Pictou. — Review of the Organic Chemistry of M. Charles Gerhardt; by T. S. Hunt (concluded). — On the relative Age and Position of the so-called Nummulite Limestone of Alabama; by C. Lyell, F. R. S. and V. P. G. S. — Notice of some recent Additions to our Knowledge of the Magnetism of the United States and its Vicinity; by Prof. Elias Loomis. — On the Trap Tuff, or Volcanic Grit of the Connecticut Valley, with the bearings of its history upon the age of the Trap Rock and Sandstone generally in that Valley; by Rev. Edward Hitchcock. — On Terrestrial Magnetism; by Prof. William A. Norton (concluded). — Notice of Dr. Mantell's Isle of Wight. — Seventeenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science. — Theory of Transit Corrections; by Enoch F. Burr. — Scientific Intelligence.

Berichtigung.

Es ist übersehen worden, die beiden, dem dritten Hefte dieses zehnten Theils des Archivs beigegebenen, zu der Abhandlung des Herrn Doctor Wolfers: Ueber strenge und gelinde Winter (Thl. X. Nr. XXXI.) gehörenden lithographirten Tafeln mit *A.* und *B.* zu bezeichnen. Die geehrten Besitzer des Archivs werden gebeten, diesen Mangel zu ergänzen.

Digitized by Google



UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

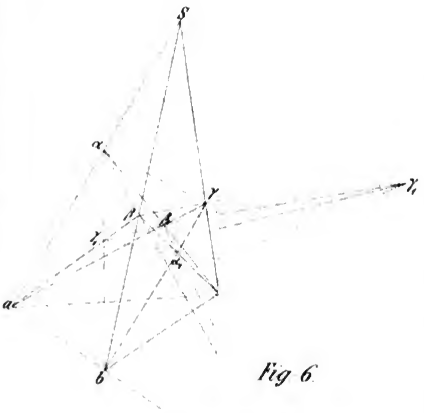
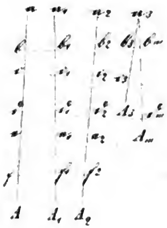
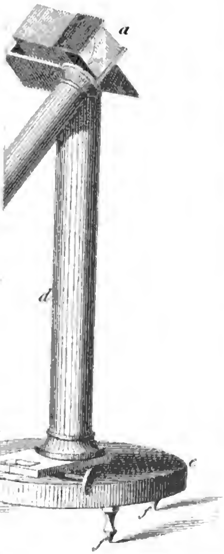


Fig. 6.

Fig. 4.





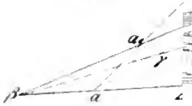


Fig. 3.

UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Fig. 1.

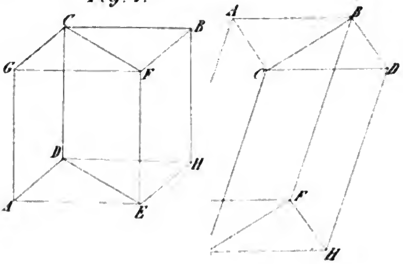


Fig. 4.

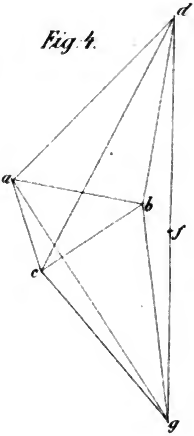
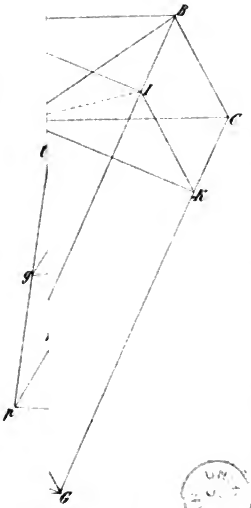


Fig. 7.



Digitized by Google

Fig. 1.

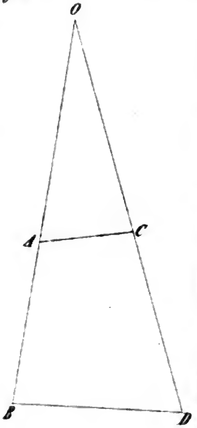
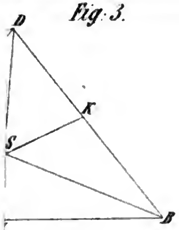


Fig. 3.



g. 4.

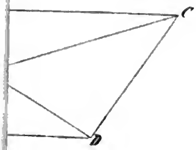


Fig. 5.

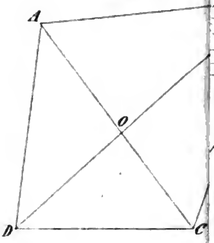
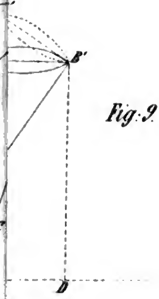
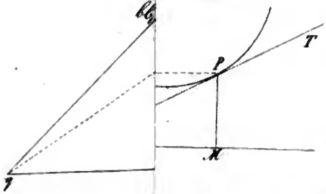


Fig. 9.





UNIV. OF MICH.

Digitized by Google

Digitized by G

Fig. 1.

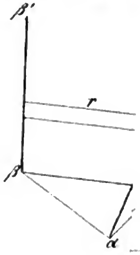
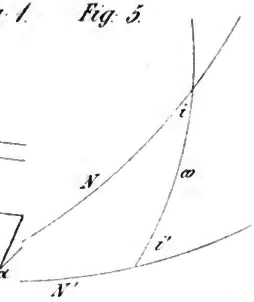
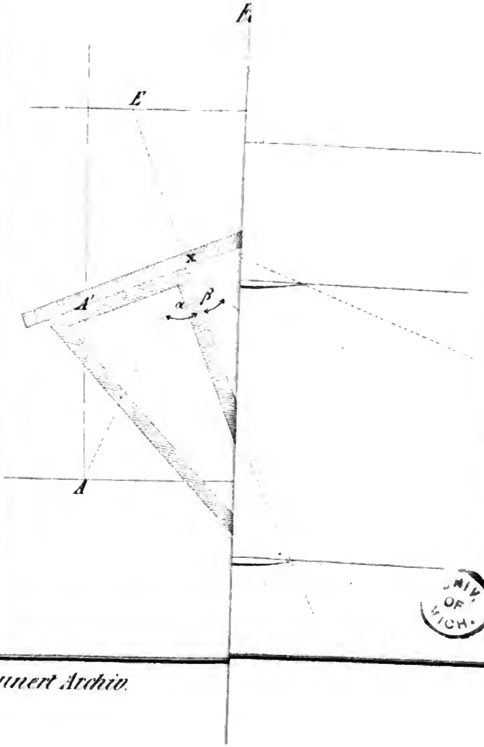


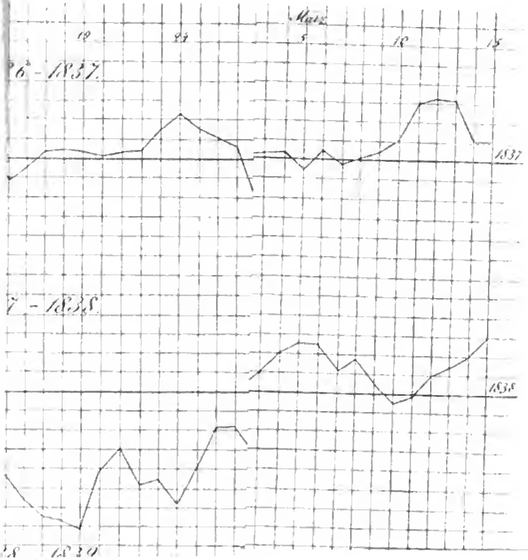
Fig. 5.





UNIV. OF MICH.

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 03698 0665

BOUND
DEC 19 1932
UNIV. OF MICH.
LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Goog